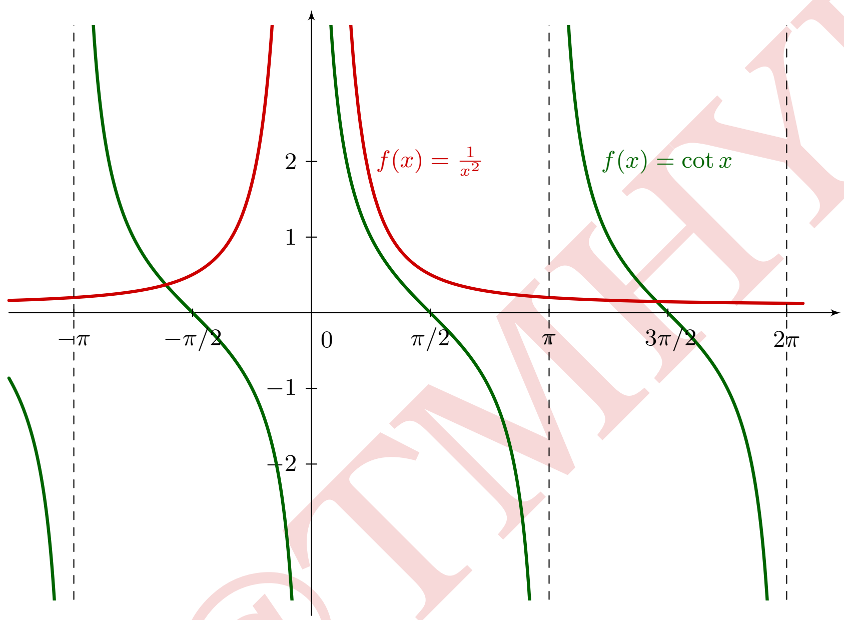
ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Παράγωγοι συναρτήσεων

1. Η εξίσωση $x^2 = \tan x$ έχει άπειρες ρίζες στους πραγματικούς αριθμούς. Σ Λ

   Επειδή $\tan 0 = 0$, η $x = 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης. Για $x \neq 0$ η δοσμένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $\cot x = 1/x^2$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $k \neq 0$ υπάρχει x_k στο διάστημα $[k\pi, k\pi + \pi/2]$ με



   $\cot x_k = (1/x_k)^2$. Κατά συνέπεια η αρχική εξίσωση έχει άπειρες ρίζες.

2. Επιλέξτε και κυκλώστε ανάλογα. Αν οι f και g είναι αύξουσες συναρτήσεις

   (α′) Η $f + g$ είναι αύξουσα. Σ Λ

   (β′) Η fg είναι αύξουσα. Σ Λ

   Οι $f(x) = x$, $g(x) = x^3$ είναι αύξουσες συναρτήσεις, αλλά η $h(x) = f(x)g(x) = x^4$ δεν είναι αύξουσα.

3. Να βρεθεί η τιμή του c ώστε η εφαπτόμενη ευθεία στην γραφική παράσταση της $y = e^x$ στο σημείο (c, e^c) να είναι η $y = ex$.

   Λύση

   Αν $y = f(x) = e^x$, η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο (c, e^c) είναι

   $$y - e^c = f'(c)(x - c) = e^c(x - c) \Rightarrow y = e^c x + e^c(1 - c),$$

   κατά συνέπεια $c = 1$.

4. Αν a είναι μια πραγματική παράμετρος, εξετάστε κατά πόσον η συνάρτηση $f_a(x) = x - a \sin x$ είναι αύξουσα, φθίνουσα, ή τίποτα από τα δύο;

5. Δείξτε ότι $|\cos 2x - \cos 2y| \le 2|x-y|$.

6. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του M για την οποία ισχύει $|x^3 - y^3| \le M|x-y|$ για όλα τα x, y στο διάστημα $[-2, 1]$.

Λύση

Από το Θεώρημα της μέσης τιμής για $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$ έχουμε

$$x^3 - y^3 = 3\xi^2(x-y)$$

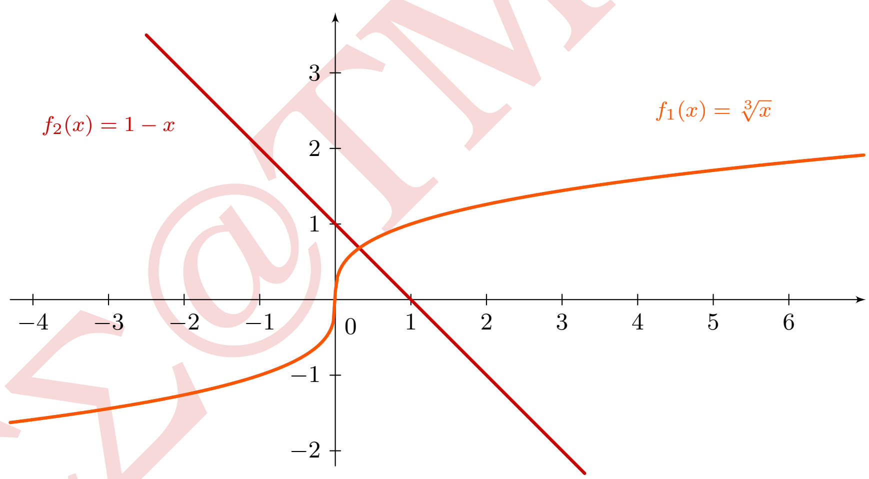
για κάποιο ξ μεταξύ x και y, που εξαρτάται από το x και από το y, άρα για κάποιο ξ, στο $[-2, 1]$, επομένως

$$\begin{aligned} |x^3 - y^3| &= 3\xi^2|x-y| \\ &\le 3\Big(\max_{-2\le\xi\le1} \xi^2\Big)|x-y| \qquad \text{(ώστε να ισχύει για όλα τα } x, y) \\ &= 3(-2)^2|x-y|, \end{aligned}$$

άρα το ελάχιστο M για το οποίο ισχύει η ανισότητα είναι ίσο με $3(-2)^2 = 12$.

Σημειώστε ότι για $M = 13$ η ανισότητα ισχύει, ενώ για $M = 11$ δεν ισχύει για όλα τα x και y στο $[-2, 1]$ (γιατί;).

7. (α΄) Δείξτε ότι η εξίσωση $\sqrt[3]{x} = 1 - x$ έχει ακριβώς μία ρίζα στους πραγματικούς αριθμούς και δώστε ένα λογικό διάστημα το οποίο την περιέχει.



(β΄) Αν $0 < a < b$ και $x, y \in [a, b]$, να δειχτεί ότι

$$\frac{|y-x|}{3\sqrt[3]{b^2}} \le |\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{x}| \le \frac{|y-x|}{3\sqrt[3]{a^2}}.$$

Λύση

(α΄) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x} + x - 1$ είναι συνεχής και παρατηρούμε ότι $f(0) = -1$ και $f(1) = 1$, κατά συνέπεια από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $f(x_0) = 0$, ισοδύναμα $\sqrt[3]{x_0} = 1 - x_0$. Δείχνουμε μοναδικότητα της ρίζας αποδεικνύοντας ότι η f είναι μονότονη συνάρτηση. Για $x \neq 0$ υπολογίζουμε

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} + 1 = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1 > 0,$$

κατά συνέπεια η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Αν $x<0$, τότε

$$\sqrt[3]{x}+x<0 \Rightarrow \sqrt[3]{x}+x-1<-1 \Rightarrow f(x)<f(0),$$

ενώ αν $x>0$, τότε

$$\sqrt[3]{x}+x>0 \Rightarrow \sqrt[3]{x}+x-1>-1 \Rightarrow f(x)>f(0),$$

συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, οπότε η $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$ εντοπισμένη στο διάστημα $(0,1)$.

8. Προσεγγίστε την $f(x)=\sqrt{1+x}$ με το σχετικό πολυώνυμο Taylor δεύτερου βαθμού στο $x=0$, και εκτιμήστε την ακρίβεια της προσέγγισης όταν $-1/2\le x\le 1/2$.

Λύση

Από τον τύπο του Taylor έχουμε

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}x^3=P_2(x)+R_2(x)$$

για κάποιο $\xi=\xi(n,x)$ μεταξύ 0 και x. Στη συνέχεια υπολογίζουμε

$$\begin{array}{llll} f(x)=(1+x)^{1/2} & f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} & f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2} & f'''(x)=\frac{3}{8}(1+x)^{-5/2} \\ f(0)=1 & f'(0)=\frac{1}{2} & f''(0)=-\frac{1}{4} & f'''(\xi)=\frac{3}{8(1+\xi)^{5/2}}, \end{array}$$

οπότε το πολυώνυμο Taylor δεύτερου βαθμού, στο 0, είναι

$$P_2(x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2,$$

έτσι για x κοντά στο 0 είναι

$$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2.$$

Την ακρίβεια της προσέγγισης εκτιμά το υπόλοιπο $R_2(x)$, αφού $f(x)-P_2(x)=R_2(x)$, έτσι

$$\left|\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2\right)\right|=\left|\frac{3x^3}{8(1+\xi)^{5/2}3!}\right|\le\frac{(1/2)^3}{16(1-1/2)^{5/2}}=\frac{1}{16\sqrt{2}}=0.0442$$

επειδή $x\in[-1/2,1/2]$ και $0<|\xi|<|x|$.

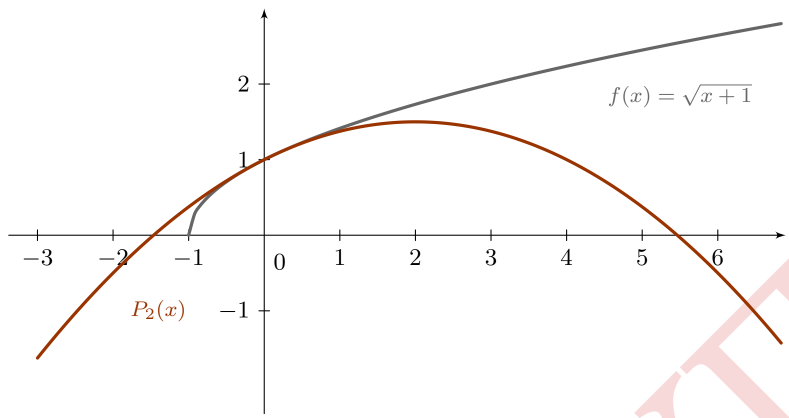
Στο σχήμα που ακολουθεί βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\sqrt{1+x}$, και $P_2(x)$.

9. **Θεώρημα (Εκτίμηση του σφάλματος αποκοπής εναλλασσόμενης σειράς)** *Έστω ότι για την εναλλασσόμενη σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ *ισχύει ότι*

$$a_1\ge a_2\ge a_3\ge\cdots\ge 0 \qquad \textit{και} \qquad \lim_{n\to\infty}a_n=0$$

και έστω $s=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$. *Αν* S_n *είναι το μερικό άθροισμα της σειράς, τότε*

$$|s-S_n|\le a_{n+1}.$$



Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$s - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + (-1)^{n+2} a_{n+3} + \cdots$$
$$= (-1)^n [a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+3} + \cdots].$$

Επειδή $a_{k+1} - a_{k+2} \geq 0$, για κάθε k, έπεται ότι

$$\begin{aligned} |s - S_n| &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots \\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots \\ &\leq a_{n+1} \end{aligned}$$

αφού κάθε παρένθεση είναι μη αρνητική ποσότητα. □

10. Προσεγγίστε την $f(x) = \log(1-x)$ με το σχετικό πολυώνυμο Taylor δεύτερου βαθμού στο $x = 0$, και εκτιμήστε την ακρίβεια της προσέγγισης όταν $-1/2 \leq x \leq 1/2$.

11. Πόσο είναι το μέγιστο δυνατό σφάλμα στην προσέγγιση

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

όταν $-0.3 \leq x \leq 0.3$.

Λύση

Το άθροισμα που προσεγγίζει το $\sin x$ είναι το πολυώνυμο Taylor, βλέπε τυπολόγιο. Επειδή το ανάπτυγμα είναι εναλλασσόμενη σειρά για $x \neq 0$, έχουμε ότι

$$\text{σφάλμα} = \left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right) \right| \leq \left| \frac{x^7}{7!} \right| \leq \frac{0.3^7}{7!}.$$

12. Δείξτε ότι αν $n \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει $\delta_n \in (0,1)$ ώστε

$$\sqrt[n]{e} - \sqrt[n+1]{e} = \frac{e^{\delta_n}}{n(n+1)}.$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = e^x$.

13. Γνωρίζουμε ότι

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_n(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

Αποδεικνύεται ότι (βλέπε μπλε Θεώρημα σχετικά με το σφάλμα αποκοπής εναλλασσόμενης σειράς)

$$|R_n(x)| \leq \left| \frac{x^{2(n+1)+1}}{2(n+1)+1} \right| = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

(α΄) Να βρεθεί το μέγιστο σφάλμα της προσέγγισης

$$\arctan x \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}, \qquad \text{στο διάστημα} \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

(β΄) Να βρεθεί το ελάχιστο n για το οποίο

$$|\arctan x - P_n(x)| \leq \frac{1}{10^3}, \qquad \text{στο διάστημα} \quad -1 \leq x \leq 1.$$

(γ΄) Να υπολογισθεί το όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x}$$

Λύση

(α΄) Προσεγγίζουμε την συνάρτηση με πολυώνυμο βαθμού $5 = 2 \cdot 2 + 1$, κατά συνέπεια

$$\left| \arctan x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right) \right| \leq \frac{|x|^{2 \cdot 2+3}}{2 \cdot 2+3}, \qquad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$\leq \frac{(1/2)^7}{7}$$
$$= \frac{1}{896}$$

(β΄) Αναζητάμε το ελάχιστο n για το οποίο

$$|\arctan x - P_n(x)| = |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{10^3}, \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

Ισοδύναμα

$$\frac{1}{2n+3} \leq \frac{1}{10^3} < \frac{1}{2(n-1)+3}$$
$$2(n-1)+3 < 10^3 \leq 2n+3$$
$$n-1 < \frac{10^3-3}{2} \leq n$$
$$n-1 < 498.5 \leq n$$

Επομένως $n = 499$.

(γ΄) Από την αρχική ανισότητα στο (α΄) διαιρώντας με $x \neq 0$ βρίσκουμε

$$\left|\frac{\arctan x}{x} - \left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5}\right)\right| \leq \frac{|x|^6}{7}, \qquad -1 \leq x \leq 1$$

οπότε παίρνοντας το όριο του $x \to 0$ βρίσκουμε

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{\arctan x}{x} - \left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5}\right)\right| \leq \lim_{x\to 0}\frac{|x|^6}{7}$$
$$\left|\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} - 1\right| \leq 0$$

ισοδύναμα

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = 1.$$

14. Δείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n υπάρχει πραγματικός αριθμός $\delta_n \in (0,1)$ ώστε

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n/(n+\delta_n)}. \tag{1}$$

Γράφοντας

$$\frac{n}{n+\delta_n} = 1 - \frac{\delta_n}{n+\delta_n}$$

βλέπουμε τον τρόπο με τον οποίο η αύξουσα ακολουθία στο αριστερό μέλος της (1) συγκλίνει στον αριθμό e.

Λύση

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= e^{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = e^{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\
&= e^{n\log\frac{n+1}{n}} \\
&= e^{n(\log(n+1)-\log n)} \\
&= e^{n((n+1)-n)\frac{1}{\xi_n}} && (\text{από ΘΜΤ με } n < \xi_n < n+1) \\
&= e^{n/(n+\delta_n)} && (\xi_n = n + \delta_n \quad \text{με } 0 < \delta_n < 1).
\end{aligned}$$