Γενικά Μαθηματικά Ι

Διάλεξη 15

Εξισώσεις 1ης τάξης
μοντέλα
το Θεώρημα Ύπαρξης και Μοναδικότητας

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

18 Μαΐου 2023

Εξισώσεις Bernoulli

Οι Εξισώσεις **Bernoulli** είναι της μορφής

$$y' + p(t)y = q(t)y^{\alpha}, \tag{1}$$

όπου α είναι ένας πραγματικός αριθμός. Παρατηρούμε ότι εάν $\alpha = 0, 1$ τότε η (1) είναι μία γραμμική εξίσωση, η οποία στη περίπτωση $\alpha = 1$ είναι επιπλέον χωριζομένων μεταβλητών. Παρατηρούμε επίσης ότι για $\alpha > 0$ η $y = 0$ είναι μία λύση της (1). Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $\alpha \neq 0, 1$. Εάν $y \neq 0$ η (1) γράφεται

$$y^{-\alpha}y' + p(t)y^{1-\alpha} = q(t),$$

και η αλλαγή μεταβλητής

$$v = y^{1-\alpha}, \tag{2}$$

οδηγεί μετά από πράξεις στη γραμμική εξίσωση

$$v' + (1-\alpha)p(t)v = (1-\alpha)q(t). \tag{3}$$

Με χρήση λοιπόν του μετασχηματισμού (2) μία εξίσωση Bernoulli ανάγεται σε μία γραμμική εξίσωση.

Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση

$$t^2y' + 2ty - y^3 = 0, \quad t > 0.$$

Γράφοντας τη δοσμένη εξίσωση στη μορφή

$$y' + \frac{2}{t}y - \frac{1}{t^2}y^3 = 0,$$

διαπιστώνεται ότι είναι μία εξίσωση Bernoulli με $\alpha = 3$, και ότι η $y = 0$ είναι μία λύση της. Αν τώρα $y \neq 0$, διαιρώντας την εξίσωση με y^3 βρίσκουμε

$$y^{-3}y' + \frac{2}{t}y^{-2} - \frac{1}{t^2} = 0,$$

και θέτοντας, όπως στην (2), $v = y^{1-3} = y^{-2}$ προκύπτει η γραμμική εξίσωση

$$v' + \frac{-4}{t}v + \frac{2}{t^2} = 0, \quad t > 0.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Πολλαπλασιάζοντας τώρα με τη συνάρτηση (ολοκληρωτικό παράγοντα)

$$\mu(t) = \exp\left(\int_1^t \frac{-4}{s}\, ds\right) = \frac{1}{t^4},$$

έχουμε

$$\left(\frac{1}{t^4} v\right)' = \frac{-2}{t^4} \Rightarrow \frac{1}{t^4} v = \frac{2}{3t^3} + c,$$

οπότε

$$v = \frac{2}{3} t + ct^4,$$

όπου c είναι μία αυθαίρετη σταθερά. Επιστρέφοντας στην αρχική μεταβλητή y διά μέσου της $y = \pm 1/\sqrt{v}$ τελικά έχουμε τη γενική λύση της αρχικής εξίσωσης να είναι η

$$y = \pm\sqrt{\frac{3}{2t + Ct^4}}.$$

Άσκηση

Έστω a ένας πραγματικός αριθμός. Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση f, της οποίας η μέση τιμή σε κάθε διάστημα $[0, x]$, με $x \neq 0$, είναι ίση με $(f(x) - a)/x$.

Άσκηση

Να προσδιοριστούν όλες οι συναρτήσεις $f : [0, a] \to \mathbb{R}$, $a > 0$, των οποίων η μέση τιμή σε κάθε διάστημα $[0, x]$, $x > 0$, είναι ίση με το γεωμετρικό μέσο των $f(0)$ και $f(x)$.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Οι ζητούμενες συναρτήσεις f ικανοποιούν τη σχέση

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(s)\,ds = \sqrt{f(0)f(x)}.$$

Διακρίνετε τις περιπτώσεις $f(0) = 0$ και $f(0) \neq 0$.

Το πρόβλημα αυτό εμφανίστηκε στο W. L. Putnam Mathematics Competition το 1962.

Άσκηση

Η ανάπτυξη ενός κυττάρου εξαρτάται από τη ροή θρεπτικών ουσιών μέσω της επιφανείας του. Αν $W(t)$ είναι το βάρος του κυττάρου τη χρονική στιγμή t, $W(0) = W_0$, και αν υποθέσουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής του βάρους είναι ανάλογος του εμβαδού της επιφάνειας του κυττάρου

1. Δείξτε ότι
$$\frac{dW}{dt} = \alpha W^{2/3}, \qquad \alpha = \text{κατάλληλη σταθερά.}$$
2. Να βρεθεί το βάρος του κυττάρου κάθε στιγμή t.

Υπόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το κύτταρο είναι σφαιρικό. Ο όγκος V σφαίρας ακτίνας r είναι $V = 4\pi r^3/3$ και το εμβαδό επιφανείας της $S = 4\pi r^2$

Λύση.

- Αν g είναι το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας, m είναι η μάζα του κυττάρου και ρ η πυκνότητα του κυττάρου, τότε

$$W = mg = g\rho V.$$

- Από τις $V = 4\pi r^3/3$ και $S = 4\pi r^2$ βρίσκουμε $r = (3V/(4\pi))^{1/3}$ οπότε

$$S = 4\pi\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{2/3} = (4\pi)^{1/3}\left(\frac{3W}{g\rho}\right)^{2/3} = \left(\frac{6\sqrt{\pi}}{g\rho}\right)^{2/3} W^{2/3}$$

- Από την υπόθεση

$$\frac{dW}{dt} = kS = k\left(\frac{6\sqrt{\pi}}{g\rho}\right)^{2/3} W^{2/3}$$

1. Έτσι προκύπτει ο νόμος

$$\frac{dW}{dt} = \alpha W^{2/3}, \qquad \text{με } \alpha = \text{σταθερά}.$$

2. Επιλύοντας βρίσκουμε

$$\frac{dW}{dt} = \alpha W^{2/3} \Rightarrow \frac{W'}{W^2/3} = \alpha$$
$$\Rightarrow \left(3W^{1/3}\right)' = \alpha$$
$$\Rightarrow 3W^{1/3} = \alpha t + c$$
$$\Rightarrow W = \left(\frac{\alpha}{3}t + C\right)^3$$
$$\Rightarrow W(0) = W_0 = C^3$$

κατά συνέπεια η λύση της εξίσωσης είναι

$$W = \left(\sqrt[3]{W_0} + \frac{\alpha}{3}t\right)^3$$

όπου

$$\alpha = k\left(\frac{6\sqrt{\pi}}{g\rho}\right)^{2/3}.$$

Άσκηση (Ο νόμος ψύξης/θέρμανσης του Newton)

Ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας $T(t)$ ενός κτιρίου είναι ανάλογος της διαφοράς της θερμοκρασίας $M(t)$ του περιβάλλοντος και της θερμοκρασίας του κτιρίου. Έτσι θα είναι

$$\frac{dT}{dt} = K(M - T),$$

όπου K είναι μία σταθερά. Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης αν $T(0) = T_0$.

Άσκηση (Ο νόμος ακτινοβολίας του Stefan)

Σύμφωνα με το νόμο αυτό ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας ενός σώματος σε T βαθμούς της κλίμακας Kelvin σε ένα μέσο θερμοκρασίας M βαθμών της ίδιας κλίμακας είναι ανάλογος του $M^4 - T^4$, δηλαδή

$$\frac{dT}{dt} = k(M^4 - T^4),$$

όπου k είναι μία θετική σταθερά. Να λυθεί η εξίσωση.

Άσκηση (Χημικές αντιδράσεις)

Η αλληλεπίδραση ενός μορίου μίας ουσίας A με ένα μόριο της ουσίας B με αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός μορίου μιάς νέας ουσίας X, είναι μία δεύτερης τάξης χημική αντίδραση που συνήθως συμβολίζουμε με $A+B \to X$. Εάν α και β είναι οι αρχικές συγκεντρώσεις των ουσιών A και B αντίστοιχα και $x(t)$ είναι η συγκέντρωση της νέας ουσίας X τη χρονική στιγμή t, τότε ο ρυθμός που εξελίσεται η αντίδραση δίνεται από

$$\frac{dx}{dt} = k(\alpha - x)(\beta - x),$$

όπου k είναι μία θετική σταθερά. Εάν $x(0) = x_0$ να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών στις περιπτώσεις $\alpha \neq \beta$ και $\alpha = \beta$ καθώς και η συμπεριφορά της λύσης καθώς $t \to \infty$.

Θεώρημα (Picard - Lindelöf Τοπική Ύπαρξη και Μοναδικότητα)

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = f(t,y), \qquad y(t_0) = y_0 \tag{4}$$

Εάν οι συναρτήσεις f και $\partial f/\partial y$ είναι συνεχείς σε ένα ορθογώνιο το οποίο περιέχει το σημείο (t_0, y_0) τότε υπάρχει μοναδική λύση του (4) ορισμένη σε κάποιο διάστημα I το οποίο περιέχει το t_0.

Παράδειγμα

Να λυθεί το πρόβλημα

$$ty' = 2y, \qquad y(0) = 0. \tag{5}$$

Στη περίπτωση αυτή είναι $f(t,y) = 2y/t$ η οποία δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$, για την ακρίβεια δεν ορίζεται για $t = 0$. Όπως παρατηρούμε μία λύση του προβλήματος είναι η $y = 0$.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αναζητώντας άλλες λύσεις γράφουμε

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{t},$$

για $y \neq 0$ απ΄ όπου ολοκληρώνοντας παίρνουμε διαδοχικά

$$\ln|y| = 2\ln|t| + \ln|c| \Rightarrow \ln|y| = \ln|ct^2| \Rightarrow y = \pm ct^2.$$

΄ρα η εξίσωση $ty' = 2y$ έχει μία διπαραμετρική οικογένεια λύσεων

$$y = \begin{cases} c_1 t^2, & t < 0 \\ c_2 t^2, & t \geq 0, \end{cases}$$

όπου c_1 και c_2 είναι πραγματικές σταθερές. Η οικογένεια αυτή των λύσεων ικανοποιεί και την αρχική συνθήκη, οπότε έχουμε άπειρες λύσεις του (5).

Παρατήρηση

Στο σημείο αυτό θέλουμε να τονίσουμε ότι το αποτέλεσμα του Θεωρήματος ειδικά για τη μοναδικότητα της λύσης είναι τοπικό. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε το πρόβλημα

$$ty' = 2y, \qquad y(1) = 1. \tag{6}$$

Οι συναρτήσεις

$$f(t,y) = \frac{2y}{t} \qquad \text{και} \qquad f_y(t,y) = \frac{2}{t}$$

είναι συνεχείς σε κάθε ορθογώνιο που περιέχει το $(1,1)$ στο εσωτερικό του και περιέχεται στο ημιεπίπεδο $t > 0$, αλλά κάθε συνάρτηση της μονοπαραμετρικής οικογένειας

$$y = \begin{cases} ct^2, & t < 0 \\ t^2, & t \geq 0, \end{cases}$$

είναι λύση του (6). Σε μία περιοχή όμως του $t = 1$, $(1-\delta, 1+\delta)$ υπάρχει μοναδική λύση, συγκεκριμένα η $y = t^2$.

Άσκηση

Να δειχθεί ότι για κάθε $c \geq 0$ η συνάρτηση

$$y = \begin{cases} 0, & t < c \\ (t-c)^2, & t \geq c, \end{cases}$$

είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y' = 2\sqrt{|y|}, \qquad y(0) = 0.$$

Έρχεται το γεγονός αυτό σε αντίθεση με το Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση

Να βρεθούν όλες οι λύσεις του μη γραμμικού προβλήματος αρχικών τιμών

$$y' = 3y^{2/3}, \qquad y(2) = 0.$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Η εξίσωση είναι αυτόνομη.

Σχετικά με την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y' = f(t,y), \qquad y(t_0) = y_0. \tag{7}$$

περιγράφουμε ένα τρόπο απόδειξης του θεωρήματος που την ίδια στιγμή μας παρέχει και τρόπο εύρεσης μίας προσέγγισης της λύσης.
Το πρόβλημα (7) είναι ισοδύναμο με την **ολοκληρωτική εξίσωση**

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds. \tag{8}$$

Πραγματικά εάν ολοκληρώσουμε την (7) προκύπτει η (8), ενώ αν παραγωγίσουμε την (8) προκύπτει η (7).

Ένας τρόπος που χρησιμοποιείται για να δειχθεί ότι η εξίσωση (8), και άρα η (7), έχει λύση είναι η **μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων** του **Picard**.

Η μέθοδος αυτή συνίσταται στη κατασκευή μίας αναδρομικής ακολουθίας συναρτήσεων όπως παρακάτω

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_0(s))\, ds, \\
y_2(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_1(s))\, ds, \\
y_3(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_2(s))\, ds, \\
&\vdots \\
y_n(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))\, ds, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

όπου $y_0(s)$ είναι η αρχική συνθήκη, δηλαδή $y_0(s) = y_0$ και παρατηρούμε ότι κάθε μέλος της ακολουθίας $y_1, y_2, y_3, \ldots$ ικανοποιεί την αρχική συνθήκη. Αποδεικνύεται ότι εάν οι υποθέσεις του θεωρήματος ισχύουν τότε η αναδρομική αυτή ακολουθία των συναρτήσεων συγκλίνει στη μοναδική λύση του (7).

Παράδειγμα

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών: $y' = y$, $y(0) = 1$.

Ακολουθώντας τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων έχουμε

$$
\begin{aligned}
y_0(t) &= 1 \\
y_1(t) &= 1 + \int_0^t 1\, ds = 1 + t \\
y_2(t) &= 1 + \int_0^t (1+s)\, ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} \\
y_3(t) &= 1 + \int_0^t \left(1 + s + \frac{s^2}{2}\right) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2\cdot 3} \\
&\vdots \\
y_n(t) &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{t^n}{2\cdot 3\cdot 4\cdots n} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Παρατηρούμε ότι καθώς $n \to \infty$, τότε

$$y_n(t) \to 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t,$$

όπως περιμένουμε.

Άσκηση

Το μη γραμμικό πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = 3y^{2/3}, \qquad y(2) = 0,$$

δεν έχει μοναδική λύση. Να δειχθεί ότι η μέθοδος του Picard με $y_0(t) = 0$ οδηγεί στη λύση $y = 0$, ενώ η ίδια μέθοδος αρχίζοντας με $y_0(t) = t - 2$ οδηγεί στη λύση $y = (t-2)^3$.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Για τη περίπτωση $y_0(t) = t - 2$ δείξτε ότι $y_n(t) = a_n(t-2)^{b_n}$ και καθώς $n \to \infty$, $a_n \to 1$ και $b_n \to 3$.