Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Διδάσκων: Ε. Στεφανόπουλος — 31 Αυγουστου 2017

Στοιχεία Εξεταζόμενου/ης			
ΕΠΩΝΥΜΟ:		ΟΝΟΜΑ:	
ΑΡ. ΜΗΤΡΩΟΥ:		ΕΤΟΣ/ΕΞΑΜΗΝΟ:	/
ΑΙΘΟΥΣΑ:		ΣΤΗΛΗ:	

Βαθμολογία										
Θ1.	Θ2.	Θ3.	Θ4.	Θ5.	Θ6.	Θ7.	Θ8.	Θ9.	Άθροισμα	Τελικός Βαθμός

Αιτιολογήστε πλήρως κάθε απάντησή σας και φροντίστε ώστε το γραπτό σας να είναι ευανάγνωστο. Παραδίδετε το γραπτό μαζι με το τυπολόγιο. Η διαρκεια της εξετασης ειναι 2 ωρες και 30 λεπτα.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Θ1. Εάν $a > 1$ είναι πραγματικός αριθμός, δείξτε ότι

$$(1+x)^a \geq 1 + ax, \qquad x > -1.$$

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = (1+x)^a - ax - 1, \qquad -1 < x < +\infty.$$

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ και

$$f'(x) = a(1+x)^{a-1} - a = a[(1+x)^{a-1} - 1] \qquad \text{με} \qquad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Επιπλέον

$$-1 < x < 0 \Rightarrow 0 < 1 + x < 1 \Rightarrow f'(x) < 0 \quad \text{και} \quad x > 0 \Rightarrow 1 + x > 1 \Rightarrow f'(x) > 0,$$

κατά συνέπεια η f είναι φθίνουσα στο $(-1, 0)$ και αύξουσα στο $(0, +\infty)$, έτσι στο κρίσιμο σημείο $x = 0$ η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Επομένως

$$f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow (1+x)^a - ax - 1 \geq 0, \qquad \forall x > -1$$

που είναι το ζητούμενο.

Θ2. Δείξτε ότι $|\sin 2x - \sin 2y| \le 2|x-y|$.

Λύση

Η συνάρτηση $f(x) = \sin 2x$ είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $\mathbb{R}$, έτσι από το Θεώρημα της μέσης τιμή έπεται ότι

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y) \Rightarrow \sin 2x - \sin 2y = 2(\cos\xi)(x-y)$$

για κάποιο ξ μεταξύ x και y. Επειδή $|\cos t| \le 1$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$|\sin 2x - \sin 2y| = 2|\cos\xi||x-y| \Rightarrow |\sin 2x - \sin 2y| \le 2|x-y|.$$

Θ3. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{x^2-1}\,dx$.

Λύση

Επειδή

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1/2}{(x-1)} - \frac{1/2}{(x+1)}$$

υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{x^2-1}\,dx &= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1/2}{(x-1)}\,dx - \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1/2}{(x+1)}\,dx \\
&= \left[\frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{2}\log|x+1|\right]_{-1/2}^{1/2} \\
&= \frac{1}{2}\left[\log\frac{1}{2} - \log\frac{3}{2} - \log\frac{3}{2} + \log\frac{1}{2}\right] = -\log 3.
\end{aligned}$$

Θ4. Να βρεθεί η τιμή του c ώστε η εφαπτόμενη ευθεία στην γραφική παράσταση της $y = e^x$ στο σημείο (c, e^c) να είναι η $y = ex$.

Λύση

Από την εξίσωση της εφαπτομένης της $y = f(x)$ στο $x = a$

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

για $f(x) = e^x$ και $x = c$ παίρνουμε

$$y - e^c = e^c(x-c) \Rightarrow y = e^c x + e^c(1-c).$$

Έτσι αν η εφαπτομένη στο σημείο (c, e^c) είναι η $y = ex$ θα έχουμε

$$e^c x + e^c(1-c) = ex \Rightarrow \left\{\begin{aligned} e^c &= e \\ e^c(1-c) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c = 1.$$

Θ5. Εάν $a > 0$, να βρεθεί το όριο της σειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+1+a)}.$$

Λύση

Επειδή

$$\frac{1}{(n+a)(n+1+a)} = \frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+1+a} = b_n - b_{n+1}$$

η σειρά είναι τηλεσκοπική, έτσι

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+a)(n+1+a)} &= \sum_{n=0}^{N} (b_n - b_{n+1}) \\ &= (b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \cdots + (b_N - b_{N+1}) = b_0 - b_{N+1}\end{aligned}$$

κατά συνέπεια

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+1+a)} &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+a)(n+1+a)} = \lim_{N\to\infty} (b_0 - b_{N+1}) \\ &= \frac{1}{a} - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1+a} = \frac{1}{a}.\end{aligned}$$

Θ6. Να βρεθεί το ανάπτυγμα Maclaurin, της $f(x) = \log(1-x)$, δηλαδή η δυναμοσειρά γύρω από το $x = 0$, καθώς και το διάστημα σύγκλισης της σειράς. ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Ποιά είναι η παράγωγος της $y = \log(1-x)$;

Λύση

Επειδή

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x} = -(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots), \qquad -1 < x < 1,$$

(γεωμετρική σειρά) από το Θεώρημα για την παράγωγο και την παράγουσα σειράς (βλέπε και τυπολόγιο) έχουμε ολοκληρώνοντας το παραπάνω ανάπτυγμα

$$\begin{aligned}\log(1-x) &= \int_0^x \frac{-1}{1-t}\,dt = -\int_0^x 1\,dt - \int_0^x t\,dt - \int_0^x t^2\,dt - \int_0^x t^3\,dt - \cdots - \int_0^x t^n\,dt - \cdots \\ &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots, \qquad -1 < x < 1,\end{aligned}$$

όπου το διάστημα $(-1, 1)$ είναι το διάστημα **απόλυτης σύγκλισης**. Για το διάστημα σύγκλισης εξετάζουμε τα άκρα. Για $x = 1$ η σειρά που προκύπτει είναι η αρμονική επί -1 η οποία αποκλίνει. Για $x = -1$ η σειρά που προκύπτει είναι η

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \cdots$$

η οποία είναι εναλλασσόμενη με $a_n = (-1)^{n+1}/n$ και η οποία από το κριτήριο του Leibnitz συγκλίνει. Έτσι έχουμε

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots, \qquad -1 \le x < 1.$$

Θ7. (α΄) Να υπολογισθεί το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$.

Λύση

Επειδή $\log 1 = 0$, το ζητούμενο όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$. Ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις οπότε από τον κανόνα του L'Hospital έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1/(1+x)}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = 1.$$

(β΄) Χρησιμοποιήστε λογάριθμο και το αποτέλεσμα στο (α΄) για να δείξετε ότι για κάθε $a\in\mathbb{R}$ $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$.

Λύση

Η συνάρτηση $\log$ είναι η αντίστροφη της εκθετικής και είναι συνεχής, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \log e^a = a\log e = a.$$

Έχουμε

$$\log\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = n\log\left(1+\frac{a}{n}\right) = a\frac{\log\left(1+\frac{a}{n}\right)}{\frac{a}{n}} = a\frac{\log(1+x_n)}{x_n}$$

όπου

$$x_n = \frac{a}{n}\to 0 \quad \text{καθώς} \quad n\to\infty.$$

Έτσι έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \lim_{x_n\to 0} a\frac{\log(1+x_n)}{x_n} = a$$

από το (α΄) που είναι ό,τι θέλουμε να δείξουμε.

Θ8. Έστω $a > 0$.

(α΄) Εξετάστε για ποιές τιμές της παραμέτρου p το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$I(p) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+a)^p}\, dx$$

συγκλίνει, και για αυτές τις τιμές να βρεθεί η τιμή του.

Λύση

Για $s > 0$ έχουμε

$$\int_0^s \frac{1}{(x+a)^p}\, dx = \begin{cases} \log(s+a) - \log a, & p = 1 \\ \dfrac{(s+a)^{1-p}}{1-p} - \dfrac{a^{1-p}}{1-p}, & p \neq 1 \end{cases}$$

Έτσι έχουμε

i. $p = 1$

$$I(1) = \lim_{s\to\infty} \int_0^s \frac{1}{x+a}\, dx = \lim_{s\to\infty} \big(\log(s+a) - \log a\big) = +\infty.$$

ii. $p < 1$

$$I(p) = \lim_{s\to\infty} \int_0^s \frac{1}{(x+a)^p}\, dx = \frac{1}{1-p} \lim_{s\to\infty} \big((s+a)^{1-p} - a^{1-p}\big) = +\infty.$$

iii. $p > 1$

$$I(p) = \lim_{s\to\infty} \int_0^s \frac{1}{(x+a)^p}\, dx = \frac{1}{p-1} \lim_{s\to\infty} \left(\frac{1}{a^{p-1}} - \frac{1}{(s+a)^{p-1}}\right) = \frac{1}{(p-1)a^{p-1}}.$$

(β΄) Για ποιές τιμές της παραμέτρου p η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^p}$$

συγκλίνει; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

Λύση

Αν $p \leq 0$, τότε η σειρά αποκλίνει αφού $1/(n+a)^p \nrightarrow 0$. Έστω λοιπόν $p > 0$. Η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{(x+a)^p}, \qquad x > 0$$

είναι θετική και φθίνουσα, κατά συνέπεια από το κριτήριο του ολοκληρώματος η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

συγλίνει αν ακι μόνο αν το ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+a)^p}\, dx$$

συγκλίνει. Έτσι από το (α΄) η δοσμένη σειρά συγκλίνει για $p > 1$ και αποκλίνει αν $p \leq 1$.

Θ9. (α΄) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad \text{όπου το } \xi \text{ είναι μεταξύ 0 και } x.$$

Λύση

Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και μάλιστα $f^{(n)}(x) = e^x$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, κατά συνέπεια από το Θεώρημα του Taylor (βλέπε και τυπολόγιο) παίρνουμε

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

για κάποιο ξ μεταξύ 0 και x, και επειδή $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$, για κάθε φυσικό αριθμό k, παίρνουμε

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{όπου το } \xi \text{ είναι μεταξύ 0 και } x$$

(β΄) Χρησιμοποιήστε το (α΄) για να προσεγγίσετε την $f(x) = e^{-x^2}$ με το σχετικό πολυώνυμο Taylor 8ου βαθμού, στο $x = 0$, και εκτιμήστε την ακρίβεια της προσέγγισης στο διάστημα $[-1/2, 1/2]$.

Λύση

Το παραπάνω ανάπτυγμα έχει έννοια για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &= 1 + \frac{(-x^2)}{1!} + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-x^2)^n}{n!} + \frac{e^{\xi}(-x^2)^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad -x^2 < \xi < 0 \\ &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + (-1)^{n+1} \frac{e^{\xi} x^{2(n+1)}}{(n+1)!}, \qquad -x^2 < \xi < 0 \end{aligned}$$

έτσι για $n = 4$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{e^{\xi} x^{10}}{5!}, \qquad -x^2 < \xi < 0 \\ &= P_8(x) + R_8(x). \end{aligned}$$

Αν $x \in [-1/2, 1/2]$, τότε $-1/4 < \xi < 0$, οπότε

$$\begin{aligned} |e^{-x^2} - P_8(x)| = |R_8(x)| &= \frac{e^{\xi} x^{10}}{5!} \\ &< \frac{e^0 (1/2)^{10}}{5!} \qquad \left(\text{αφού } -x^2 < \xi < 0\right) \\ &= \frac{1}{5! 2^{10}} = \frac{1}{122880} = 0.0000081380208333. \end{aligned}$$