

# ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

## 5η Διάλεξη

### Σειρές

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

22 Μαρτίου 2023

Είδαμε ότι ο  $\sqrt{2} = 1.41421356237\dots$  είναι το όριο μιας ακολουθίας  $(s_n)_{n=1}^{\infty}$  με

$$s_1 = 1.4, \quad s_2 = 1.41, \quad s_3 = 1.414, \quad \dots, \quad s_9 = 1.414213562, \quad \dots,$$

$$s_1 = 1 + \frac{4}{10}, \quad s_2 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2}, \quad s_3 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3}, \quad \dots$$

$$s_9 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \frac{3}{10^6} + \frac{5}{10^7} + \frac{6}{10^8} + \frac{2}{10^9} = \sum_{k=0}^9 \frac{d_k}{10^k}$$

με  $d_0 = 1, d_1 = 4, d_2 = 1, \dots, d_9 = 2$ . Έτσι ο  $n$ -οστός όρος της ακολουθίας είναι

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{d_k}{10^k}, \quad d_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\},$$

και επειδή  $s_n \rightarrow \sqrt{2}$ , καθώς  $n \rightarrow \infty$ , είναι λογικό να γράψουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{d_k}{10^k} = \sqrt{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{10^k}.$$

Δηλαδή το σύμβολο  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{10^k}$  είναι το όριο της ακολουθίας  $(\sum_{k=0}^n \frac{d_k}{10^k})_{n=1}^{\infty}$ .

## Ορισμός

Εάν  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  είναι μια ακολουθία ορίζουμε μια νέα ακολουθία  $(S_n)_{n=1}^{\infty}$  με

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad \dots, \quad S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad \dots$$

Την έκφραση

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

λέμε **σειρά** και την σκεφτόμαστε σαν το άθροισμα των άπειρων το πλήθος όρων της  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ . Το  $a_n$  λέμε  **$n$ -οστό όρο της σειράς**. Την  $(S_n)_{n=1}^{\infty}$  την λέμε **ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς** με  $S_n$  να είναι το  $n$ -οστό μερικό άθροισμα της σειράς.

## Ορισμός

Θα λέμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

**συγκλίνει** αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Στην περίπτωση αυτή και αν  $S_n \rightarrow s$  θα λέμε το  $s$  **όριο της σειράς** και θα γράφουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s.$$

Εάν η σειρά δεν συγκλίνει θα λέμε ότι **αποκλίνει**.

Πρέπει να τονίσουμε τη διπλή σημασία του συμβόλου  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Με αυτό εννοούμε και δηλώνουμε, αφενός, το "άθροισμα" όλων των όρων της  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ , και αφετέρου το όριο της ακολουθίας  $(S_n)_{n=1}^{\infty}$  των μερικών αθροισμάτων εφόσον αυτό υπάρχει σαν πραγματικός αριθμός. Επίσης έχουμε την ισοδυναμία

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n = a \quad (1)$$

## Παράδειγμα

Για την ακολουθία των φυσικών αριθμών  $(n)_{n=1}^{\infty}$ , έχουμε

$$S_n = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Επειδή η ακολουθία  $(S_n)_{n=1}^{\infty}$  είναι γνησίως αύξουσα και μη φραγμένη δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό έπεται ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} n$  αποκλίνει.

## Παράδειγμα

Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1$$

αποκλίνει, αφού

$$S_n = \sum_{k=1}^n 1 = 1 + 1 + \dots + 1 = n \rightarrow \infty$$

καθώς  $n \rightarrow \infty$ .

## Η γεωμετρική σειρά

Κάθε σειρά της μορφής  $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ , όπου  $a$  είναι ένας πραγματικός αριθμός, λέγεται **γεωμετρική σειρά**. Θυμίζουμε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό  $a \neq 1$  και για κάθε φυσικό αριθμό  $n$  είναι

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Έτσι ορίζοντας

$$S_0 = a^0 = 1, \quad \text{και} \quad S_n = \sum_{k=0}^n a^k = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

έχουμε

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

## Η γεωμετρική σειρά (συνέχεια)

- Εάν  $|a| < 1$ , τότε  $|a|^n \rightarrow 0$ , καθώς  $n \rightarrow \infty$ , οπότε  $a^n \rightarrow 0$ , καθώς  $n \rightarrow \infty$  ( $-|a|^n \leq a^n \leq |a|^n$ ), έτσι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-a}. \quad (2)$$

- Εάν  $|a| > 1$ , τότε η  $(a^n)_{n=1}^{\infty}$  δεν είναι φραγμένη κατά συνέπεια δεν συγκλίνει, οπότε το όριο  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  δεν υπάρχει.
- Εάν  $a = 1$ , τότε

$$S_n = \sum_{k=0}^n a^k = 1 + a + a^2 + \dots + a^n = n + 1,$$

ενώ αν  $a = -1$ , τότε

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k = 1 + (-1) + (-1)^2 + \dots + (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{εάν ο } n \text{ είναι άρτιος} \\ 0 & \text{εάν ο } n \text{ είναι περιπτός.} \end{cases}$$

Επομένως για  $|a| = 1$  το όριο  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  δεν υπάρχει.

## Η γεωμετρική σειρά (συνέχεια)

Κατά συνέπεια η γεωμετρική σειρά  $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$  συγκλίνει αν και μόνο αν  $|a| < 1$ , και στη περίπτωση αυτή, μέσω της (2), είναι

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-a}, \quad |a| < 1. \quad (3)$$

Το  $a$  στη σειρά (3) λέγεται **λόγος** της σειράς.

### Παράδειγμα

Η σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots$$

συγκλίνει αφού  $|1/2| < 1$  και

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-1/2} = 2.$$



## Τηλεσκοπική σειρά

Εξετάζουμε ως προς την σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \cdots \quad (4)$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε  $n$  είναι

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

έτσι για το μερικό άθροισμα έχουμε

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Βλέπουμε αμέσως ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει, κατά συνέπεια η σειρά συγκλίνει και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

## Τηλεσκοπική σειρά (συνέχεια)

Η σειρά (4) είναι τυπικό παράδειγμα **τηλεσκοπικής σειράς**.

### Ορισμός

Μια σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

όπου ο  $n$ -οστός όρος της μπορεί να γραφεί στη μορφή  $a_n = b_n - b_{n+1}$  λέγεται **τηλεσκοπική σειρά**.

Αν η  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  είναι τηλεσκοπική και  $a_n = b_n - b_{n+1}$ , τότε

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_{n-1} - b_n) + (b_n - b_{n+1}) \\ &= b_1 - b_{n+1} \end{aligned}$$

οπότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1}.$$

## Η αρμονική σειρά

Ας θεωρήσουμε την **αρμονική σειρά**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Παρατηρούμε ότι

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = S_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

$$S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$\geq S_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = S_2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{2}$$

$$S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$

$$\geq S_4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = S_4 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}$$

## Η αρμονική σειρά (συνέχεια)

Γενικά

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= S_{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\ &\geq S_{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n} = S_{2^{n-1}} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2} \end{aligned}$$

για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Έτσι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι γνησίως αύξουσα και μη φραγμένη αφού για οποιοδήποτε  $M > 0$  υπάρχει  $N$  ώστε  $S_{2^N} = 1 + N/2 > M$ . Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η αρμονική σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  αποκλίνει.

### Παρατήρηση

Θα δείξουμε αργότερα ότι η **p-σειρά**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

συγκλίνει όταν  $p > 1$  και αποκλίνει αν  $p \leq 1$ .

## Η εκθετική σειρά

Δείχνουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = e \quad (5)$$

δεχόμενοι ότι  $0! = 1$ . Θυμίζουμε ότι  $e$  είναι το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Με χρήση του δυωνυμικού θεωρήματος δείξαμε ότι

$$a_n = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{j-1}{n}\right) \quad (6)$$

$$\leq 1 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad (7)$$

Για  $k$  τυχαίο αλλά σταθερό και  $n \in \mathbb{N}$  έχουμε

$$a_{n+k} = 1 + \sum_{j=1}^{n+k} \frac{1}{j!} \left(1 - \frac{1}{n+k}\right) \left(1 - \frac{2}{n+k}\right) \cdots \left(1 - \frac{j-1}{n+k}\right)$$

## Η εκθετική σειρά (συνέχεια)

$$a_{n+k} \geq 1 + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} \left(1 - \frac{1}{n+k}\right) \left(1 - \frac{2}{n+k}\right) \cdots \left(1 - \frac{j-1}{n+k}\right),$$

από όπου, επειδή  $e = \sup a_n$ , έπεται ότι

$$e \geq 1 + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} \left(1 - \frac{1}{n+k}\right) \left(1 - \frac{2}{n+k}\right) \cdots \left(1 - \frac{j-1}{n+k}\right),$$

για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Παίρνοντας το όριο, καθώς  $n \rightarrow \infty$ , στην ακολουθία στο δεξί μέλος της παραπάνω ανισότητας, το οποίο υπάρχει, έχουμε από την (7)

$$e \geq 1 + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} \geq a_k.$$

Έτσι αν  $S_k$  είναι το μερικό άθροισμα της σειράς έχουμε  $a_k \leq S_k \leq e$ , οπότε από το κριτήριο της παρεμβολής έπεται ότι  $S_n \rightarrow e$ , καθώς  $n \rightarrow \infty$ , γεγονός που αποδεικνύει την (5). Τη σειρά στην (5) τη λέμε **εκθετική σειρά**.

## Θεώρημα

Εάν

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a, \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$$

είναι δυο συγκλίνουσες σειρές και  $\lambda, \mu$  είναι πραγματικές σταθερές, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lambda a + \mu b.$$

## Ορισμός

Εάν  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  είναι δύο σειρές, ορίζουμε το άθροισμα και τη διαφορά των σειρών, και τον πολλαπλασιασμό της σειράς με σταθερά με τις σχέσεις

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

οποτεδήποτε οι εκφράσεις στο δεξιό μέλος κάθε σχέσης έχουν έννοια.

## Θεώρημα

Αν μια σειρά συγκλίνει ο  $n$ -οστός όρος της τείνει στο μηδέν καθώς το  $n$  τείνει στο άπειρο.

## Παρατήρηση

Ισοδύναμη διατύπωση του θεωρήματος είναι η ακόλουθη: Εάν ο  $n$ -οστός όρος μιας σειράς δεν τείνει στο μηδέν καθώς το  $n$  τείνει στο άπειρο, τότε η σειρά αποκλίνει. Έτσι συμπεραίνουμε ότι κάθε μία από τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}},$$

αποκλίνει αφού το όριο του  $n$ -οστού όρου καθώς το  $n$  τείνει στο άπειρο είτε είναι διάφορο του μηδενός είτε δεν υπάρχει. Σημειώνουμε επίσης ότι **το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει**, όπως είδαμε με την αρμονική σειρά, δηλαδή το γεγονός ότι ο  $n$ -οστός όρος τείνει στο μηδέν καθώς το  $n$  τείνει στο άπειρο δεν εξασφαλίζει ότι η σειρά συγκλίνει.



## Θεώρημα

Έστω  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$  μια συγκλίνουσα σειρά. Τότε για κάθε  $\epsilon > 0$  υπάρχει  $N$  ώστε

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n \right| < \epsilon.$$

## Παρατήρηση

Συνέπεια του θεωρήματος αυτού είναι ότι αν η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  συγκλίνει, τότε για κάθε αυθαίρετα μικρό  $\epsilon > 0$ , υπάρχει  $N \in \mathbb{N}$  ώστε

$$|a_n| < \epsilon, \quad \forall n \geq N,$$

κατά συνέπεια

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

## Θεώρημα

Έστω  $a_n \geq 0$  για όλα τα  $n$ , τότε η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  συγκλίνει, αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς είναι φραγμένη.

## Ορισμός

Θα λέμε ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  **συγκλίνει απολύτως** εάν η  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  συγκλίνει.

## Θεώρημα (Κριτήριο απόλυτης σύγκλισης)

Εάν μια σειρά συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει.

## Θεώρημα

Αν η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  συγκλίνει απολύτως και  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  είναι μια αναδιάταξη της  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ , δηλαδή  $b_n = a_{\sigma(n)}$ , όπου  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  μια ένα προς ένα και επί συνάρτηση, τότε η  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  συγκλίνει απολύτως και

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

## Θεώρημα (Βασικό κριτήριο σύγκρισης)

Θεωρούμε τις σειρές  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  με  $0 \leq a_n \leq b_n$ , για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Εάν η  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  συγκλίνει, τότε και η  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  συγκλίνει.

Κάθε  $x \in \mathbb{R}$  γράφεται σαν  $x = a_0.a_1a_2a_3\dots$  με  $a_0 \in \mathbb{Z}$  και  $a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , ή

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots \quad (8)$$

Ας θεωρήσουμε λοιπόν μια σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}, \quad a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}.$$

Επειδή  $0 \leq a_n \leq 9$  έχουμε

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = 9 \left( \frac{1}{1 - 1/10} - 1 \right) = 1,$$

από το άθροισμα γεωμετρικής σειράς. Κατά συνέπεια η σειρά (8) όντως συγκλίνει και παριστάνει τον πραγματικό αριθμό  $x$ .

## Θεώρημα (Κριτήριο συμπίκνωσης)

Έστω  $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq 0$ . Η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots + 2^n a_{2^n} + \dots$$

συγκλίνει.

## Παράδειγμα (p-σειρά)

Η p-σειρά με  $p > 0$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

συγκλίνει αν  $p > 1$  και αποκλίνει αν  $p \leq 1$ . Η περίπτωση  $p = 1$  είναι η αρμονική σειρά η οποία δείξαμε ότι αποκλίνει.

## Παράδειγμα $p$ -σειρά (συνέχεια)

Θεωρούμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(p-1)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$$

η οποία είναι γεωμετρική με λόγο  $1/2^{p-1}$ . Κατά συνέπεια συγκλίνει αν  $p-1 > 0$ , ισοδύναμα αν  $p > 1$  και αποκλίνει αν  $p-1 \leq 0$ , ισοδύναμα αν  $p \leq 1$ . Έτσι από το κριτήριο συμπίκνωσης έπεται ότι η  $p$ -σειρά συγκλίνει αν  $p > 1$  και αποκλίνει αν  $p \leq 1$ .

Σημειώνουμε ότι για  $p \leq 0$  η παραπάνω σειρά αποκλίνει αφού για  $p = 0$  ο  $n$ -οστός όρος της σειράς είναι ίσος με 1, ενώ για  $p < 0$  ο  $n$ -οστός όρος της σειράς  $n^{-p} = n^{|p|}$  τείνει στο άπειρο καθώς  $n \rightarrow \infty$ .

## Θεώρημα (Κριτήριο του λόγου)

Θεωρούμε τη σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  με  $a_n \neq 0$ , και έστω

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L.$$

- ① Αν  $L < 1$  η σειρά συγκλίνει απολύτως.
- ② Αν  $L > 1$  η σειρά αποκλίνει.
- ③ Αν  $L = 1$  το κριτήριο δεν παρέχει κάποια πληροφορία για τη σύγκλιση της σειράς.

## Πόρισμα

Αν για την ακολουθία  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1,$$

τότε  $a_n \rightarrow 0$ .

## Θεώρημα (Κριτήριο της ρίζας)

Θεωρούμε τη σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  και έστω

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L.$$

Τότε

- ① Αν  $L < 1$  η σειρά συγκλίνει απολύτως.
- ② Αν  $L > 1$  η σειρά αποκλίνει.
- ③ Αν  $L = 1$  το κριτήριο δεν παρέχει κάποια πληροφορία για τη σύγκλιση της σειράς.

## Πόρισμα

Αν για την ακολουθία  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

τότε  $a_n \rightarrow 0$ .

Στη συνέχεια θεωρούμε σειρές οι όροι των οποίων είναι εναλλάξ θετικοί και αρνητικοί αριθμοί. Για παράδειγμα

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2^n} + \dots = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n}$$

Η πρώτη σειρά δεν συγκλίνει απολύτως, αφού η σειρά των απολύτων τιμών είναι η αρμονική σειρά, αλλά δεν γνωρίζουμε αν συγκλίνει. Η δεύτερη σειρά συγκλίνει σαν γεωμετρική σειρά με λόγο  $r = -1/2$ , και συγκλίνει και απολύτως.

## Ορισμός

Μια σειρά που γράφεται στη μορφή

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \quad \text{με } a_n \geq 0$$

λέγεται **εναλλασσόμενη** σειρά.



## Θεώρημα (Κριτήριο εναλλασσόμενης σειράς)

Έστω ότι

$$\textcircled{1} \quad a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq 0$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

τότε η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  συγκλίνει.

### Παράδειγμα

Η εναλλασσόμενη αρμονική σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$$

συγκλίνει. Πράγματι για τη σειρά αυτή έχουμε  $a_n = 1/n$ , επομένως

$$1 \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3} \geq \dots \geq \frac{1}{n} \geq \dots \rightarrow 0.$$

Έτσι από το κριτήριο εναλλασσόμενης σειράς έπεται ότι η σειρά συγκλίνει.

Αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

το μερικό άθροισμα  $S_n$  της σειράς είναι μια προσέγγιση του  $s$ , αφού  $S_n \rightarrow s$ . Η διαφορά

$$s - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

εκφράζει το **σφάλμα** της προσέγγισης του  $s$  με το  $S_n$ . Το σφάλμα  $s - S_n$  λέγεται και **σφάλμα αποκοπής**.

### Θεώρημα (Εκτίμηση του σφάλματος αποκοπής εναλλασσόμενης σειράς)

Έστω ότι για την εναλλασσόμενη σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  ισχύει ότι

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

και έστω  $s = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ . Αν  $S_n$  είναι το μερικό άθροισμα της σειράς, τότε

$$|s - S_n| \leq a_{n+1}.$$

## Παράδειγμα

Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

συγκλίνει (γιατί);

- Ⓐ) Να εκτιμηθεί το μέγιστο σφάλμα όταν το άθροισμα της σειράς προσεγγίζεται από το άθροισμα των 8 όρων της σειράς.
- Ⓑ) Πόσοι όροι απαιτούνται να αθροιστούν ώστε το σφάλμα να μην υπερβαίνει το 0.001;

(α') Αν  $s$  είναι το όριο της σειράς τότε μια εκτίμηση του σφάλματος είναι

$$|s - S_8| \leq \frac{1}{2 \cdot 9 - 1} = \frac{1}{17}$$

κατά συνέπεια το σφάλμα δεν υπερβαίνει το  $1/17$ .

(β') Αν ορίσουμε το σφάλμα  $E_n := s - S_n$ , θέλουμε  $|E_n| \leq a_{n+1}$ , ισοδύναμα

$$|E_n| \leq \frac{1}{2(n+1)-1} \leq 0.001 \Leftrightarrow 1000 + 1 \leq 2(n+1) \Leftrightarrow 499.5 \leq n$$

(συνέχεια) κατά συνέπεια απαιτούνται τουλάχιστον 500 όροι ώστε το σφάλμα να μην υπερβαίνει το 0.001.

Η εναλλασσόμενη αρμονική σειρά είναι τυπικό παράδειγμα σειράς η οποία συγκλίνει μεν αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.

## Ορισμός

Εάν η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως, δηλαδή η  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  αποκλίνει, θα λέμε ότι η σειρά **συγκλίνει υπό συνθήκη**.

## Παράδειγμα

Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

συγκλίνει υπό συνθήκη, αφού

$$1 \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \geq \dots \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \dots \rightarrow 0,$$

ενώ η σειρά των απολύτων τιμών είναι  $p$ -σειρά με  $p = 1/2$ , άρα αποκλίνει.

- Είδαμε ότι αν  $-1 < x < 1$  τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

κατά συνέπεια η γεωμετρική σειρά ορίζει, εκεί που συγκλίνει, δηλαδή στο διάστημα  $(-1, 1)$  την συνάρτηση  $f(x) = 1/(1-x)$ .

- Στη συνέχεια ας θεωρήσουμε τη σειρά

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

και ας εξετάσουμε, όπως στην περίπτωση της γεωμετρικής σειράς, για ποιές τιμές του  $x$  η σειρά συγκλίνει. Παρατηρούμε ότι αν  $x = 0$  η σειρά συγκλίνει στο 1, ενώ για  $x = 1$  συγκλίνει στο  $e$ . Για  $x \neq 0$  χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου παίρνουμε

$$\frac{\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}}{\frac{|x^n|}{n!}} = \frac{|x|n!}{(n+1)!} = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0$$

καθώς  $n \rightarrow \infty$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Επειδή το όριο του σχετικού λόγου είναι μικρότερο του 1 η σειρά συγκλίνει ανεξάρτητα από το ποιό είναι το  $x$ , δηλαδή η σειρά συγκλίνει για όλα τα  $x \in \mathbb{R}$ . Έτσι, αφού για  $x \in \mathbb{R}$  το όριο ή άθροισμα της σειράς προφανώς εξαρτάται από το  $x$ , έχουμε ότι η σειρά ορίζει μια συνάρτηση. Ορίζουμε λοιπόν τη συνάρτηση  $\exp x$  με τη σχέση

$$\exp x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (9)$$

Παρατηρούμε ότι  $\exp 0 = 1$ , και  $\exp 1 = e$ . Θα αποδείξουμε σε επόμενο κεφάλαιο ότι  $\exp x = e^x$ .

Η γεωμετρική σειρά όπως και η σειρά (9) είναι τυπικά παραδείγματα σειρών των οποίων οι όροι περιέχουν δυνάμεις του  $x$ . Οι σειρές αυτές λέγονται **δυναμοσειρές** και θα τις μελετήσουμε στο σχετικό κεφάλαιο.