Γενικά Μαθηματικά Ι

Επαναληπτικές Ασκήσεις Ι

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

29 Μαΐου 2023

(Ε1.) Υποθέστε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και ότι $a_n \geq 0$.

- Σωστό/Λάθος. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ συγκλίνει.

  $$0 \leq \frac{a_n}{n} \leq a_n \quad \forall n \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$$

- Σωστό/Λάθος. Η δυναμοσειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει απολύτως αν $x \in (-1, 1)$.

  $x \in (-1,1)$, οπότε $0 \leq |a_n x^n| \leq a_n \quad \forall n \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$

- Σωστό/Λάθος. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = 0$.

  Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, επομένως $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, οπότε $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = 0$

- Σωστό/Λάθος. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ συγκλίνει.

  Αφού $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, υπάρχει N ώστε $a_n < 1$, για $n \geq N$, έτσι $0 \leq a_n^2 \leq a_n$ για $n \geq N$, επομένως $0 \leq \displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} a_n^2 \leq \sum_{n=N}^{\infty} a_n < +\infty$, άρα $0 \leq \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < +\infty$

(E2.) Η εξίσωση $x^3 = \tan x$ έχει άπειρες ρίζες στους πραγματικούς αριθμούς.

Σε κάθε διάστημα $[k\pi, k\pi+\pi/2)$ για $k = 0, 1, 2, \ldots$ (το ανάλογο ισχύει και για $k < 0$) η γραφική παράσταση της $y = x^3$ είναι μια ``αύξουσα καμπύλη γραμμή'' από το σημείο $(k\pi, (k\pi)^3)$ στο $(k\pi+\pi/2, (k\pi+\pi/2)^3)$, ενώ η η γραφική παράσταση της $y = \tan x$ είναι επίσης μια ``αύξουσα καμπύλη γραμμή'' από το σημείο $(k\pi, 0)$ η οποία εκτείνεται ασυμπτωτικά στο $(k\pi + \pi/2, +\infty)$, κατά συνέπεια για κάποιο $\delta_k \in (0, \pi/2)$ είναι

$$\tan(k\pi + \delta_k) = (k\pi + \pi/2)^3 + 1.$$

Δηλαδή η καμπύλη $y = \tan x$ αρχίζει κάτω από το σημείο $(k\pi, (k\pi)^3)$ και περιέχει το σημείο $(k\pi+\delta_k, (k\pi+\pi/2)^3+1)$ πάνω από το πέρας της $y = x^3$, κατά συνέπεια οι δύο καμπύλες τέμνονται, ισοδύναμα υπάρχει $\xi_k \in (k\pi, k\pi+\pi/2)$ ώστε $\tan \xi_k = \xi_k^3$ για κάθε $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

(Ε3.) Για ποιά a είναι η συνάρτηση $f(x) = ax + \cos x$ αύξουσα, φθίνουσα, ή τίποτα από τα δύο;

$f'(x) = a - \sin x$ και $-1 \leq \sin x \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, κατά συνέπεια

1. Αύξουσα $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $a \geq \sin x$ $\Leftrightarrow$ $a \geq 1$
2. Φθίνουσα $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0$ $\Leftrightarrow$ $a \leq \sin x$ $\Leftrightarrow$ $a \leq -1$
3. Μη μονότονη $\Leftrightarrow$ η $f'(x)$ αλλάζει πρόσημο $\Leftrightarrow$ $-1 < a < 1$

(Ε4.) Εξετάστε για ποιά $p > 0$ το ολοκλήρωμα

$$I(p) = \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^p}\, dx$$

συγκλίνει.

Είναι

$$I(p) = \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^p}\, dx = \lim_{\xi \to +\infty} \int_1^{\xi} \frac{\log x}{x^p}\, dx.$$

- Για $p = 1$ και $y = \log x$ έχουμε

$$\int_1^{\xi} \frac{\log x}{x}\, dx = \int_0^{\log \xi} y\, dy = \frac{y^2}{2}\Big|_0^{\log \xi} = \frac{1}{2}(\log \xi)^2 \to +\infty \quad \text{καθώς } \xi \to +\infty.$$

- Για $p \neq 1$

$$\int_1^{\xi} \frac{\log x}{x^p}\,dx = \int_1^{\xi} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right)' \log x\,dx = \frac{x^{1-p}}{1-p}\log x\Big|_1^{\xi} - \int_1^{\xi} \frac{x^{1-p}}{1-p}\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{p-1}\left(-\frac{\log\xi}{\xi^{p-1}} + \int_1^{\xi}\frac{1}{x^p}\,dx\right) = \frac{1}{p-1}\left[-\frac{\log\xi}{\xi^{p-1}} + \frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{\xi^{p-1}}\right)\right]$$

Αν $p < 1$ και τα δύο κλάσματα που εξαρτώνται από το p αποκλίνουν στο $+\infty$ καθώς $\xi \to +\infty$, άρα $I(p) = +\infty$ (γιατί;).
Αν $p > 1$ γράφουμε $p - 1 = q > 0$ και

$$\lim_{\xi\to+\infty} \frac{\log\xi}{\xi^q} = \lim_{\xi\to+\infty} \frac{1/\xi}{q\xi^{q-1}} = \lim_{\xi\to+\infty} \frac{1}{q\xi^q} = 0 \qquad \text{(L'Hospital)}$$

$$\lim_{\xi\to+\infty} \frac{1}{\xi^q} = 0$$

Άρα το ολοκλήρωμα συγκλίνει για $p > 1$ και στην περίπτωση αυτή $I(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2}$.

(E5.) Υπολογίστε το όριο της σειράς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$.

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

άρα η σειρά είναι τηλεσκοπική, αφού $2n \pm 1 \in \mathbb{N}$, έτσι

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2N+1}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2N+1}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

(Ε6.) Δείξτε ότι

$$ax \leq \frac{a^6}{6} + \frac{5}{6}x^{6/5}$$

για κάθε $x > 0$ όπου $a > 0$.

Ορίζοντας

$$f(x) = \frac{a^6}{6} - ax + \frac{5}{6}x^{6/5}$$

αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$. Υπολογίζουμε

$$f'(x) = -a + x^{1/5} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = a^5.$$

Αν $x < a^5$, τότε $f'(x) < 0$, επομένως η f είναι φθίνουσα στο $(0, a^5)$, ενώ αν $x > a^5$, τότε $f'(x) > 0$, επομένως η f είναι αύξουσα στο $(a^5, +\infty)$. Κατά συνέπεια η f έχει ελάχιστο στο $x = a^5$, επομένως $f(x) \geq f(a^5)$, ισοδύναμα

$$\frac{a^6}{6} - ax + \frac{5}{6}x^{6/5} \geq \frac{a^6}{6} - a^6 + \frac{5}{6}a^6 = 0,$$

απ᾽ όπου προκύπτει το ζητούμενο.