Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

27 Ιανουαρίου 2022

+1/22/.....

Στοιχεία Εξεταζόμενου/ης	
ΕΠΩΝΥΜΟ :	ΟΝΟΜΑ :
ΑΡ. ΜΗΤΡΩΟΥ :	ΕΤΟΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ :

ΑΙΘΟΥΣΑ :	ΣΤΗΛΗ :	ΒΑΘΜΟΣ:

Οδηγίες/Επεξηγήσεις

Στο διαγώνισμα υπάρχουν τριών ειδών ερωτήματα.

1. Ερωτήματα με την ένδειξη ■. Σε αυτά πρέπει να δώσετε μόνο την απάντηση δίχως αιτιολόγηση.
2. Ερωτήματα με την ένδειξη ○. Αυτά είναι ερωτήματα του τύπου σωστό/λάθος και καλείσθε να γράψετε στον κύκλο ¨Σ¨ για σωστό ή ¨Λ¨ για λάθος.
3. Ένα ερώτημα στο οποίο καλείσθε να δώσετε μια πλήρη αλλά "οικονομική απόδειξη-λύση" για το ζητούμενο.

Σε όλες τις περιπτώσεις συστήνεται να "δουλέψετε" κάθε ερώτημα ή υποερώτημα στο πρόχειρο ώστε η απάντησή σας να μην είναι τυχαία.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 1 ώρα και 30 λεπτά. Η παράδοση των γραπτών αρχίζει 1 ώρα και 15 λεπτά μετά από την έναρξη της εξέτασης.

Καλή Επιτυχία!

Λύσεις πρώτου μέρους
όλες οι εκδοχές

Θ1. ■ Εάν $f(x) = \sqrt{1+2x}$, και $f(x) = P_2(x) + R_2(x)$ στο $-1/2 < x < 1/2$, όπου P_2 είναι το πολυώνυμο Taylor βαθμού 2 και R_2 είναι το αντίστοιχο υπόλοιπο, τότε

(α') $P_2(x) =$

(β') $R_2(x) =$

Θ1. ■ Εάν $f(x) = \sqrt{1+3x}$, και $f(x) = P_2(x) + R_2(x)$ στο $-1/3 < x < 1/3$, όπου P_2 είναι το πολυώνυμο Taylor βαθμού 2 και R_2 είναι το αντίστοιχο υπόλοιπο, τότε

(α') $P_2(x) =$

(β') $R_2(x) =$

Θ1. ■ Εάν $f(x) = \ln(1+2x)$, και $f(x) = P_2(x) + R_2(x)$ στο $-1/2 < x < 1/2$, όπου P_2 είναι το πολυώνυμο Taylor βαθμού 2 και R_2 είναι το αντίστοιχο υπόλοιπο, τότε

(α') $P_2(x) =$

(β') $R_2(x) =$

Θ1. ■ Εάν $f(x) = \ln(1-2x)$, και $f(x) = P_2(x) + R_2(x)$ στο $-1/2 < x < 1/2$, όπου P_2 είναι το πολυώνυμο Taylor βαθμού 2 και R_2 είναι το αντίστοιχο υπόλοιπο, τότε

(α') $P_2(x) =$

(β') $R_2(x) =$

Λύση

Σε όλες τις περιπτώσεις το διάστημα είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν, οπότε το κάθε πολυώνυμο και το κάθε υπόλοιπο είναι με κέντρο το μηδέν. Έτσι

$$P_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 \qquad \text{και} \qquad R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3$$

Για την

$$f(x) = \sqrt{1+2x} = (1+2x)^{1/2}$$

υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{2}(1+2x)^{-1/2}2 = (1+2x)^{-1/2} \Rightarrow f'(0) = 1 \\ f''(x) &= -\frac{1}{2}(1+2x)^{-3/2}2 = -(1+2x)^{-3/2} \Rightarrow f''(0) = -1 \\ f'''(x) &= \frac{3}{2}(1+2x)^{-5/2}2 = 3(1+2x)^{-5/2} \end{aligned}$$

συνεπώς

$$P_2(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 \qquad \text{και} \qquad R_2(x) = \frac{3(1+2\xi)^{-5/2}}{3!}x^3 = \frac{x^3}{2(1+2\xi)^{5/2}}.$$

Για τις υπόλοιπες περιπτώσεις οι υπολογισμοί είναι ανάλογοι.

Θ2. Συμπληρώστε την απάντηση ή γράψτε Σ για σωστό ή Λ για λάθος στο λευκό κυκλάκι.

Σ Αν $0 < a < b$, τότε $\int_0^L e^{ax}\,dx \le \int_0^L e^{bx}\,dx$, για κάθε $L > 0$.

Σ Αν $0 < a < b$, τότε $\int_1^L \ln(ax)\,dx \le \int_1^L \ln(bx)\,dx$, για κάθε $L > 1$.

Σ Αν $0 < a < b$, τότε $\int_1^L \ln(a+x)\,dx \le \int_1^L \ln(b+x)\,dx$, για κάθε $L > 1$.

Σ Αν $0 < a < b$, τότε $\int_1^L \ln(1+ax)\,dx \le \int_1^L \ln(1+bx)\,dx$, για κάθε $L > 1$.

Σε όλες τις περιπτώσεις η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι αύξουσα και η τιμή της συνάρτησης στο αριστερό μέλος είναι μικρότερη της τιμής στο δεξί μέλος.

■ $\sup_{-\infty<x<\infty} e^{-x^2} = \sup_{-\infty<x<\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{e^0} = 1$

■ $\sup_{-\infty<x<\infty} (1+x^2)^{-1} = \sup_{-\infty<x<\infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+0} = 1$

■ $\sup_{-\infty<x<\infty} e^{-|x|} = \sup_{-\infty<x<\infty} \frac{1}{e^{|x|}} = \frac{1}{e^0} = 1$

■ $\sup_{-\infty<x<\infty} (1+e)^{-x^2} = \sup_{-\infty<x<\infty} \frac{1}{(1+e)^{x^2}} = \frac{1}{(1+e)^0} = 1$

Το supremum, ελάχιστο άνω φράγμα, συμβαίνει εκεί που ο παρονομαστής γίνεται ελάχιστος.

Λ Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{a_n}}{1+2|a_n|}$ συγκλίνει.

Ενώ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, είναι $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n}}{1+2|a_n|} = \frac{e^0}{1+0} = 1 \neq 0$.

Σ Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2|a_n|}{1+e^{a_n}}$ συγκλίνει.

$\frac{2|a_n|}{1+e^{a_n}} \le 2|a_n|$, οπότε $0 \le \sum_{n=0}^{N} \frac{2|a_n|}{1+e^{a_n}} \le \sum_{n=0}^{N} 2|a_n| = 2\sum_{n=0}^{N} |a_n| \le 2\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ για κάθε N.

Σ Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+\ln(1+|a_n|)}$ συγκλίνει.

$\frac{|a_n|}{1+\ln(1+|a_n|)} \le |a_n|$, οπότε η δεύτερη σειρά συγκλίνει κατ' απόλυτη τιμή, άρα συγκλίνει.

(Λ) Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{a_n}}{1+\ln(1+|a_n|)}$ συγκλίνει.

Ενώ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, είναι $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n}}{1+\ln(1+|a_n|)} = \frac{e^0}{1+\ln 1} = \frac{1}{1+0} = 1 \neq 0$.

■ $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = e^{1/2}$

■ $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^{2}$

■ $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{2n}\right)^n = e^{-1/2}$

■ $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{3}{2n}\right)^n = e^{-3/2}$

Σε όλες τις περιπτώσεις μπορούμε να γράψουμε $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ και $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$.

(Σ) $\lim_{a\to\infty} \int_{a-1}^{a+1} (a-x)^{21}\, dx = 0.$

(Σ) $\lim_{a\to\infty} \int_{a-1}^{a+1} (a-x)^{23}\, dx = 0.$

(Σ) $\lim_{a\to\infty} \int_{a-1}^{a+1} (a-x)^{25}\, dx = 0.$

(Σ) $\lim_{a\to\infty} \int_{a-1}^{a+1} (a-x)^{27}\, dx = 0.$

Σε όλες τις περιπτώσεις μπορούμε να γράψουμε $\int_{a-1}^{a+1} (a-x)^{2k+1}\, dx = \int_{1}^{-1} -y^{2k+1}\, dy = \int_{-1}^{1} y^{2k+1}\, dy = 0$, αφού η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι περιττή.

■ Εάν $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$, τότε $\lim_{n\to\infty} (a_n-1)^2 = (2-1)^2 = 1^2 = 1$

■ Εάν $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$, τότε $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n-1} = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$

■ Εάν $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$, τότε $\lim_{n\to\infty} (1-a_n)^3 = (1-2)^3 = (-1)^3 = -1$

■ Εάν $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$, τότε $\lim_{n\to\infty} (1-a_n)^3 = (1-3)^3 = (-2)^3 = -8$

(Λ) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n^q+1}$ συγκλίνει αν $q > p$.

$\dfrac{n^p}{2n^q} \leq \dfrac{n^p}{n^q+1} \leq \dfrac{n^p}{n^q}$, κατά συνέπεια η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^p}{n^q} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{q-p}}$ συγκλίνει, και αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $q-p>1$, ισοδύναμα $q>p+1$.

Ⓐ Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^q}{n^p+1}$ συγκλίνει αν $q<p$. Το σωστό είναι, βλέπε προηγούμενο, $p>q+1$.

Ⓐ Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^p+1}{n^q+1}$ συγκλίνει αν $p>q+1$. Το σωστό είναι, βλέπε προηγούμενο, $q>p+1$.

$$\frac{1}{2}\frac{n^p}{n^q} \leq \frac{n^p}{n^q+1} \leq \frac{n^p+1}{n^q+1} \leq \frac{2n^p}{n^q+1} \leq 2\frac{n^p}{n^q}$$

Ⓐ Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^p+1}{n^q+1}$ συγκλίνει αν $p<q+1$. Το σωστό είναι, βλέπε προηγούμενο, $q>p+1$.

- $\sum_{n=0}^{\infty} \pi^{-n/2} =$

- $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n/2} =$

- $\sum_{n=0}^{\infty} \pi^{-n/3} =$

- $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n/3} =$

Όλες οι περιπτώσεις κωδικοποιούνται ως $\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n/k}$, με $a=\pi, e$ και $k=2,3$, και η σειρά είναι **γεωμετρική**, επομένως

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n/k} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[k]{a}}\right)^n = \frac{1}{1-1/\sqrt[k]{a}} = \frac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k]{a}-1},$$

αφού $\sqrt[k]{a}>1$, οπότε $0<\dfrac{1}{\sqrt[k]{a}}<1$.

Θ3. Δίνεται η ακολουθία (a_n) με

$$a_n = \int_0^n \frac{1}{(1+x)^{1/p}}\,dx, \qquad p \neq 0.$$

◯ Η ακολουθία είναι αύξουσα.

◯ Αν $p > 0$ η ακολουθία είναι φραγμένη.

◯ Η ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν $0 < p < 1$.

Θ3. Δίνεται η ακολουθία (a_n) με

$$a_n = \int_0^n \frac{1}{(1+x)^{p}}\,dx, \qquad p \in \mathbb{R}.$$

◯ Η ακολουθία είναι αύξουσα.

◯ Αν $p > 0$ η ακολουθία είναι φραγμένη.

◯ Η ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$.

Θ3. Δίνεται η ακολουθία (a_n) με

$$a_n = \int_0^n \frac{1}{(1+x)^{2/p}}\,dx, \qquad p \neq 0.$$

◯ Η ακολουθία είναι αύξουσα.

◯ Αν $p > 0$ η ακολουθία είναι φραγμένη.

◯ Η ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν $0 < p < 2$.

Θ3. Δίνεται η ακολουθία (a_n) με

$$a_n = \int_0^n (1+x)^{p}\,dx, \qquad p \neq 0.$$

◯ Η ακολουθία είναι αύξουσα.

◯ Αν $p > 0$ η ακολουθία είναι φραγμένη.

◯ Η ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν $p < -1$.

Λύση

Σε όλες τις περιπτώσεις μπορούμε να γράψουμε

$$a_n = \int_0^n \frac{1}{(1+x)^r}\,dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{t^r}\,dt$$

Η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι θετική, οπότε μεγαλώνοντας το διάστημα αυξάνεται η τιμή του ολοκληρώματος, επομένως η ακολουθία είναι **αύξουσα**. Το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty 1/t^r\,dt$ συγκλίνει αν και μόνο αν $r > 1$, ισοδύναμα η ακολουθία είναι φραγμένη και συγκλίνει αν και μόνο αν $r > 1$. Έτσι οι απαντήσεις σε όλες τις περιπτώσεις είναι **Σωστό, Λάθος, Σωστό**.

Θ4. ■ Εάν $z = -i$, τότε

(α΄) $\arg z = \left\{2k\pi + \dfrac{3\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$

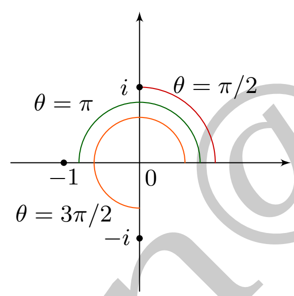
(β΄) Η τριγωνομετρική μορφή του z είναι $z = \cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}$, αφού $|z| = 1$

(γ΄) $(1+z)^{24} = (1-i)^{24} = \left[\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right]^{24} = 2^{12}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)^{24} =$

$$2^{12}\left(\cos 24\frac{7\pi}{4} + i\sin 24\frac{7\pi}{4}\right) = 2^{12}(\cos 42\pi + i\sin 42\pi) = 2^{12}$$

(δ΄) Μία από τις τρίτες ρίζες ($(-i)^{1/3}$) του z είναι η $w = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2} = i$ (για $k = 0$).

$$(-i)^{1/3} = \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)^{1/3} = \left[\cos\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)\right]^{1/3}$$
$$= \cos\frac{2k\pi + \frac{3\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{2k\pi + \frac{3\pi}{2}}{3}, \qquad k = 0, 1, 2.$$



Το ανάλογο ισχύει και για τις υπόλοιπες εκδοξές.

Θ4. ■ Εάν $z = i$, τότε

(α΄) $\arg z =$

(β΄) Η τριγωνομετρική μορφή του z είναι $z =$

(γ΄) $(1+z)^{28} =$

(δ΄) Μία από τις τρίτες ρίζες ($(i)^{1/3}$), του z είναι η $w =$

Θ4. ■ Εάν $z = -1$, , τότε

(α΄) $\arg z =$

(β΄) Η τριγωνομετρική μορφή του z είναι $z =$

(γ΄) $(z+i)^{24} =$,

(δ΄) Μία από τις μη πραγματικές τρίτες ρίζες ($(-1)^{1/3}$) του z είναι η $w =$

Θ4. ■ Εάν $z = i$, τότε

(α΄) $\arg z =$

(β΄) Η τριγωνομετρική μορφή του z είναι $z =$

(γ΄) $(-1-z)^{24} =$

(δ΄) Μία από τις μη πραγματικές τρίτες ρίζες ($(i)^{1/3}$) του z είναι η $w =$