ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

2022–23

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Μιγαδικοί αριθμοί και ακολουθίες

1. Να βρεθούν οι έκτες ρίζες του $w = 1+i$, δηλαδή οι z ώστε $z^6 = 1+i$, ισοδύναμα οι λύσεις της εξίσωσης $z^6 - (1+i) = 0$.

2. Να βρεθεί η εκθετική μορφή καθενός από τους αριθμούς

   (α΄) $z = 3$ (β΄) $z = 2+2i$ (γ΄) $z = \pi i$ (δ΄) $z = -1 - i\sqrt{3}$

3. Δείξτε ότι $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.

Λύση

Αν $z = x + iy$, τότε $\mathbf{e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)}$, επομένως

$$\begin{aligned}\overline{e^z} = \overline{e^x(\cos y + i\sin y)} &= e^x\overline{\cos y + i\sin y}\\ &= e^x(\cos y - i\sin y)\\ &= e^x(\cos(-y) + i\sin(-y))\\ &= e^{x-iy}\\ &= e^{\overline{z}}\end{aligned}$$

4. Να βρεθούν όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει $\sin z = 1$.

Λύση

Από τον ορισμό έχουμε ότι για $z = x + iy$ είναι

$$\begin{aligned}\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} &= \frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i}\\ &= \frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)}{2i}\\ &= \frac{(e^{-y} - e^{y})\cos x}{2i} + \frac{i(e^{-y} + e^{y})\sin x}{2i}\\ &= \frac{e^y + e^{-y}}{2}\sin x + i\frac{e^y - e^{-y}}{2}\cos x \qquad \left(\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i\right)\end{aligned}$$

κατά συνέπεια

$$\sin z = 1 \Leftrightarrow \begin{cases}(e^y + e^{-y})\sin x = 2\\ (e^y - e^{-y})\cos x = 0\end{cases}$$

Από τη δεύτερη εξίσωση παίρνουμε

$$e^y = e^{-y} \Leftrightarrow y = 0 \qquad \text{ή} \qquad \cos x = 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

και από την πρώτη είτε για $y = 0$, είτε για $x = 2k\pi \pm \pi/2$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Επομένως οι λύσεις της $\sin z = 1$ είναι οι $z = x = 2k\pi + \pi/2$ όπως ακριβώς στους πραγματικούς αριθμούς, δεν υπάρχουν δηλαδή νέες μιγαδικές λύσεις της εξίσωσης.

5. Έστω ότι η ακολουθία a_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ είναι φραγμένη. Να δειχθεί ότι

   (α') Η ακολουθία a_n/n συγκλίνει στο μηδέν.

   (β') Εάν η ακολουθία b_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ συγκλίνει στο μηδέν, τότε η $a_n b_n$ συγκλίνει στο μηδέν.

6. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $a_n = a^n$, $n \in \mathbb{N}$, με $0 < a < 1$ συγκλίνει και να βρεθεί το όριο. **Υπόδειξη**: $a = 1/(1+\delta)$, όπου $\delta > 0$.

7. Να εξετασθούν ως προς τη σύγκλιση οι ακολουθίες και στην περίπτωση σύγκλισης να βρεθεί το όριο

   (α') $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$

   (β') $a_n = \dfrac{n+1}{n+\sqrt{n}}$

   (γ') $a_n = \dfrac{n^{\sqrt{2}}}{\sqrt{n}}$

   (δ') $a_n = \dfrac{n^e}{e^n}$

   (ε') $a_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n + 1}$

   (ϛ') $a_n = \dfrac{2^n + 1}{3^n - 1}$

8. ♣ Θυμίζουμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \qquad a \neq 1.$$

   Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n, \qquad a \in \mathbb{R}$$

   Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία $(s_n)_{n=1}^{\infty}$. **Υπόδειξη**: Θεωρήστε ξεχωριστά τις περιπτώσεις $|a| < 1$, $|a| = 1$, $|a| > 1$.

9. ♣ Έστω P_n ένα κανονικό πολύγωνο με n πλευρές εγγεγραμμένο στον μοναδιαίο κύκλο. Αν a_n είναι η περίμετρος του P_n και A_n το εμβαδόν του P_n δείξτε ότι

   (α') $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2\pi =$ μήκος της περιφέρειας

   (β') $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A_n = \pi =$ εμβαδόν του δίσκου

   Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τον νόμο του συνημιτόνου στο ισοσκελές τρίγωνο που αντιστοιχεί σε κάθε πλευρά του n-γώνου και δείξτε ότι

$$a_n = 2n \sin\frac{\pi}{n}.$$

10. ♣ Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = \sqrt[n]{a}$, $n \in \mathbb{N}$, όπου $a > 0$. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Λύση

Θεωρούμε τις περιπτώσεις $a = 1$, $a > 1$, και $a < 1$.

(i) $a = 1$. Τότε $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{1} = 1$, άρα

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

(ii) $a > 1$. Τότε $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{1} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$a_n = \sqrt[n]{a} = 1 + r_n, \quad r_n > 0.$$

Υψώνοντας αρχικά στη n–οστη δύναμη και κάνοντας χρήση της ανισότητας του Bernoulli υπολογίζουμε

$$a = (1 + r_n)^n \geq 1 + nr_n > nr_n \Rightarrow 0 < r_n < \frac{a}{n}$$

απ' όπου έπεται ότι $r_n \to 0$, καθώς $n \to \infty$. Έτσι

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} (1 + r_n) = 1.$$

(iii) $a < 1$. Τότε $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{1} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$a_n = \sqrt[n]{a} = \frac{1}{1 + s_n}, \quad s_n > 0.$$

Όπως στη προηγούμενη περίπτωση υπολογίζουμε

$$a = \frac{1}{(1 + s_n)^n} \leq \frac{1}{1 + ns_n} < \frac{1}{ns_n} \Rightarrow 0 < s_n < \frac{1}{a}\frac{1}{n}$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $s_n \to 0$, καθώς $n \to \infty$, επομένως

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + s_n} = 1.$$

11. Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$, $n \in \mathbb{N}$, όπου $0 < a \leq b$. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = b$.

12. Να προσδιοριστεί η τιμή του πραγματικού αριθμού r έτσι ώστε η ακολουθία

$$a_n = \frac{1 + \sqrt{n}}{(n + 1)^r}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

(i) Να συγκλίνει στο μηδέν. (ii) Να συγκλίνει σε αριθμό διάφορο του μηδενός. (iii) Να αποκλίνει.

13. Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία με όρους $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

14. Αν p και r είναι πραγματικοί αριθμοί με $r > 1$, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{r^n} = 0.$$

Λύση

Θεωρούμε τις περιπτώσεις $p \leq 0$, και $p > 0$.

(i) $p \leq 0$. Τότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{r^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-p} r^n} = 0,$$

αφού $-p \geq 0$.

(ii) $p > 0$. Έστω $r = 1 + \delta$ με $\delta > 0$, από το δυωνυμικό θεώρημα έχουμε

$$r^n = (1 + \delta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \delta^k$$

και επειδή οι όροι του αθροίσματος είναι θετικοί βρίσκουμε

$$\begin{aligned} r^n &\geq \frac{n!}{k!(n-k)!}\delta^k & k = 0, 1, \ldots, n \\ &= \frac{(n-k+1)\cdots(n-1)n}{k!}\delta^k & k = 0, 1, \ldots, n \\ &> \frac{(n-k+1)^k}{k!}\delta^k & k = 0, 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια

$$\frac{n^p}{r^n} < \frac{k! n^p}{\delta^k (n-k+1)^k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n \tag{1}$$

Επιλέγουμε N μεγάλο και k ώστε

$$\frac{N}{2} + 1 \geq k > p,$$

τότε για $n \geq N$ έχουμε

$$\frac{n}{2} + 1 \geq \frac{N}{2} + 1 \geq k \Rightarrow n - k + 1 \geq \frac{n}{2}$$

επομένως από την (1) βρίσκουμε

$$\frac{n^p}{r^n} < \frac{k!}{\delta^k}\frac{n^p}{(n/2)^k} = \frac{k! 2^k}{\delta^k}\frac{1}{n^{k-p}}, \qquad n \geq N. \tag{2}$$

Από την (2) έπεται το συμπέρασμα καθότι $k - p > 0$ και η ακολουθία στο δεξί μέλος τείνει στο μηδέν καθώς $n \to \infty$.

15. Να δειχθεί ότι κάθε μία από τις ακολουθίες που ορίζονται με τις σχέσεις

    (αʹ) $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}, \quad a_1 = 1$

    (βʹ) $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}, \quad a_1 = 1$

    είναι αύξουσα και φραγμένη. Να υπολογισθεί το όριο κάθε μίας ακολουθίας.

16. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $a_{n+1} = \sqrt{4a_n + 3}, \quad a_1 = 5$ είναι συγκλίνουσα και να βρεθεί το όριό της.

17. Δείξτε ότι

    $$\log n \leq n - 1$$

    για κάθε θετικό ακέραιο n. Κάνοντας χρήση αυτού του αποτελέσματος εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία με όρους $a_n = \sqrt{\log n}$.

18. Να βρεθεί, εφόσον υπάρχει, το όριο κάθε μιας από τις ακολουθίες

    (αʹ) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$ (γʹ) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ (εʹ) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{n}$

    (βʹ) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{1/\sqrt{n}}$ (δʹ) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{1/n^2}$ (ϛʹ) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}$

19. Εάν p είναι πραγματικός αριθμός να υπολογισθεί το όριο

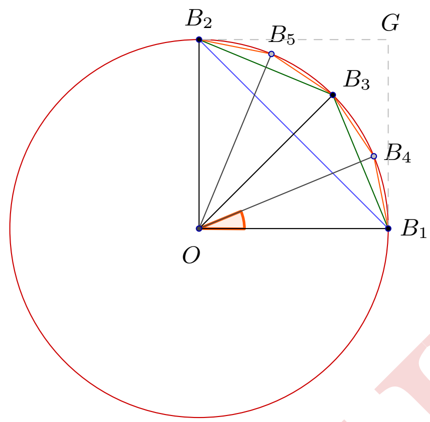
    $$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^p}$$

    για τις διάφορες τιμές του p.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Θεωρούμε τον μοναδιαίο κύκλο (Σχήμα 1) και ενδιαφερόμαστε να ορίσουμε

1. Το μήκος της περιφέρειας του κύκλου, και
2. Το εμβαδόν της περιοχής που περικλείει ο κύκλος, τον μοναδιαίο δίσκο.



Σχήμα 1: Μοναδιαία περιφέρεια και μοναδιαίος δίσκος

Ας δούμε τι συμβαίνει στο ένα τέταρτο του δίσκου. Πολλαπλασιάζοντας επί 4 βλέπουμε τι συμβαίνει στον κύκλο και στον δίσκο. Ξεκινάμε με την ορθή γωνία διχοτομούμε και συνεχίζουμε διχοτομώντας.

Αν με $L(B_iB_j)$ συμβολίσουμε το μήκος του τμήματος B_iB_j παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} L(B_1B_2) &< L(B_1B_3) + L(B_3B_2) \\ &< L(B_1B_4) + L(B_4B_3) + L(B_3B_5) + L(B_5B_2) \\ &\vdots \\ &< 2 = L(B_1G) + L(GB_2) \end{aligned}$$

Αν με $A(B_iOB_j)$ συμβολίσουμε το εμβαδόν του τριγώνου B_iOB_j παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} A(B_1OB_2) &< A(B_1OB_3) + A(B_3OB_2) \\ &< A(B_1OB_4) + A(B_4OB_3) + A(B_3OB_5) + A(B_5OB_2) \\ &\vdots \\ &< 1 = \text{εμβαδόν του τετραγώνου } B_1OB_2G \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι τόσο η ακολουθία των περιμέτρων των κανονικών πολυγώνων όσο και αυτή των εμβαδών είναι αύξουσα και φραγμένη, κατά συνέπεια κάθε μια συγκλίνει. Σημειώνουμε ότι το κάθε όριο είναι το supremum φραγμένου συνόλου πραγματικών αριθμών. Το όριο της ακολουθίας των περιμέτρων το ορίζουμε ως μήκος της περιφέρειας και το όριο της ακολουθίας των εμβαδών ως εμβαδόν του δίσκου. Ορίζουμε ως 2π το μήκος της μοναδιαίας περιφέρειας.