Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

2022–23

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Σειρές και συναρτήσεις

1. Να δειχθεί ότι κάθε μία από τις ακολουθίες που ορίζονται με τις σχέσεις

   (α΄) $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}, \quad a_1 = 1$

   (β΄) $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}, \quad a_1 = 1$

   είναι αύξουσα και φραγμένη. Να υπολογισθεί το όριο κάθε μίας ακολουθίας.

Λύση

(α΄) Παρατηρούμε ότι

$$a_2 = \sqrt{1 + a_n} = \sqrt{1+1} > 1 = a_1.$$

Υποθέτουμε ότι $a_k < a_{k+1}$ για κάποιο k, τότε από την υπόθεση της επαγωγής έπεται ότι

$$a_{k+1} = \sqrt{1 + a_k} < \sqrt{1 + a_{k+1}} = a_{k+2},$$

κατά συνέπεια $a_n < a_{n+1}$ για όλα τα n. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η ακολουθία είναι φραγμένη.

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= \sqrt{2} = 2^{1/2} \\
a_3 &= \sqrt{1+\sqrt{2}} < \sqrt{2\sqrt{2}} = 2^{1/2}2^{1/4} = 2^{1/2+1/2^2} < 2 \\
a_4 &< \sqrt{1 + 2^{1/2+1/2^2}} < \sqrt{2 \cdot 2^{1/2+1/2^2}} = 2^{1/2+1/2^2+1/2^4} < 2
\end{aligned}$$

Ισχυριζόμαστε ότι $a_n < 2$. Ο ισχυρισμός ισχύει για $n = 1$ όπως είδαμε. Αν $a_k < 2$, τότε

$$a_{k+1} = \sqrt{1 + a_k} < \sqrt{1+2} < \sqrt{4} = 2,$$

συνεπώς $0 < a_n < 2$, για όλα τα n. Η ακολουθία ως αύξουσα και φραγμένη συγκλίνει, και αν α είναι το όριο της σειράς, τότε

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + a_n} = \sqrt{1 + \lim_{n\to\infty} a_n}$$

ισοδύναμα

$$\alpha = \sqrt{1+\alpha} \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

κατά συνέπεια, αφού $a_n > 0$, έπεται ότι

$$a_n \to \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \text{καθώς } n \to \infty.$$

2. Συμπληρώστε την απάντηση ή κυκλώστε ανάλογα

   (α΄) Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+2|a_n|}$ συγκλίνει. Σ Λ (β΄) Αν $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Σ Λ

(γ΄) Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{|a_n|}$ συγκλίνει. Σ Λ

(δ΄) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\sin n)}{n^p}$ συγκλίνει αν $p > 1$. Σ Λ

(ε΄) $\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{1}{1-1/2} = 2$

(ϛ΄) $\sum_{n=0}^{\infty} \pi^{-n/2} =$

(ζ΄) Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{a^2+1}\right)^{-n}$ συγκλίνει αν και μόνο αν

3. Να βρεθεί η σχέση μεταξύ p και q ώστε η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n^q+1}$$

να συγκλίνει.

4. Δείξτε ότι αν $a_n \geq 0$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ συγκλίνει.

5. Η ακολουθία **Fibonacci** $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

Δείξτε ότι

(α΄) $\frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = \frac{1}{f_{n-1}f_n} - \frac{1}{f_n f_{n+1}}$

(β΄) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = 1$

(γ΄) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}f_{n+1}} = 2$

6. Σε κάθε μια από τις σειρές να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες η σειρά συγκλίνει και στη συνέχεια να βρεθεί το άθροισμα της σειράς

(α΄) $\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n$ (β΄) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{5^{n+1}}$ (γ΄) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin^n x$

7. Έστω ότι $a_n > 0$ για κάθε n, δείξτε ότι αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n)$ συγκλίνει.

8. Εάν $a_n > 0$ και $b_n > 0$ για όλα τα n και οι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν είναι αλήθεια ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει;

9. Δείξτε ότι

(α') $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)} = \frac{1}{a}, \qquad a > 0.$

(β') $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}.$

Λύση

(β') Βρίσκουμε ότι

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

έτσι

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{2}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right)\right]$$

ή

$$\begin{aligned} 2S_N = 1 &+ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N} \\ &- \frac{2}{2} - \frac{2}{3} - \frac{2}{4} - \cdots - \frac{2}{N} - \frac{2}{N+1} \\ &+ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} \end{aligned}$$

(η πρώτη γραμμή περιέχει τον πρώτο όρο κάθε παρένθεσης, η δεύτερη τον δεύτερο και η τρίτη τον τρίτο), συνεπώς

$$S_N = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right) \to \frac{1}{4}$$

καθώς $N \to \infty$ που είναι το ζητούμενο.

10. Εξετάστε κατά πόσο η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$$

συγκλίνει. **Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι $\sqrt[n]{n} \to 1$ και συγκρίνετε με γνωστή σειρά.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $n^{1+1/n} = n\sqrt[n]{n}$ και γνωρίζουμε ότι $\sqrt[n]{n} \to 1$, καθώς $n \to \infty$ (4η Διάλεξη, σελ. 19), κατά συνέπεια για κάποιο N είναι

$$1 < \sqrt[n]{n} < \frac{3}{2}, \qquad \text{για } n \geq N,$$

αφού $\sqrt[n]{n} > 1$, έτσι για $n \geq N$

$$\frac{2}{3} < \frac{1}{\sqrt[n]{n}} < 1 \Rightarrow \frac{2}{3}\frac{1}{n} < \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} < \frac{1}{n},$$

επομένως

$$\frac{2}{3}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_{n=N}^{\infty}\frac{2}{3n}\leq\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\leq\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Η σειρά στο αριστερό μέλος αποκλίνει, είναι η αρμονική σειρά, κατά συνέπεια και η δεσπόζουσα σειρά, η δοσμένη, αποκλίνει.

11. Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{n^p+1}-\sqrt{n^p}\right)$$

συγκλίνει αν $p>2$ και αποκλίνει για $p=2$.

12. Εξετάστε κατά πόσο κάθε μια από τις σειρές συγκλίνει, ή αποκλίνει

(α΄) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+10}$

(β΄) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+10}}$

(γ΄) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}}$

(δ΄) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+3}$

(ε΄) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^2+n^4}$

(ϛ΄) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+n^4}$

(ζ΄) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1}$

(η΄) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-2^n}$

(ϑ΄) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n-n^e}$

Λύση

(α΄) Για $n\geq 4$

$$\frac{1}{n^2+n^2}<\frac{1}{n^2+10}<\frac{1}{n^2}\Rightarrow\frac{1}{2n^2}<\frac{1}{n^2+10}<\frac{1}{n^2}$$

επομένως

$$\frac{1}{2}\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{2n^2}\leq\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n^2+10}\leq\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

το αριστερό και το δεξί μέλος της τελευταίας ανισότητας είναι p-σειρά με $p=2>1$, συνεπώς συγκλίνει, άρα και η δοσμένη σειρά συγκλίνει.

(β΄) Για $n\geq 4$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+10}}<\frac{1}{\sqrt{n^2}}\Rightarrow\frac{1}{2}\frac{1}{n}<\frac{1}{\sqrt{n^2+10}}<\frac{1}{n}$$

συνεπώς η δοσμένη σειρά ¨συμπεριφέρεται¨ όπως η αρμονική σειρά, άρα αποκλίνει.

(δ΄) Για $n\geq 2$

$$\frac{\sqrt{n}}{n^2+n^2}<\frac{\sqrt{n}}{n^2+3}<\frac{\sqrt{n}}{n^2}\Rightarrow\frac{1}{2}\frac{1}{n^{3/2}}<\frac{\sqrt{n}}{n^2+3}<\frac{1}{n^{3/2}}$$

Τα άνω και κάτω φράγματα είναι συγκλίνουσα σειρά, p-σειρά με $p=3/2>1$, συνεπώς η δοσμένη σειρά συγκλίνει.

(η΄) Είναι $3^n>3^n-2^n$ και ψάχνουμε c ώστε $3^n-2^n\geq c2^n$.

$$3^n-2^n\geq c2^n\Leftrightarrow 3^n\geq(c+1)2^n\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^n\geq(c+1)$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει για κάθε n για $c+1=3/2$, ισοδύναμα για $c=1/2$, έτσι

$$\frac{1}{3^n}<\frac{1}{3^n-2^n}<2\frac{1}{2^n}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-2^n}\leq 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

τα φράγματα είναι γεωμετρικές σειρές με λόγο μικρότερο του 1, άρα συγκλίνουν και (γιατί;[1])

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - 2^n} \leq 2$$

άρα η σειρά συγκλίνει.

(θ') $e^n - n^e > 0 \Leftrightarrow n > e \log n$ για κάθε n, βλέπε Σχήμα 1. Έτσι οι όροι της σειράς είναι θετικοί, επιπλέον

$$0 \leq \frac{1}{e^n - n^e} < \frac{1}{e^n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

επομένως

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n - n^e} < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n.$$

Η σειρά στο δεξί μέλος είναι γεωμετρική με λόγο μικρότερο του 1, άρα συγκλίνει, επομένως και η δοσμένη σειρά συγκλίνει.

13. Εξετάστε κατά πόσο κάθε μια από τις σειρές συγκλίνει απολύτως, συγκλίνει υπό συνθήκη, ή αποκλίνει.

(α') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}}$

(β') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^{n+1}}$

(γ') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^3}$

(δ') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

(ε') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-10)^n}$

(ϛ') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(ζ') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(η') $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$

(θ') $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-2n}{3+4n}\right)^n$

(ι') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n n^2}{(n+2)!}$

(ια') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!10^n}$

(ιβ') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\tan^{-1} n)^n}$

(ιγ') $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\log n)^n}$

(ιδ') $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n+1}{n}$

(ιε') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - 1}$

Λύση

(α') Παρατηρούμε ότι

$$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{n^{3/2}}$$

και επειδή $p = 3/2 > 1$ η δοσμένη σειρά συγκλίνει απολύτως, άρα συγκλίνει.

[1] **Μια παρατήρηση για τη γεωμετρική σειρά:** Για $a \in \mathbb{R}$ ή $a \in \mathbb{C}$

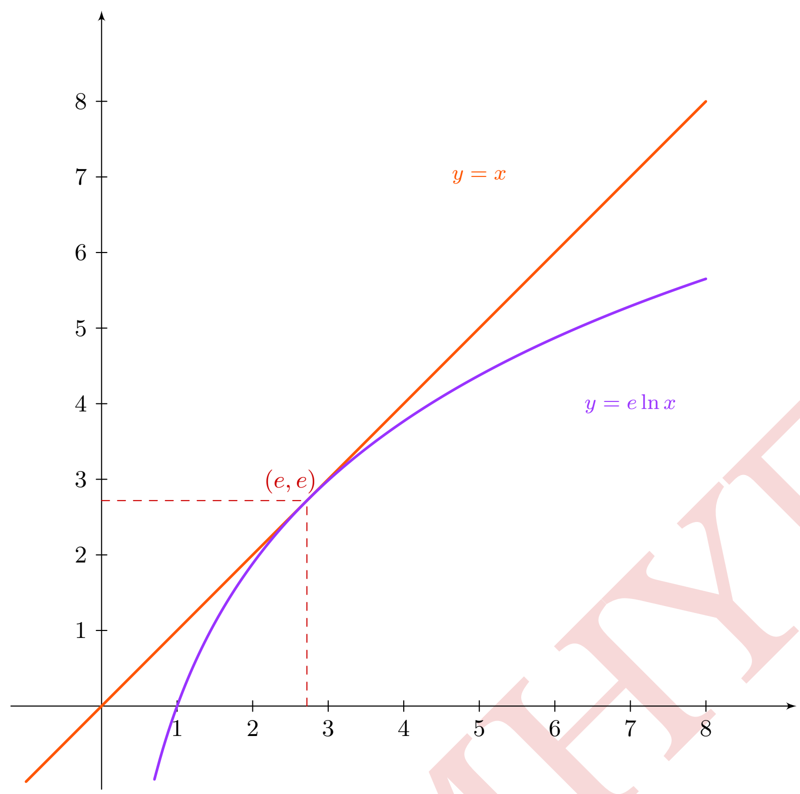
$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

και αν $|a| < 1$, τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a^n = \lim_{N\to\infty} (1 + a + a^2 + \cdots + a^N) = \lim_{N\to\infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1-a},$$

αφού $a^{N+1} \to 0$. Έτσι για σταθερό φυσικό αριθμό k

$$a^k + a^{k+1} + a^{k+2} + \cdots = a^k(1 + a + a^2 + \cdots) = a^k \frac{1}{1-a} = \frac{a^k}{1-a}.$$



Σχήμα 1: Άσκηση 12 (θ′): Σύγκριση μεταξύ $\ln e^x$ και $\ln x^e$.

(β′)

$$\left|\frac{(-2)^n}{3^{n+1}}\right| = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

και επειδή $2/3 < 1$ πρακτικά έχουμε συγκλίνουσα γεωμετρική σειρά, έτσι η σειρά συγκλίνει απολύτως, άρα συγκλίνει και

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-2)^n}{3^{n+1}}\right| = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\frac{2/3}{1-2/3} = \frac{2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\frac{-2/3}{1+2/3} = -\frac{2}{15}$$

(ζ) Εφαρμόζουμε το κριτήριο του λόγου

$$\frac{[(n+1)!]^2/[2(n+1)]!}{(n!)^2/(2n)!} = \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2\frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n+1}{4n+2} \to \frac{1}{4} < 1,$$

άρα η σειρά συγκλίνει (και απολύτως αφού οι όροι είναι θετικοί).

(ιβ′) Εφαρμόζουμε το κριτήριο της ρίζας

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{(\tan^{-1}n)^n}\right|} = \frac{1}{\tan^{-1}n} \to \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} < 1$$

κατά συνέπεια η σειρά συγκλίνει απολύτως, επομένως συγκλίνει.

14. Να υπολογισθούν οι ποσότητες $\cos^{-1}(1/2)$ και $\tan(\arccos(1/3))$.

15. Να απλοποιηθεί η έκφραση $\cos(\tan^{-1} x)$.

16. Δείξτε ότι $\cos^{-1}(-x) + \cos^{-1} x = \pi$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.

Λύση

Αν $\theta = \cos^{-1} x$ (στο $[0, \pi]$ η $\cos$ είναι ένα-προς-ένα), τότε $0 \leq \theta \leq \pi$ και $\cos\theta = x$, επομένως

$$-x = -\cos\theta = \cos(\pi - \theta)$$

και $\pi - \theta \in [0, \pi]$ συνεπώς

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \theta = \pi - \cos^{-1} x \Rightarrow \cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi.$$