



ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

© Σχεδίαση FIR Φίλτρων

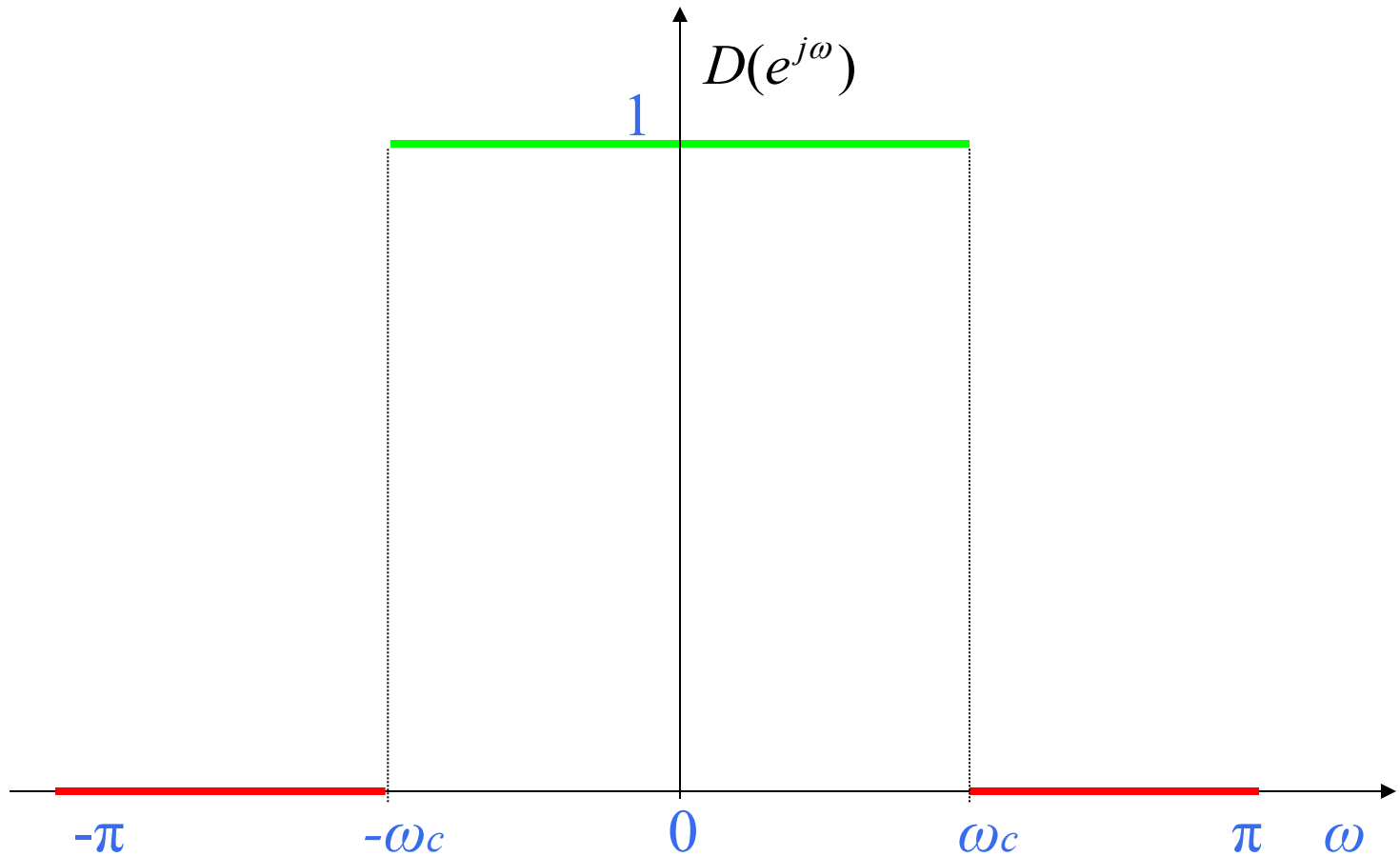
Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

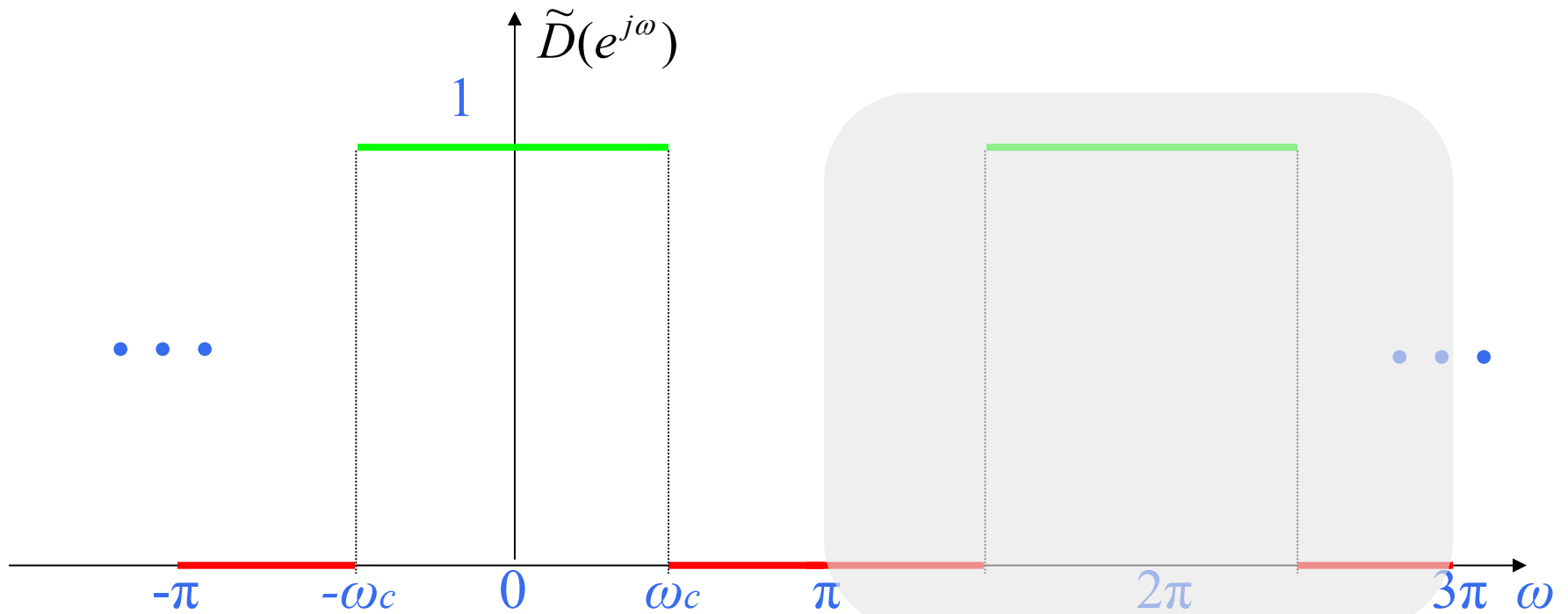
Σχεδίαση Κατωπερατών FIR Φίλτρων

Ιδανικές Προδιαγραφές: $D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Περιοδική Επέκταση Ιδανικών Προδιαγραφών Φίλτρου



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Περιοδική Επέκταση Ιδανικών Προδιαγραφών Φίλτρου

Σχεδίαση με χρήση Σειρών Fourier

Εξίσωση Σύνθεσης

$$\tilde{D}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d[n]e^{-jn\omega}$$

Εξίσωση Ανάλυσης

$$d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{D}(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega, \quad n \in \mathbb{Z}$$

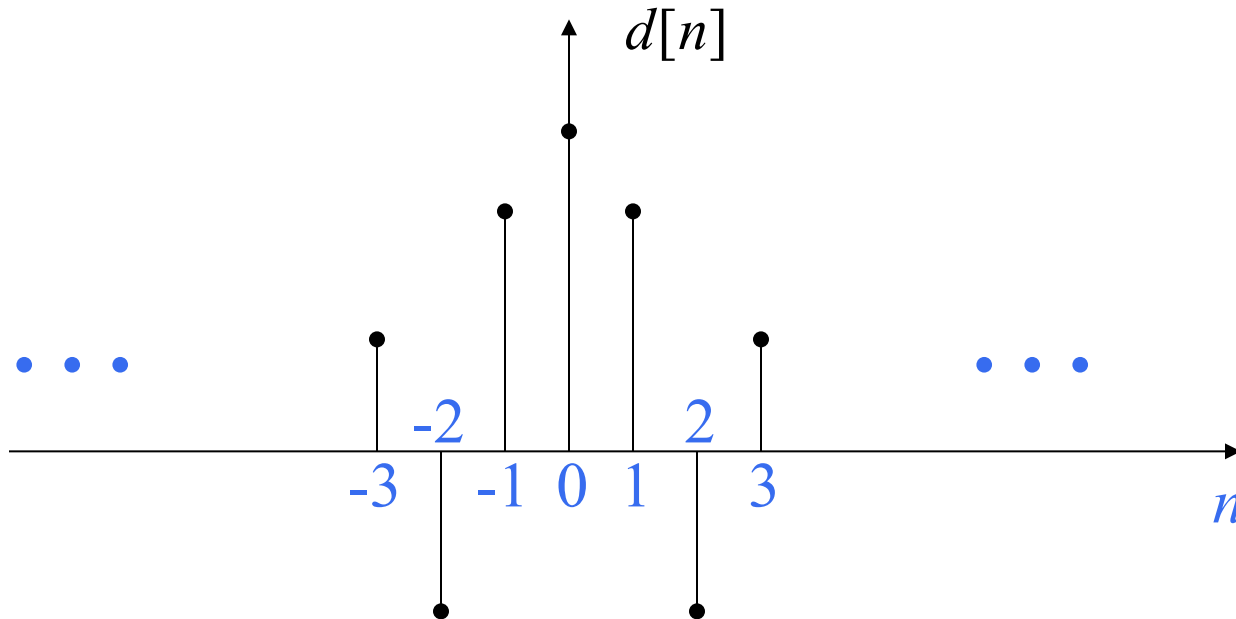
Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Περιοδική Επέκταση Ιδανικών Προδιαγραφών Φίλτρου

Σχεδίαση με χρήση Σειρών Fourier

Εξίσωση Σύνθεσης

$$\tilde{D}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d[n]e^{-jn\omega}$$

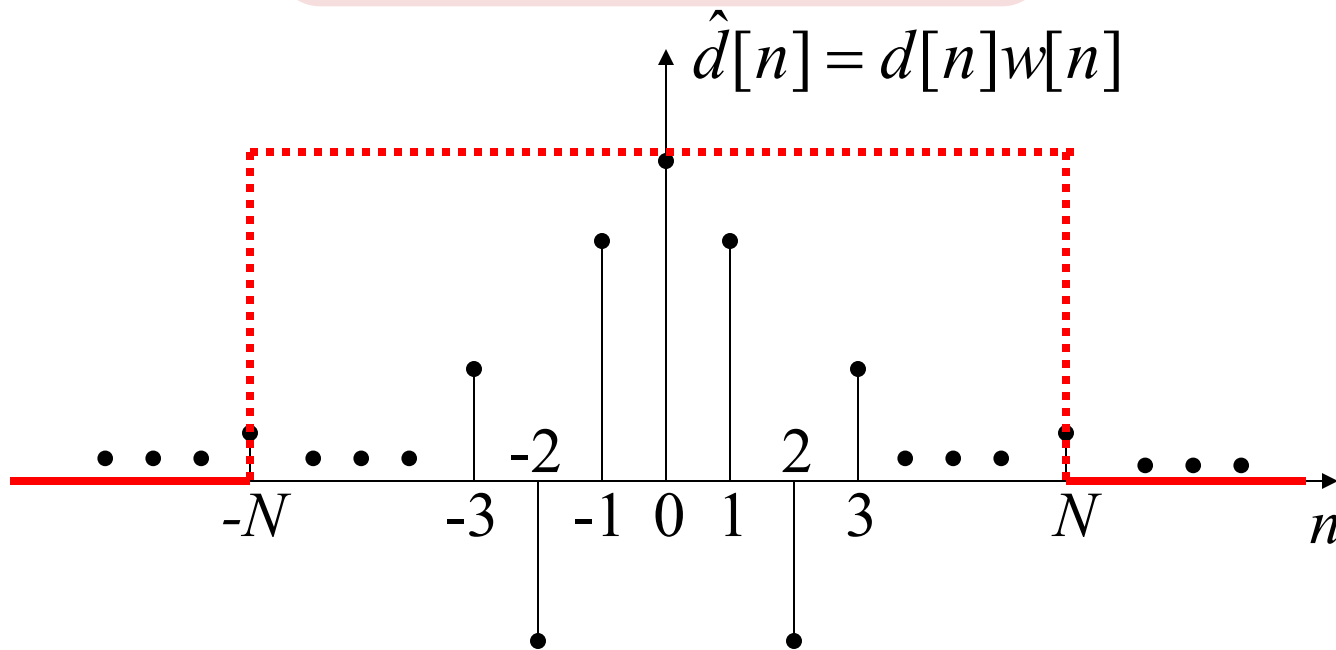


Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Σχεδίαση με χρήση Σειρών Fourier

Περιορισμός της ακολουθίας $d[n]$ με παραθύρωση για τη λύση των προβλημάτων.

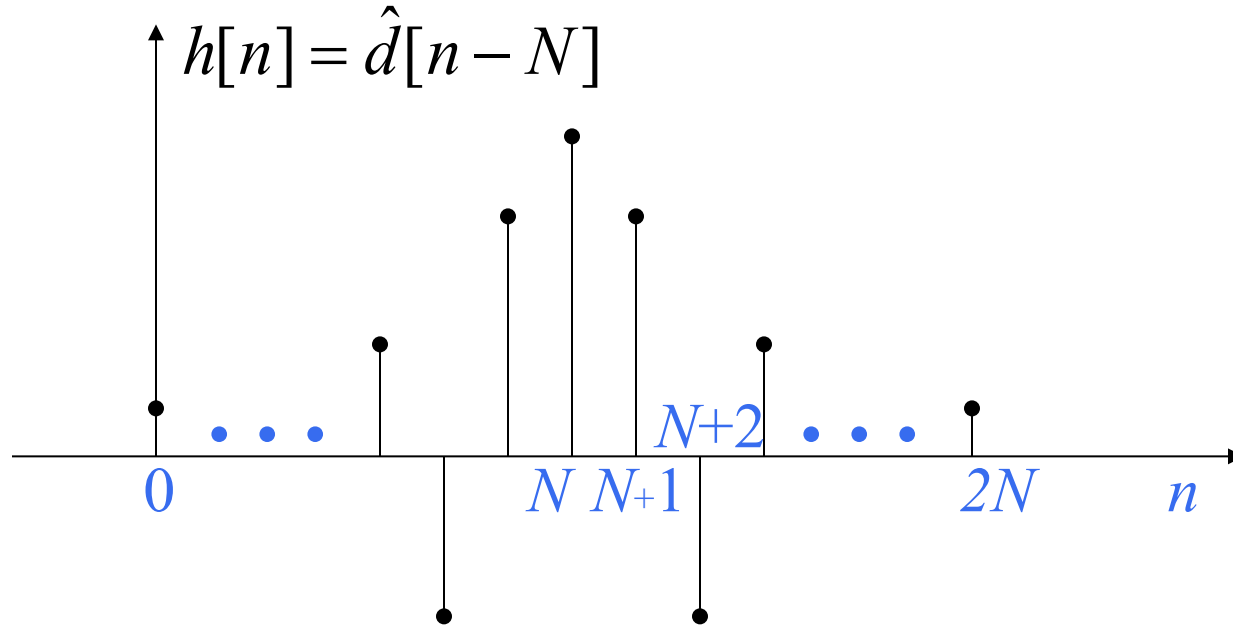
$$w[n] = \begin{cases} 1, & -N \leq n \leq N \\ 0 & \end{cases}$$



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Σχεδίαση με χρήση Σειρών Fourier

Εισαγωγή καθυστέρησης, με δεξιά ολίσθηση της ακολουθίας $\hat{d}[n]$ κατά N δείγματα, για αιτιατότητα.

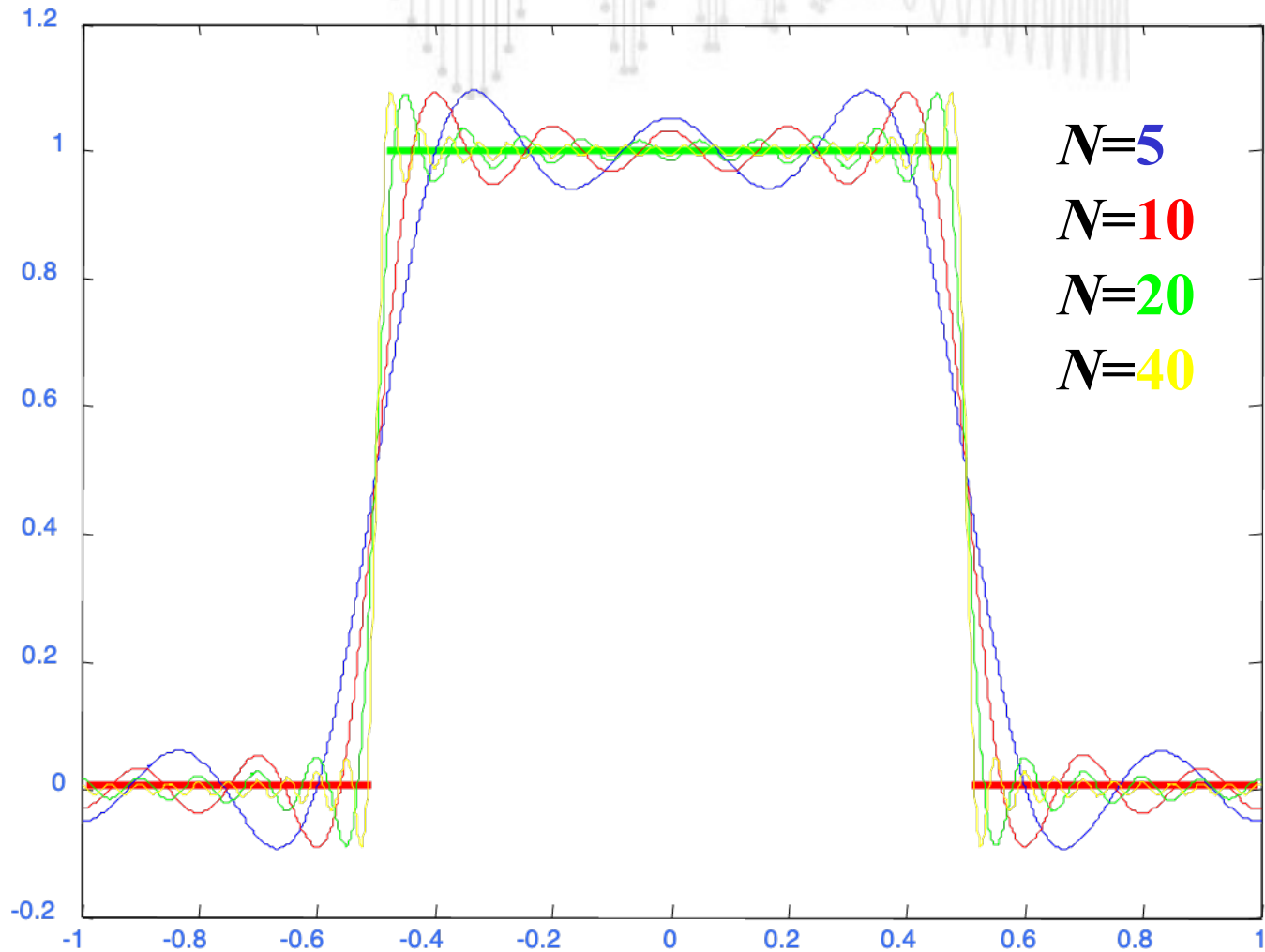


Απόκριση Συχνότητας:

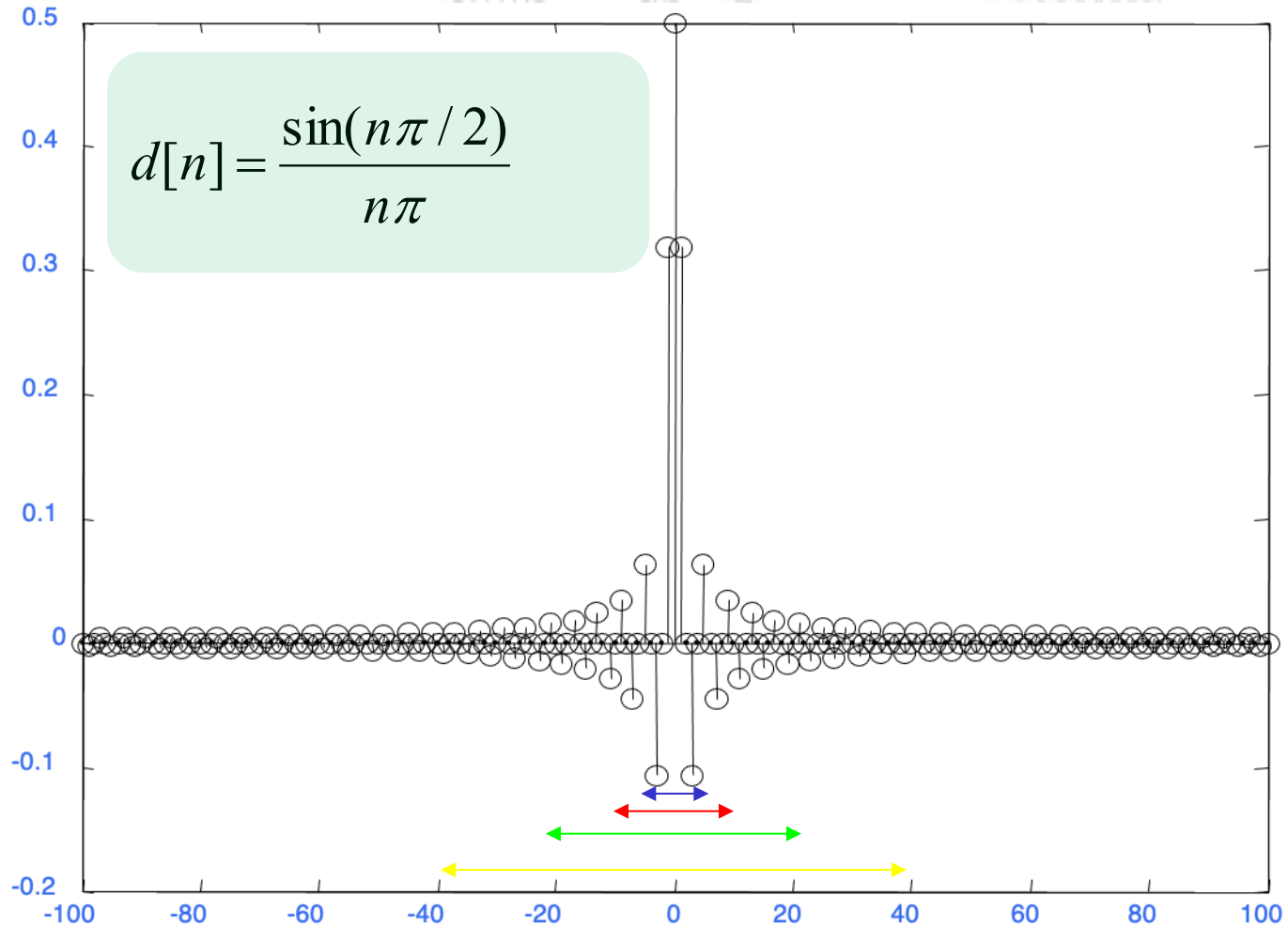
$$H_N(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{2N} h[n] e^{-jn\omega}$$

Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Σχεδίαση με χρήση Σειρών Fourier



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

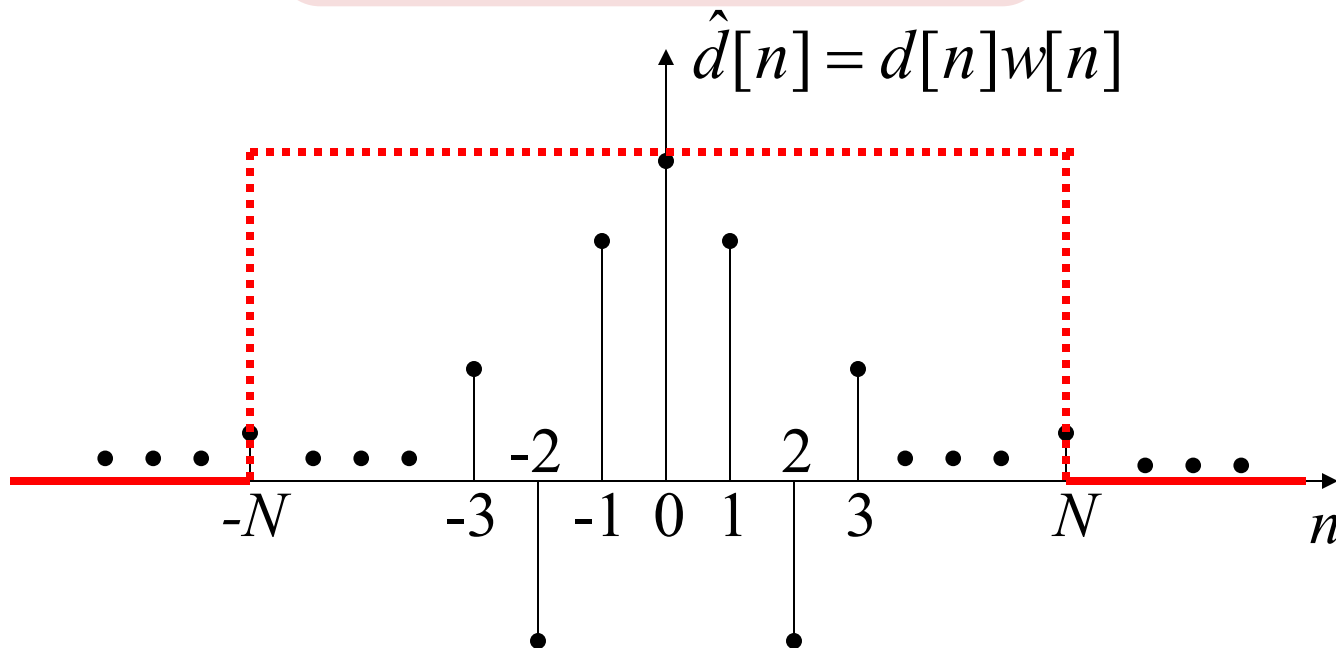


Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Σχεδίαση με χρήση Σειρών Fourier

Περιορισμός της ακολουθίας $d[n]$ με παραθύρωση για τη λύση των προβλημάτων.

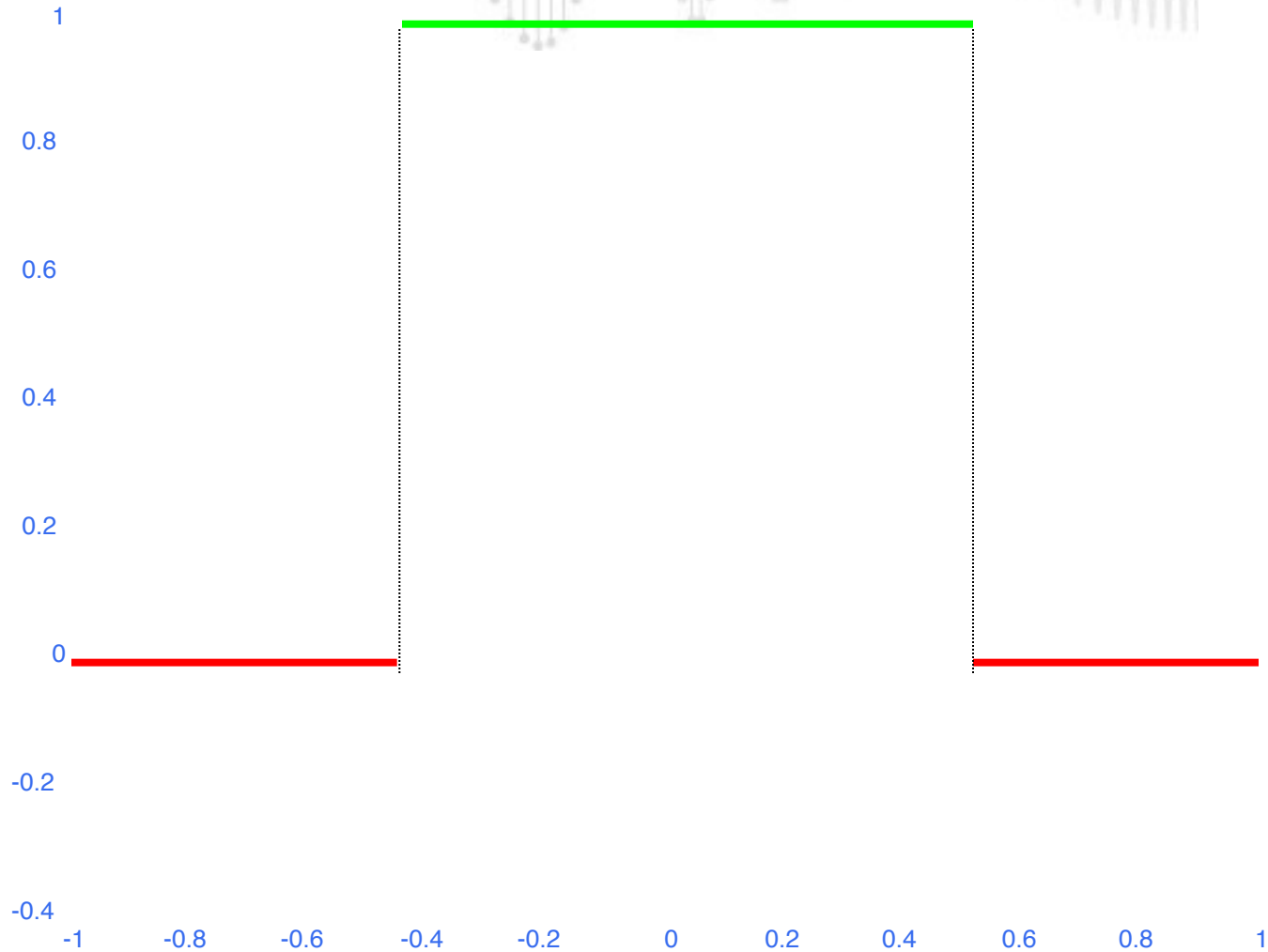
$$w[n] = \begin{cases} 1, & -N \leq n \leq N \\ 0 & \end{cases}$$



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Σχεδίαση με χρήση Σειρών Fourier

Πεδίο Συχνότητων-Φαινόμενο *Gibbs*

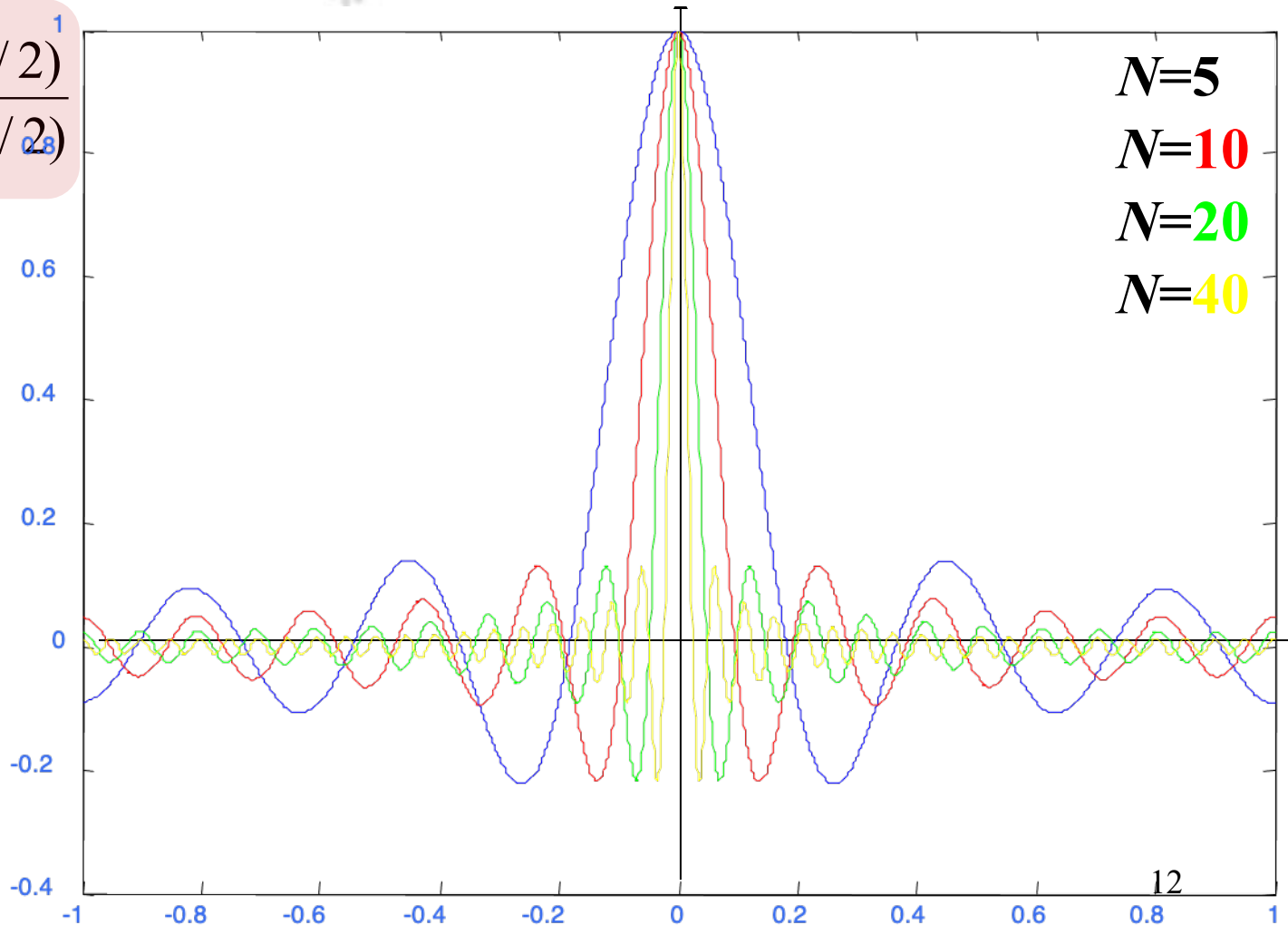


Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Σχεδίαση με χρήση Σειρών Fourier

Πεδίο Συχνότητων-Φαινόμενο *Gibbs*

$$R(\omega) = \frac{\sin(N\omega/2)}{N \sin(\omega/2)}$$

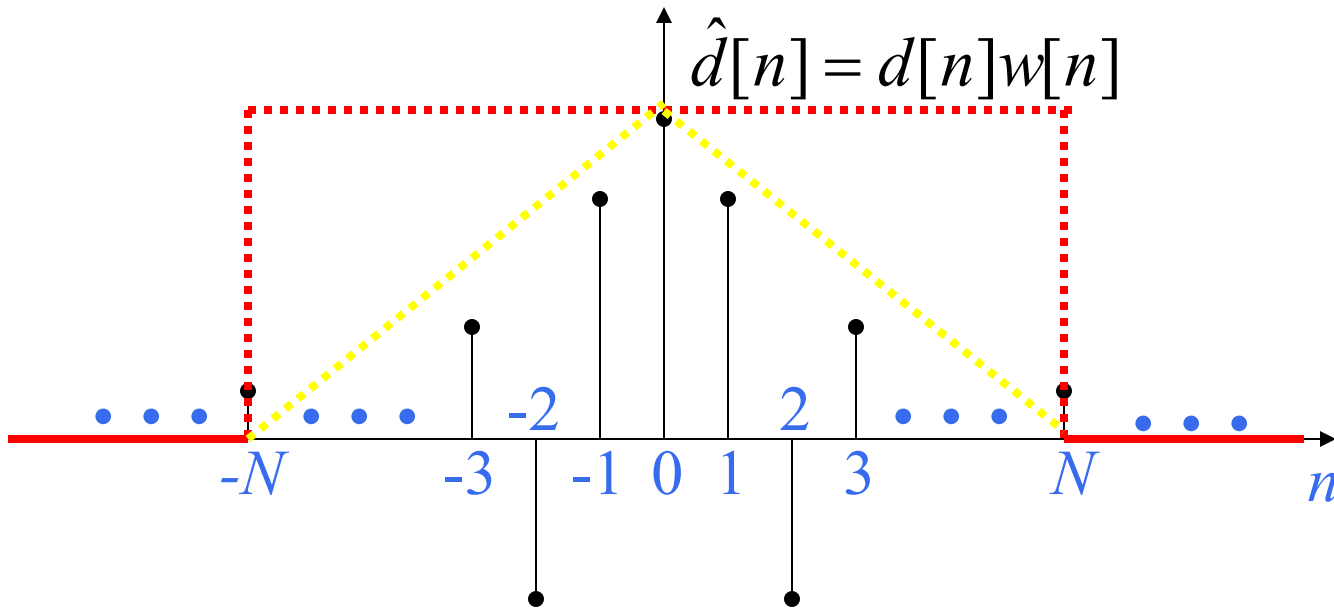


Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Παραθύρωση

$$w[n] = \begin{cases} 1, & -N \leq n \leq N \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$w[n] = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{N}, & -N \leq n \leq N \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Παραθύρωση



Τετραγωνικό Παράθυρο: $w_n = 1, 0 \leq n \leq L - 1$

Τριγωνικό (Bartlett): $w_n = 1 - \left| 1 - 2\frac{n+1}{L+1} \right|, 0 \leq n \leq L - 1.$

Hanning: $w_n = 0.5 - 0.5 \cos 2\pi \frac{n+1}{L+1}, 0 \leq n \leq L - 1$

Hamming: $w_n = 0.54 - 0.46 \cos 2\pi \frac{n+1}{L+1}, 0 \leq n \leq L - 1.$

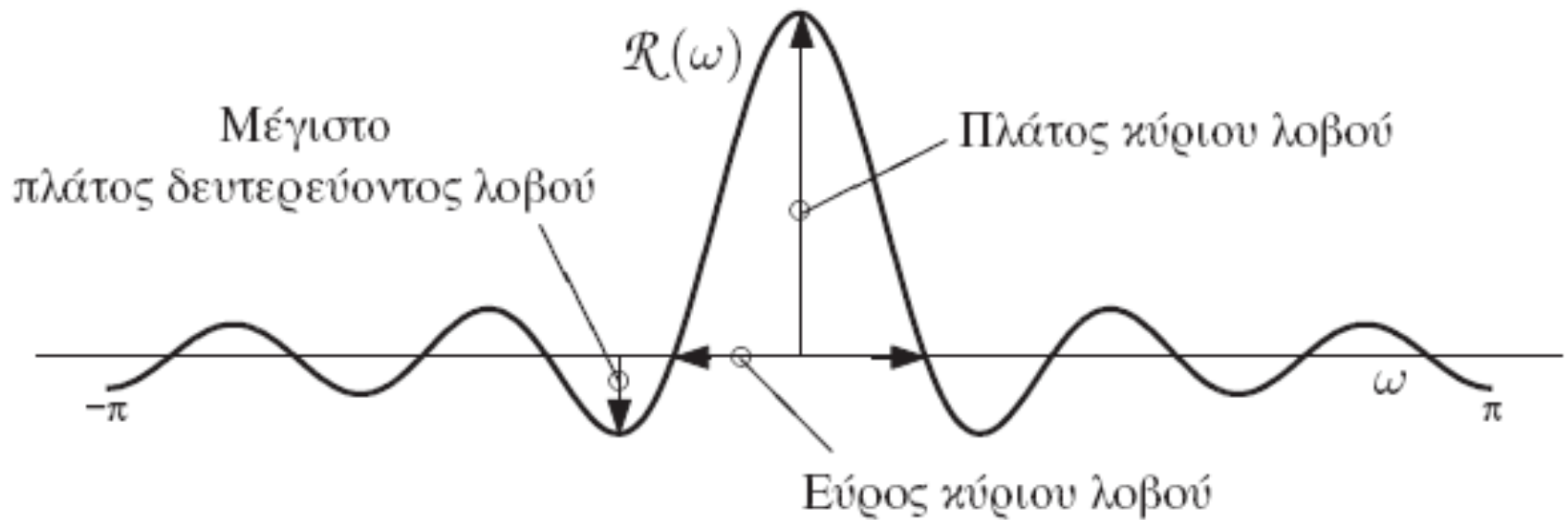
Blackman: $w_n = 0.52 - 0.5 \cos 2\pi \frac{n+1}{L+1} + 0.08 \cos 4\pi \frac{n+1}{L+1}, 0 \leq n \leq L - 1.$

Kaiser: $w_n = \frac{I_0 \left(\beta \sqrt{1 - \left(1 - 2\frac{n}{L-1} \right)^2} \right)}{I_0(\beta)}, 0 \leq n \leq L - 1$

Chebyshev: $w_n = \frac{T_{L-1}(\beta) + 2 \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{L-1}{2} \rfloor} \cos \frac{(2n-L+1)k\pi}{L} T_{L-1} \left(\beta \cos \frac{k\pi}{L} \right)}{T_{L-1}(\beta) + 2 \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{L-1}{2} \rfloor} T_{L-1} \left(\beta \cos \frac{k\pi}{L} \right)}$

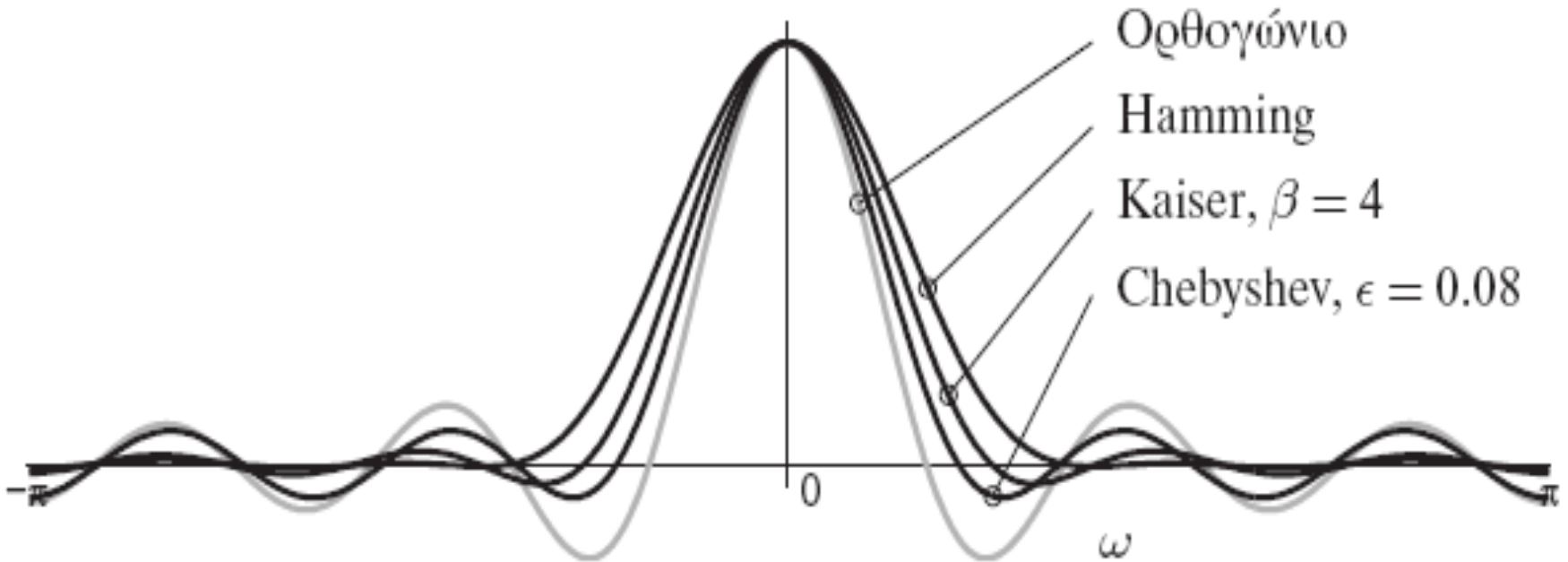
Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Βασικά Συχνотικά Χαρακτηριστικά Παραθύρων



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Βασικά Συχνотικά Χαρακτηριστικά Παραθύρων



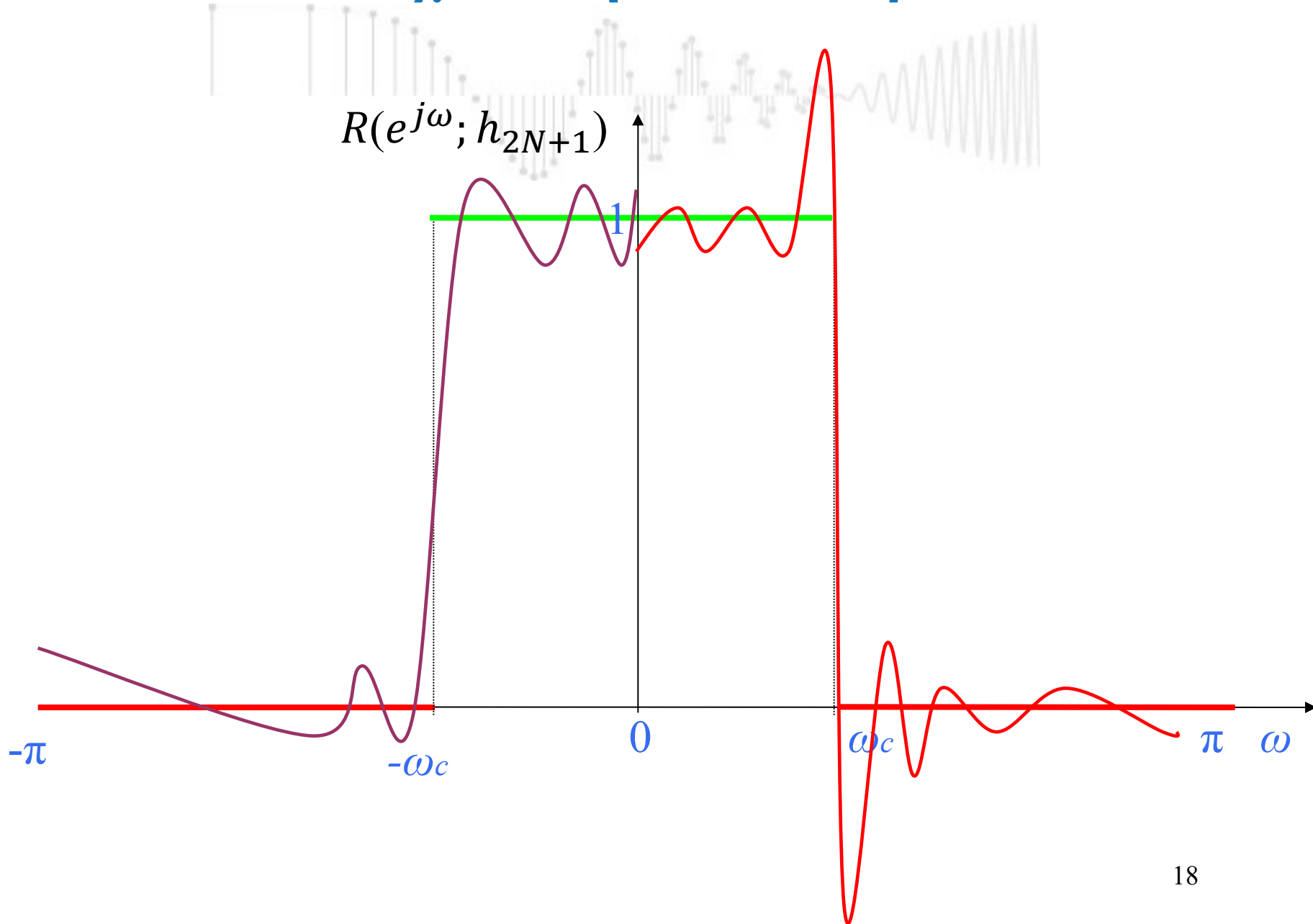
Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Βασικά Συχνотικά Χαρακτηριστικά Παραθύρων



Παράθυρο	Πλάτος Δευτ. Λοβού	Εύρος Κύριου Λοβού
Ορθογώνιο	2.17×10^{-1}	$\frac{4\pi}{L}$
Bartlett	4.72×10^{-2}	$\frac{8\pi}{L}$
Hanning	2.66×10^{-2}	$\frac{8\pi}{L}$
Hamming	7.33×10^{-3}	$\frac{8\pi}{L}$
Blackman	1.24×10^{-3}	$\frac{12\pi}{L}$
Kaiser	$2.17 \times 10^{-1} \times \frac{\beta}{\sinh \beta}$	$\frac{4}{L} [\pi^2 + \beta^2]^{1/2}$
Chebyshev	ϵ	$\frac{2}{L} [\pi^2 + 4 (\cosh^{-1}(\frac{1}{\epsilon}))^2]^{1/2}$

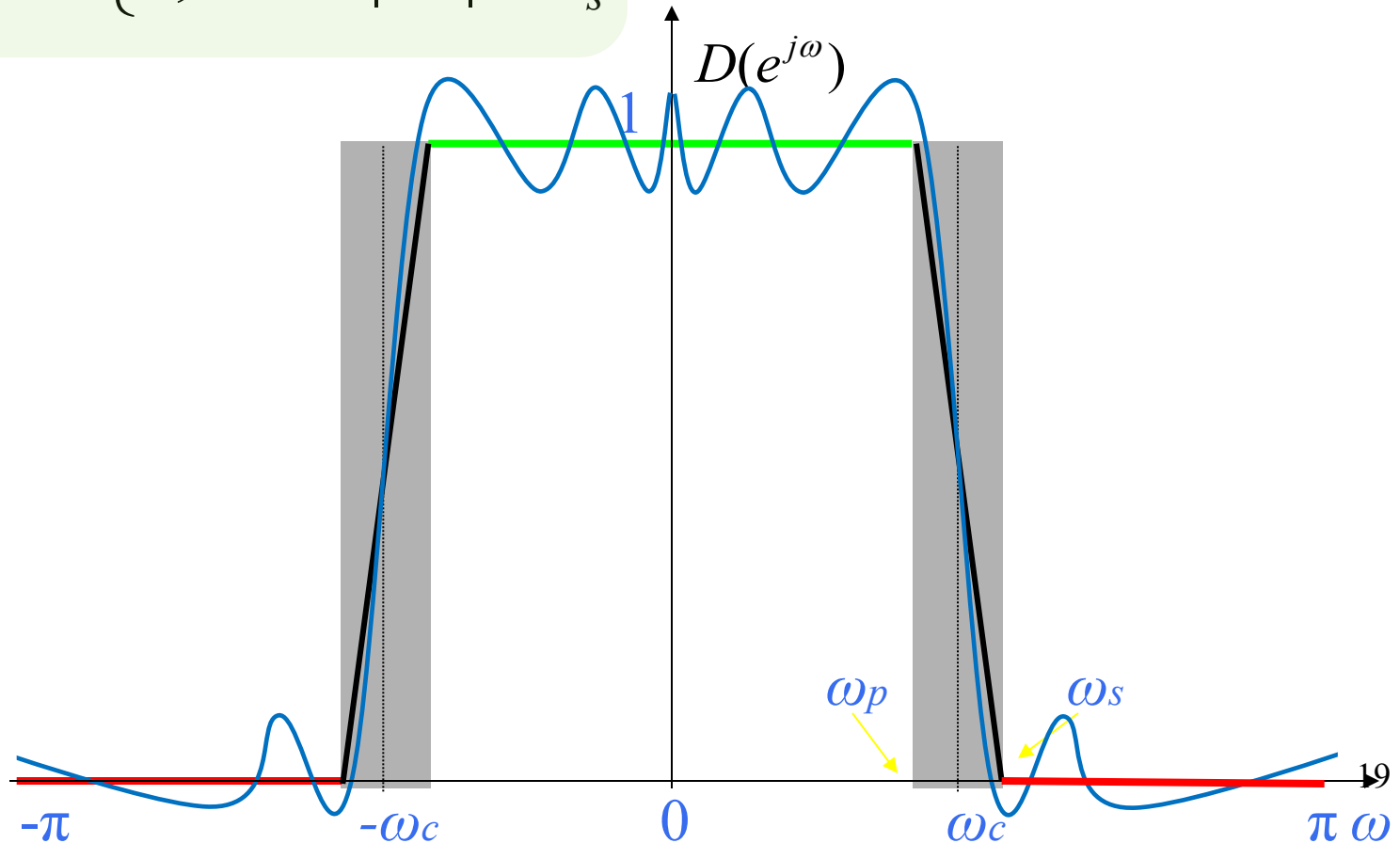
Σχεδίαση FIR Φίλτρων



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Πρακτικές Προδιαγραφές

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_p \\ 0, & \pi \geq |\omega| > \omega_s \end{cases}$$



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Σχεδίαση με χρήση Σειρών Fourier

Εξίσωση Σύνθεσης

$$\tilde{D}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d[n]e^{-jn\omega}$$

Εξίσωση Ανάλυσης

$$d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{D}(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega, \quad n \in \mathcal{Z}$$

Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Το Πρόβλημα Σχεδίασης ως Πρόβλημα Βελτιστοποίησης

Συνάρτηση Σφάλματος: $\varepsilon(e^{j\omega}; h_{2N+1}) = D(e^{j\omega}) - R(e^{j\omega}; h_{2N+1})$

Συνάρτηση Κόστους: $E_p^p(h_{2N+1}) = \int_{-\pi}^{\pi} |\varepsilon(e^{j\omega}; h_{2N+1})|^p d\omega$

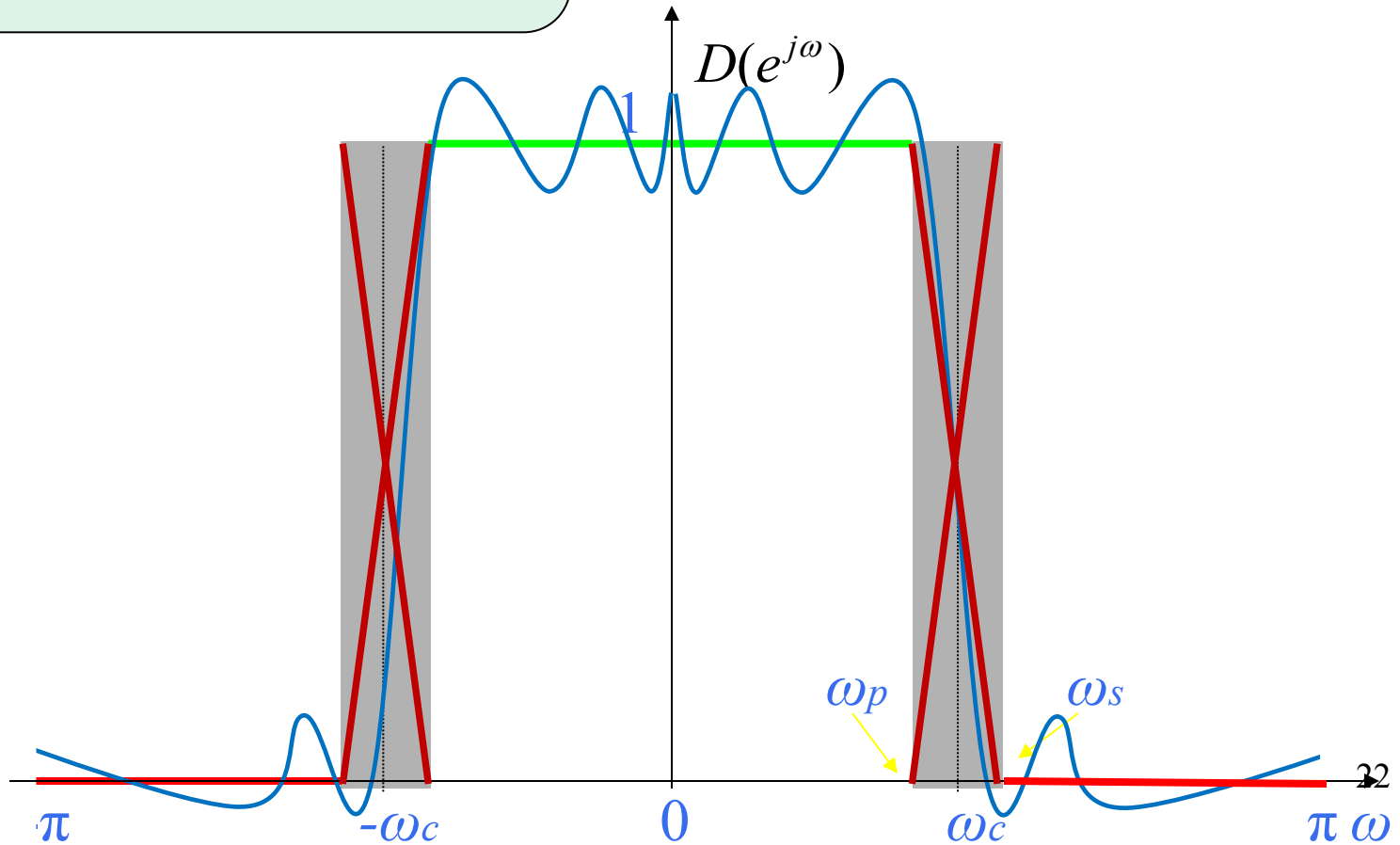
Σκοπός μας η λύση του προβλήματος: $\min_{h_{2N+1}} E_p^p(h_{2N+1})$

Η βέλτιστη λύση: $h_{2N+1}^* = \arg \min_{h_{2N+1}} E_p^p(h_{2N+1})$

Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Το Πρόβλημα Σχεδίασης ως Πρόβλημα Βελτιστοποίησης

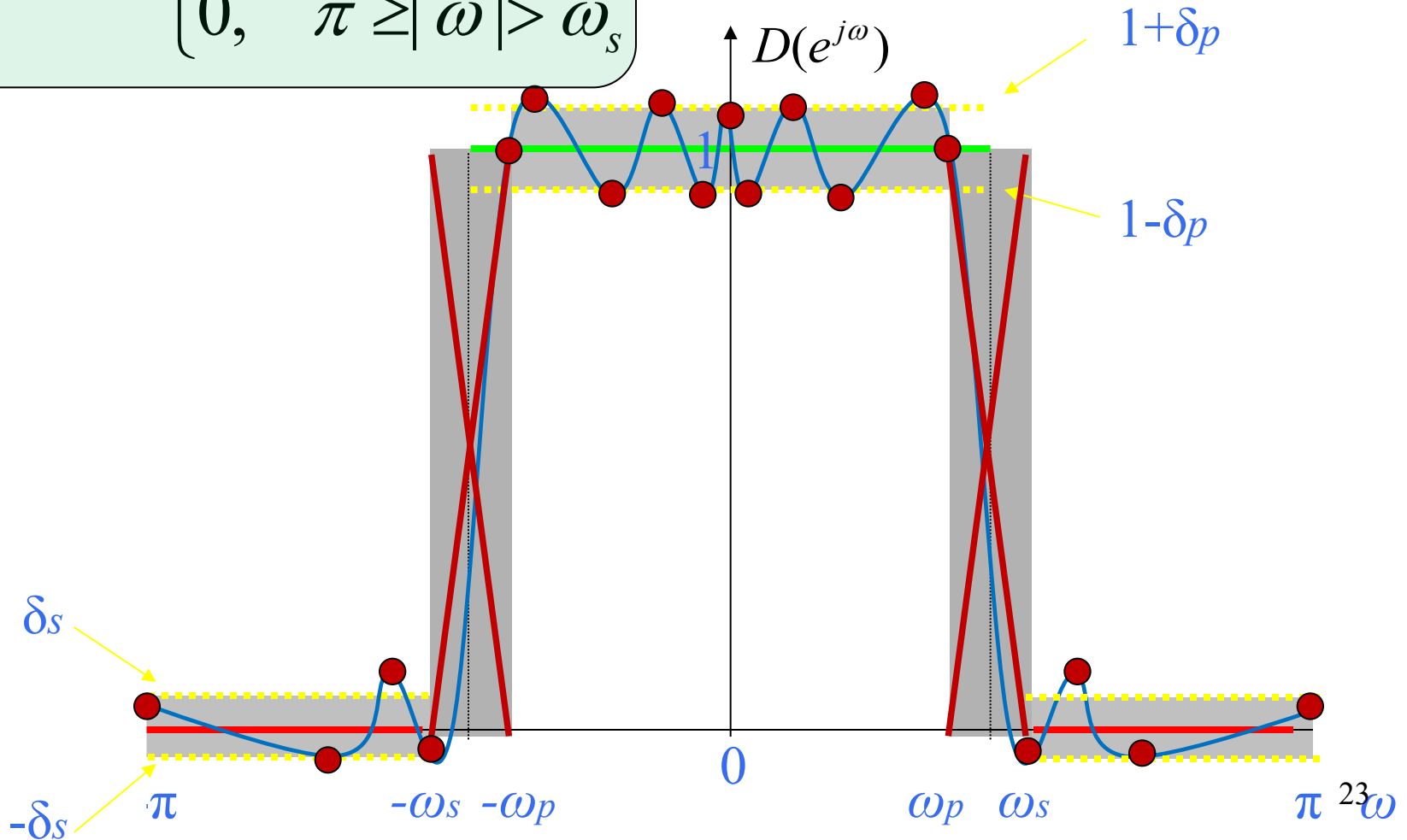
$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_p \\ 0, & \pi \geq |\omega| > \omega_s \end{cases}$$



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Το Πρόβλημα Σχεδίασης ως Πρόβλημα Βελτιστοποίησης

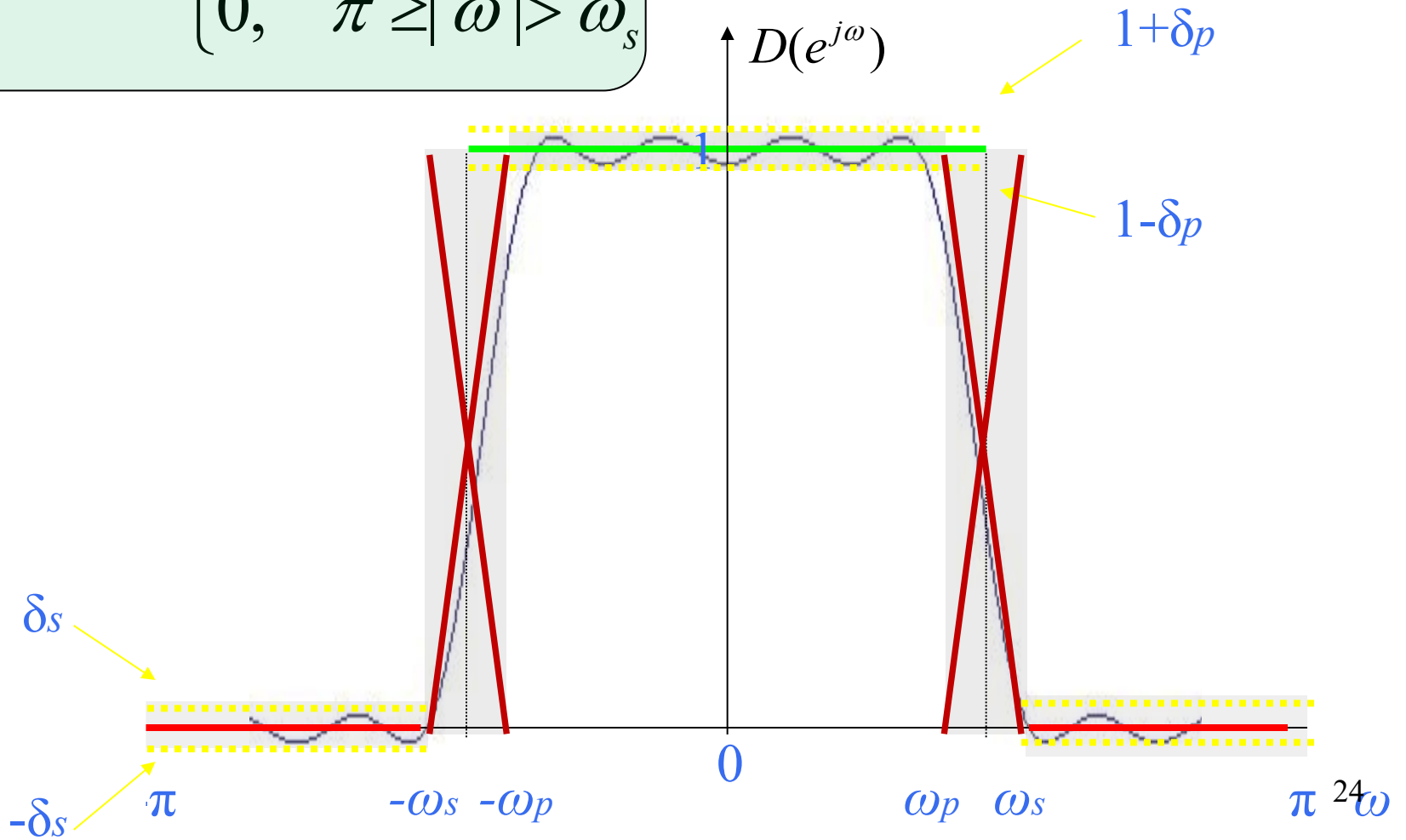
$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_p \\ 0, & \pi \geq |\omega| > \omega_s \end{cases}$$



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Το Πρόβλημα Σχεδίασης ως Πρόβλημα Βελτιστοποίησης

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_p \\ 0, & \pi \geq |\omega| > \omega_s \end{cases}$$



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Δίνεται το πολυώνυμο

$$D(x) = \sum_{n=0}^{N+1} a_n x^n, \quad |x| \leq 1$$

Προσεγγίστε το παραπάνω πολυώνυμο με ένα *FIR* φίλτρο μήκους $2N+1$

Με την έννοια:

- των ελαχίστων τετραγώνων
- του ελάχιστο-μέγιστου

Για κάθε μια από τις παραπάνω προσεγγίσεις, υπολογίστε το μέγιστο σφάλμα προσέγγισης.

Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Πολυώνυμα Chebyshev

$$C_n(x) = \begin{cases} \cos(n \cos^{-1}(x)), & |x| \leq 1 \\ \cosh(n \cosh^{-1}(x)), & |x| > 1 \end{cases}$$

Αναδρομική σχέση ορισμού των πολυωνύμων

$$C_0(x) = 1$$

$$C_1(x) = x$$

$$C_{n+1}(x) = 2xC_n(x) - C_{n-1}(x), \quad n \geq 2$$