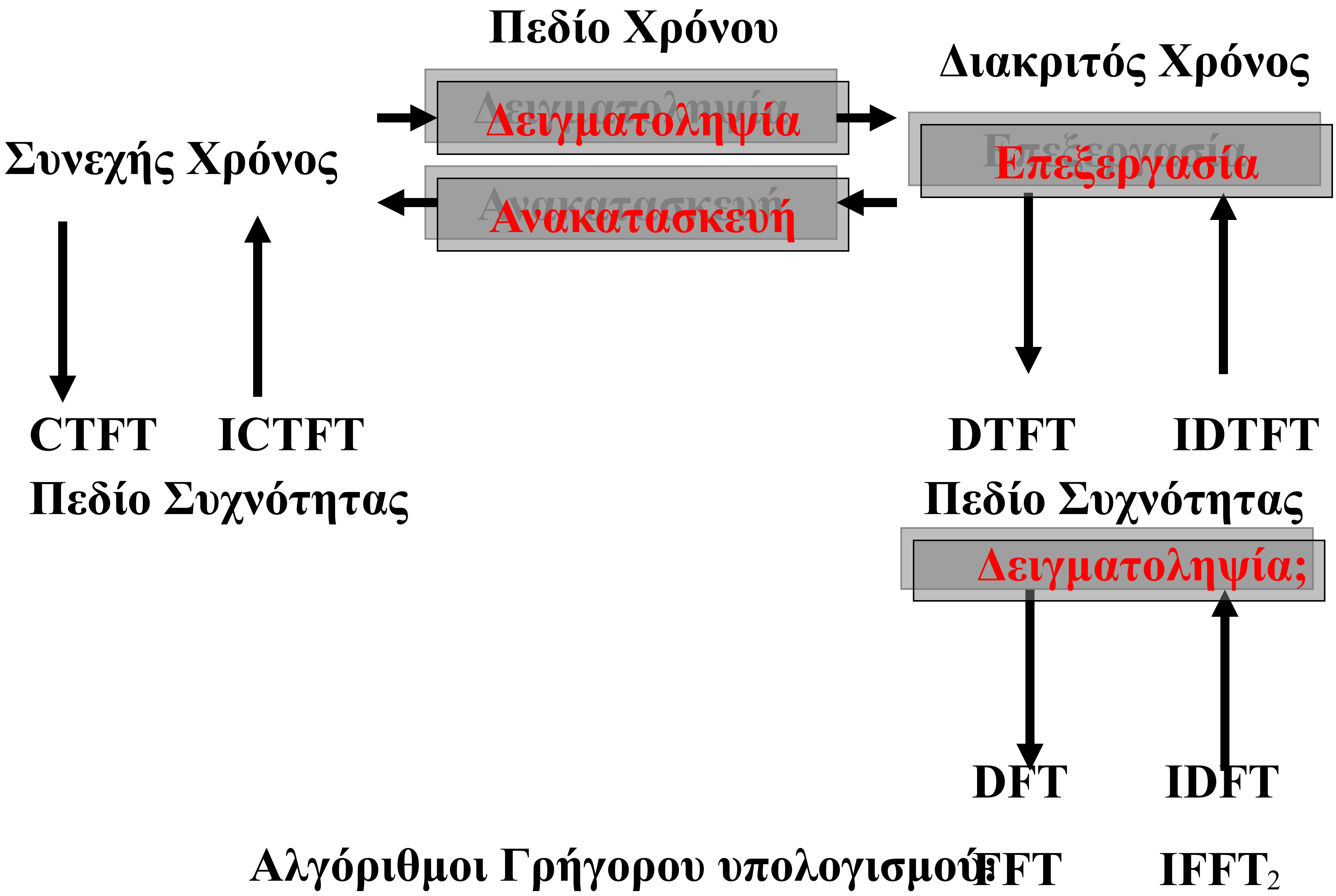
ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

Κυκλική Συνέλιξη

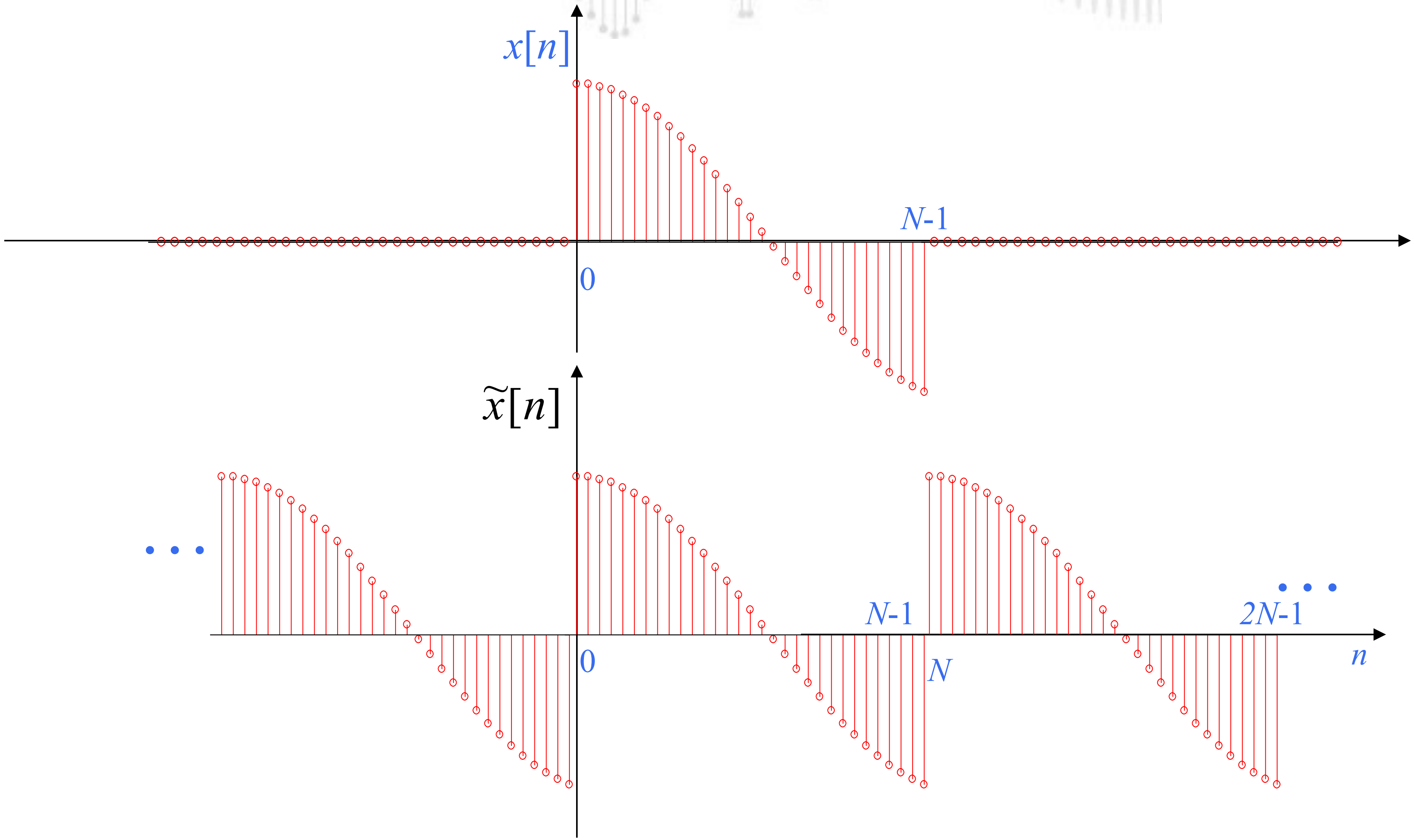
Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Επεξεργασία Σημάτων σε Πραγματικό Χρόνο



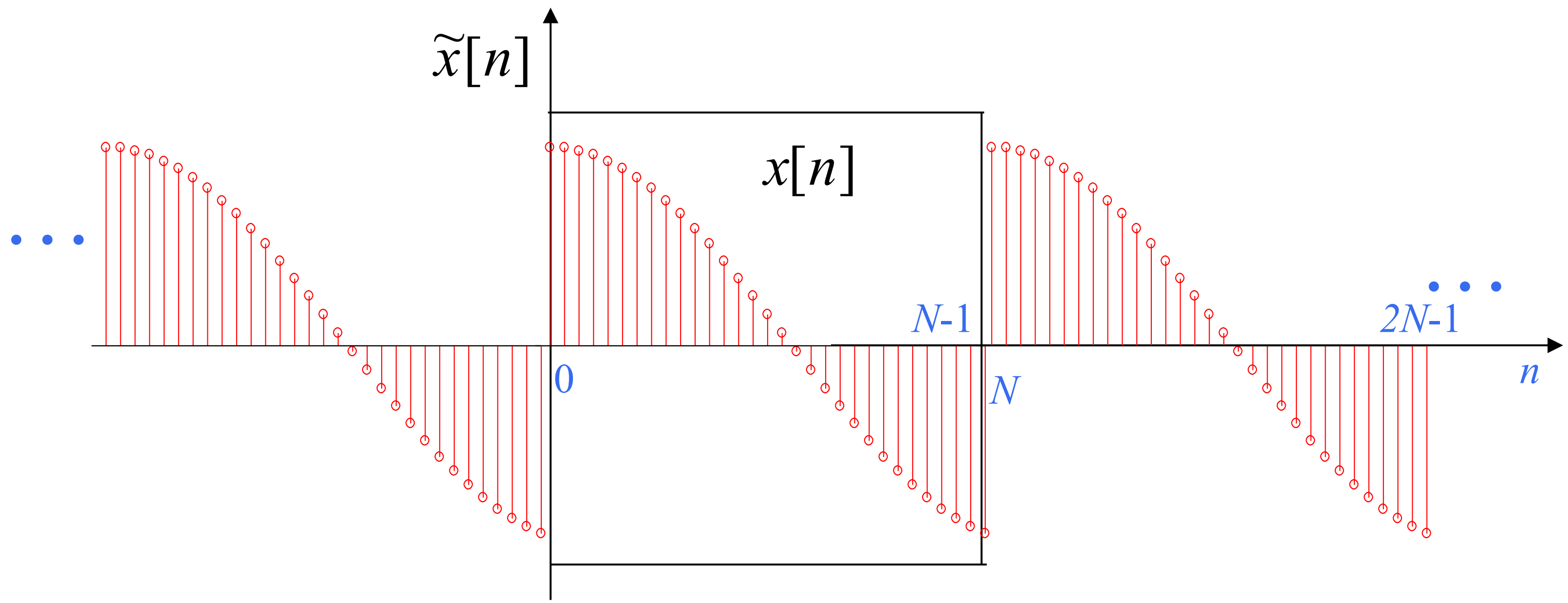
Διακριτού Χρόνου Σειρές Fourier

Περιοδική Επέκταση Σήματος Πεπερασμένης Χρονικής Διάρκειας.



Διακριτού Χρόνου Σειρές Fourier

Περιοδική Επέκταση Σήματος Πεπερασμένης Χρονικής Διάρκειας.



$$\widetilde{x}[n] = x[n \bmod N] = x[n]_N$$

Διακριτού Χρόνου Σειρές Fourier

Περιοδική Επέκταση Σήματος Πεπερασμένης Χρονικής Διάρκειας.

$$\tilde{x}[n] = x[n \bmod N] = x[n]_N$$

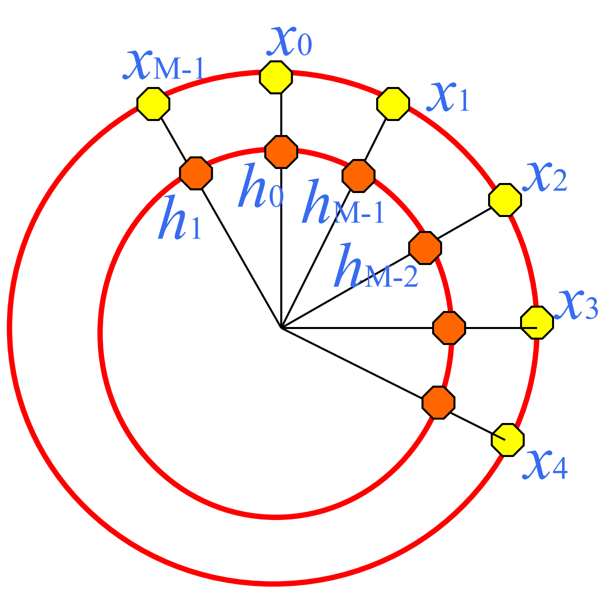
Εξίσωση Σύνθεσης: $$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]e^{\frac{j2\pi nk}{N}}$$

Εξίσωση Ανάλυσης: $$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{-\frac{j2\pi nk}{N}}$$

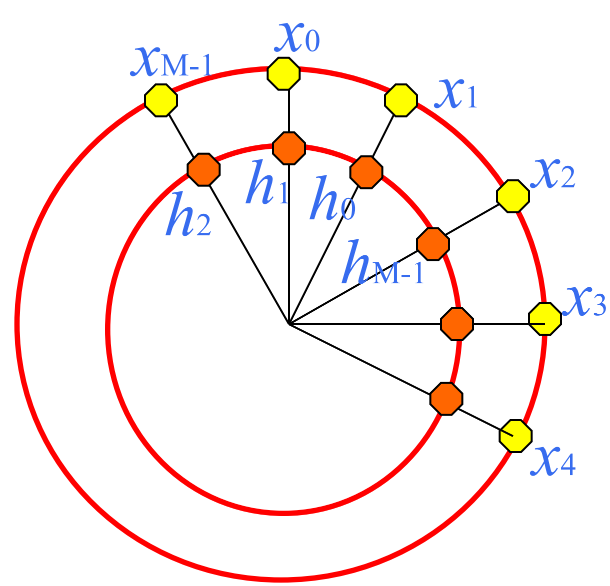
Κυκλική Συνέλιξη

$$y[n] = h[n] \otimes x[n] = \sum_{m=0}^{M-1} h[(n-m) \bmod M]\, x[m]$$

$$y[0] = \sum_{m=0}^{M-1} h[(0-m) \bmod M]\, x[m]$$



$$y[1] = \sum_{m=0}^{M-1} h[(1-m) \bmod M]\, x[m]$$



Κυκλική Συνέλιξη

$$y[0]=\sum_{m=0}^{M-1} h[(0-m)\bmod M]x[m]=$$

$$h[0]x[0]+h[M-1]x[1]+h[M-2]x[2]+\cdots+h[1]x[M-1]$$

$$y[1]=\sum_{m=0}^{M-1} h[(1-m)\bmod M]x[m]=$$

$$h[1]x[0]+h[0]x[1]+h[M-1]x[2]+\cdots+h[2]x[M-1]$$

$$\vdots$$

$$y[M-1]=\sum_{m=0}^{M-1} h[(M-1-m)\bmod M]x[m]=$$

$$h[M-1]x[0]+h[M-2]x[1]+h[M-3]x[2]+\cdots+h[0]x[M-1]$$

Κυκλική Συνέλιξη –Μητρική μορφή

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & h_{M-1} & h_{M-2}\cdots & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_{M-1}\cdots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots\ \cdots & \vdots \\ h_{M-1} & h_{M-2} & h_{M-3}\cdots & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{M-1} \end{bmatrix}$$

ή ισοδύναμα

$$y_M = \mathcal{H}_M x_M$$

Κυκλική Συνέλιξη & Κυκλικά Μητρώα

Κυκλικό Μητρώο

$$\mathcal{H}_M = \begin{bmatrix} h_0 & h_{M-1} & h_{M-2} \cdots & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_{M-1} \cdots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \cdots & \vdots \\ h_{M-1} & h_{M-2} & h_{M-3} \cdots & h_0 \end{bmatrix}$$

Κυκλική Συνέλιξη & Κυκλικά Μητρώα

Το πιο Απλό Κυκλικό Μητρώο

$$\mathcal{U}_M = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}}^{M \text{ στοιχεία}}$$

$\boldsymbol{I}_{M-1}$

Κυκλική Συνέλιξη & Κυκλικά Μητρώα

$$Αν \quad h_M = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{M-1} \end{bmatrix}^t, \; τότε$$

$$\mathcal{U}_M \boldsymbol{h}_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{M-1} \\ h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{M-2} \end{bmatrix}$$

2-η στήλη του Μητρώου $\mathcal{H}_M$

Κυκλική Συνέλιξη & Κυκλικά Μητρώα

$$\mathcal{U}_M^2 \boldsymbol{h}_M = \mathcal{U}_M^2 \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{M-1} \end{bmatrix} = \mathcal{U}_M \begin{bmatrix} h_{M-1} \\ h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{M-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{M-2} \\ h_{M-1} \\ h_0 \\ \vdots \\ h_{M-3} \end{bmatrix}$$

3-η στήλη του Μητρώου $\boldsymbol{\mathcal{H}}_M$

Κυκλική Συνέλιξη & Κυκλικά Μητρώα

$$\mathcal{U}_M^k \boldsymbol{h}_M = \mathcal{U}_M^k \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{M-1} \end{bmatrix} = \mathcal{U}_M^{k-1} \begin{bmatrix} h_{M-1} \\ h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{M-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{M-k} \\ h_{M-(k-1)} \\ h_{M-(k-2)} \\ \vdots \\ h_{M-(k+1)} \end{bmatrix}$$

$(k+1)$ στήλη του Μητρώου $\mathcal{H}_M$

Κυκλική Συνέλιξη & Κυκλικά Μητρώα

Άρα

$$\mathcal{H}_M = [\mathcal{U}_M^0 \boldsymbol{h}_M \;\; \mathcal{U}_M^1 \boldsymbol{h}_M \;\; \mathcal{U}_M^2 \boldsymbol{h}_M \;\; \cdots \;\; \mathcal{U}_M^{M-1} \boldsymbol{h}_M]$$

$$[\boldsymbol{h}_M \;\; \mathcal{U}_M \boldsymbol{h}_M \;\; \mathcal{U}_M^2 \boldsymbol{h}_M \;\; \cdots \;\; \mathcal{U}_M^{M-1} \boldsymbol{h}_M]$$

Το μητρώο $\mathcal{H}_M$:

1. *Έχει σαν ιδιο-διανύσματα τις στήλες του αντιστρόφου του μητρώου* $\mathrm{F}_{M\times M}$ *του Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier και*
2. *ιδιοτιμές, τις τιμές του ΔMF της κρουστικής απόκρισης* $h[n]$, *δηλαδή τον ΔMF του διανύσματος*

$$\boldsymbol{h}_M = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{M-1} \end{bmatrix}^t$$

Κυκλική Συνέλιξη & Κυκλικά Μητρώα

$$\mathcal{F}_{M\times M}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\ldots & 1 \\ 1 & e^{-\frac{j2\pi}{M}} & e^{-\frac{j4\pi}{M}}\ldots & e^{-\frac{j2(M-1)\pi}{M}} \\ \vdots & \vdots & \vdots\ \ldots & \vdots \\ 1 & e^{-\frac{j2(M-1)\pi}{M}} & e^{-\frac{j4(M-1)\pi}{M}}\ldots & e^{-\frac{j2(M-1)^2\pi}{M}} \end{bmatrix}$$

Μητρώο DFT

$$\mathcal{F}_{M\times M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\ldots & 1 \\ 1 & e^{-\frac{j2\pi}{M}} & e^{-\frac{j4\pi}{M}} \ldots & e^{-\frac{j2(M-1)\pi}{M}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \;\ldots & \vdots \\ 1 & e^{-\frac{j2(M-1)\pi}{M}} & e^{-\frac{j4(M-1)\pi}{M}} \ldots & e^{-\frac{j2(M-1)^2\pi}{M}} \end{bmatrix}$$

Μητρώο DFT

Θα πρέπει να θυμηθούμε τώρα ότι, αν

$$\mathcal{F}_{M\times M} = [f_0 \;\; f_1 \;\; f_2 \cdots f_{M-1}] \;\; , \textit{τότε}$$

$$f_k^{*t} f_l = \begin{cases} M, & \alpha\nu\; k = l \\ 0, & \alpha\nu\; k \neq l \end{cases} \qquad \textit{(Ορθογωνιότητα)}$$

και ότι

$$\mathcal{F}^{*}_{M\times M}\mathcal{F}_{M\times M} = M\boldsymbol{I}_{M\times M}$$

ή ισοδύναμα:

$$\mathcal{F}^{-1}_{M\times M} = \frac{1}{M}\mathcal{F}^{*}_{M\times M}$$

Κυκλική Συνέλιξη & Κυκλικά Μητρώα

Παίρνοντας υπόψη μας τα παραπάνω έχουμε ότι:

$$\mathcal{H}_M = \mathcal{F}_M^{-1} \mathcal{D} \mathcal{F}_M$$

όπου $$\mathcal{D} = diag(H[0]\ H[1]\ \cdots\ H[M-1])$$

ΑΡΑ!!!! $$y_M = \mathcal{H}_M x_M = \mathcal{F}_M^{-1} \mathcal{D} \mathcal{F}_M x_M$$

Κυκλική Συνέλιξη & Κυκλικά Μητρώα

ΑΡΑ!!!! $$y_M = \mathcal{H}_M x_M = \mathcal{F}_M^{-1} \boxed{\mathcal{D}\mathcal{F}_M x_M}$$

$$\mathcal{F}_M x_M = X_M$$

$$X_M = [X[0] \;\; X[1] \cdots X[M-1]]^t$$

$$\mathcal{D} = diag(H[0] \; H[1] \;\; \cdots \;\; H[M-1])$$

Κυκλική Συνέλιξη & Κυκλικά Μητρώα

$$\mathcal{D}_M = \mathcal{F}_M h_M$$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_M = [H[0]\ H[1]\ \cdots\ H[M-1]]^t$$

$$\mathcal{F}_M x_M = X_M$$

$$X_M = [X[0]\ \ X[1] \cdots X[M-1]]^t$$

Κυκλική Συνέλιξη & Κυκλικά Μητρώα

$$\mathcal{D}\mathcal{F}_M x_M = \mathcal{D}_M \otimes X_M = \begin{bmatrix} H[0] \\ H[1] \\ H[2] \\ \vdots \\ H[M-1] \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \vdots \\ X[M-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y[0] \\ Y[1] \\ Y[2] \\ \vdots \\ Y[M-1] \end{bmatrix}$$

ΑΡΑ!!!!

$$y_M = \mathcal{H}_M x_M = \mathcal{F}_M^{-1} \boxed{\mathcal{D}\mathcal{F}_M x_M} = \mathcal{F}_M^{-1} Y_M$$

Υπολογισμός Κυκλικής Συνέλιξης

- *Υπολογισμός στο ΠΕΔΙΟ του ΧΡΟΝΟΥ:* $y_M = \mathcal{H}_M x_M$

  Υπολογιστικό κόστος:

  $$\mu_r(M) = M^2 \qquad \textit{πραγματικοί πολλαπλασιασμοί}$$

  $$a_r(M) = M(M-1) \qquad \textit{πραγματικές προσθέσεις.}$$

- *Υπολογισμός στο ΠΕΔΙΟ της ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ & επιστροφή στο ΠΕΔΙΟ του ΧΡΟΝΟΥ:* $y_M = \mathcal{F}_M^{-1} \mathcal{D} \mathcal{F}_M x_M = \mathcal{F}_M^{-1} Y_M$

  Υπολογιστικό κόστος:

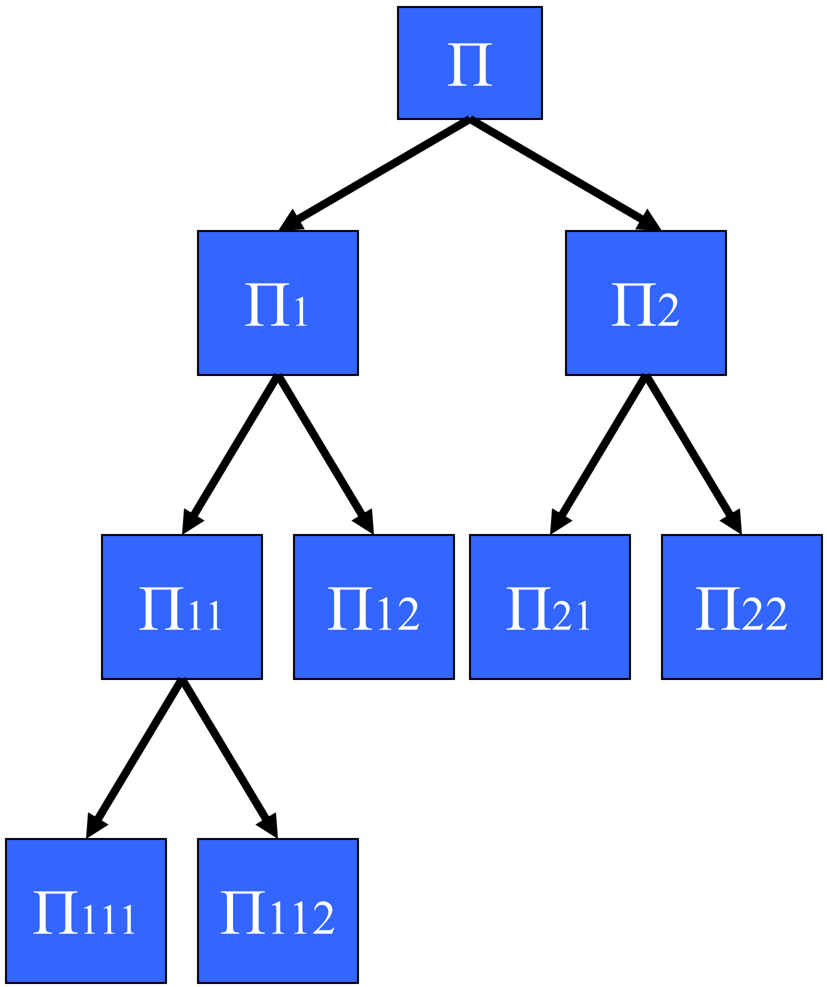
  $$\mu_c(M) = 3 \times M^2 \qquad \textit{μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί}$$

  $$a_c(M) = 3 \times M(M-1) \qquad \textit{μιγαδικές προσθέσεις.}$$

Ταχύς Μετασχηματισμός Fourier (FFT)

- *Αποδοτικές Υλοποιήσεις του ΔΜF*

  Η Στρατηγική του Διαίρει και Βασίλευε



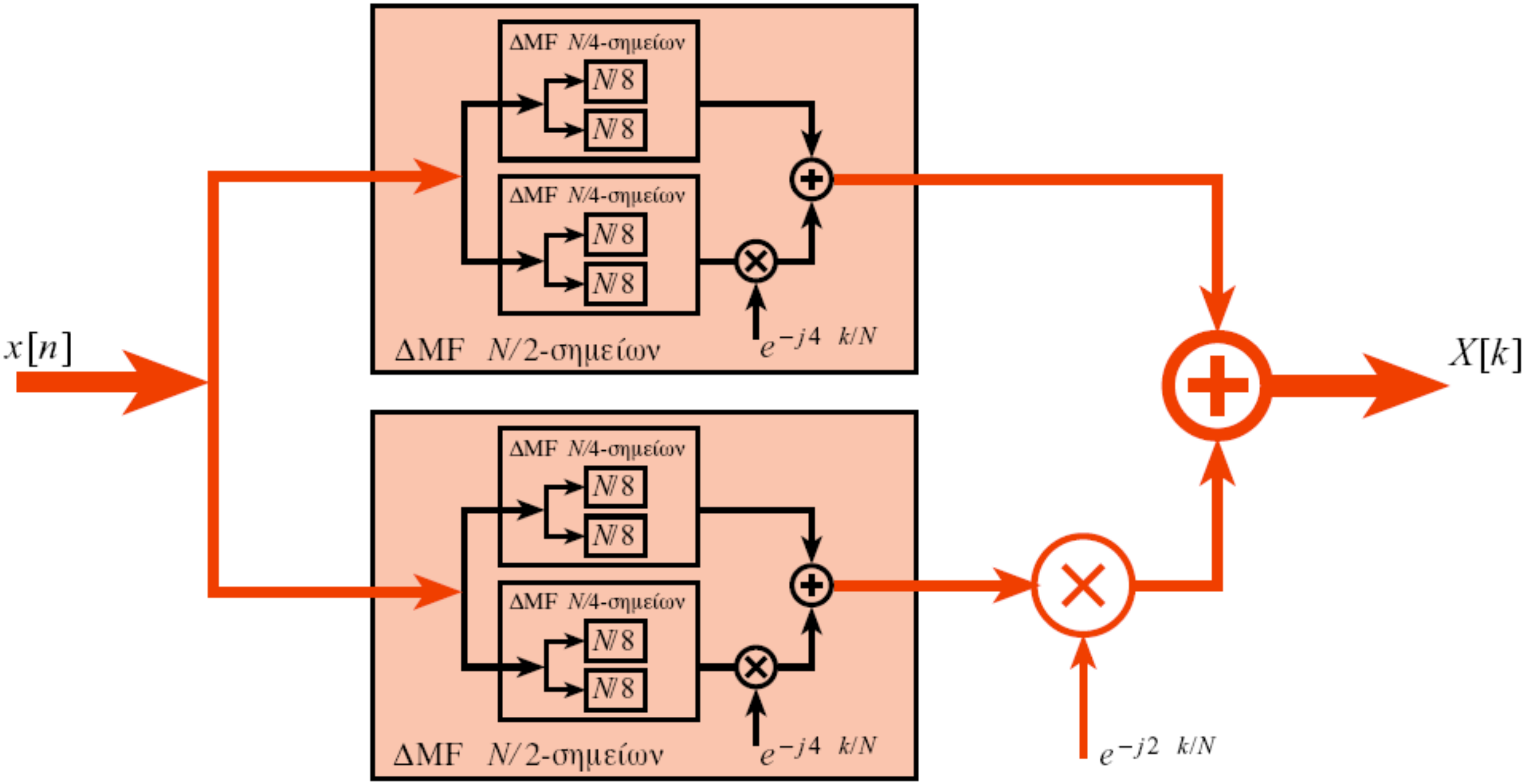
Ταχύς Μετασχηματισμός Fourier (FFT)

Αποδοτική Υλοποίηση του ΔΜF με Αποδεκατισμό στο Χρόνο

Αποδοτική Υλοποίηση του ΔΜF με Αποδεκατισμό στή Συχνότητα

$$X[k] = \sum_{n=0}^{M-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi nk}{M}}, \; k = 0,1,2,\ldots, M-1, \; M = 2^m$$

Υλοποίηση FFT



Υπολογιστικό Κόστος Ταχύ Μετασχηματισμού Fourier (FFT)

Υπολογιστικό κόστος ΔΜF Μήκους Μ συναρτήσει 2 ΔΜF μήκους Μ/2 :

$$\mu_c(m) = 2\mu_c(m-1) + 2^{m-1} \quad \textit{μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί}$$

$$a_c(m) = 2a_c(m-1) + 2^{m} \quad \textit{μιγαδικές προσθέσεις.}$$

Συνολικό Υπολογιστικό κόστος:

$$\mu_c(m) = m2^{m-1} = \frac{M}{2}\log_2(M)$$

$$a_c(m) = m2^{m} = M\log_2(M)$$

Υπολογιστικό Κόστος Ταχύ Μετασχηματισμού Fourier (FFT)

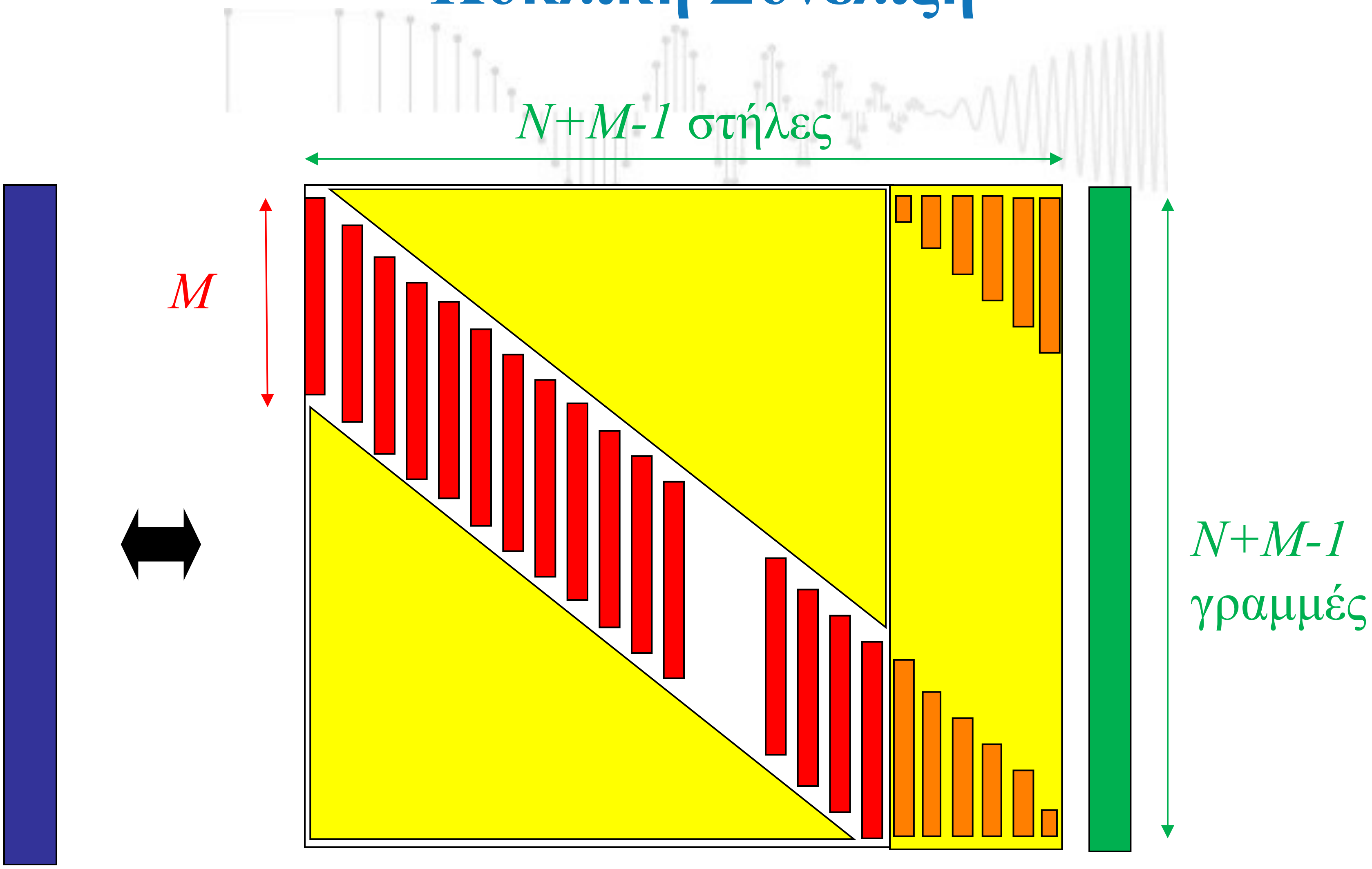
N	$\mu_c(N)$	$\alpha_c(N)$	$\mu_r(N)$	$\alpha_r(N)$	$4N^2$
2	0	2	0	4	16
4	4	8	16	16	64
8	16	24	64	48	256
16	48	64	192	128	1024
32	128	160	512	320	4096
64	320	384	1280	768	16384
128	768	896	3072	1792	65536
256	1792	2048	7168	4096	262144
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Κυκλική Συνέλιξη & Κυκλικά Μητρώα

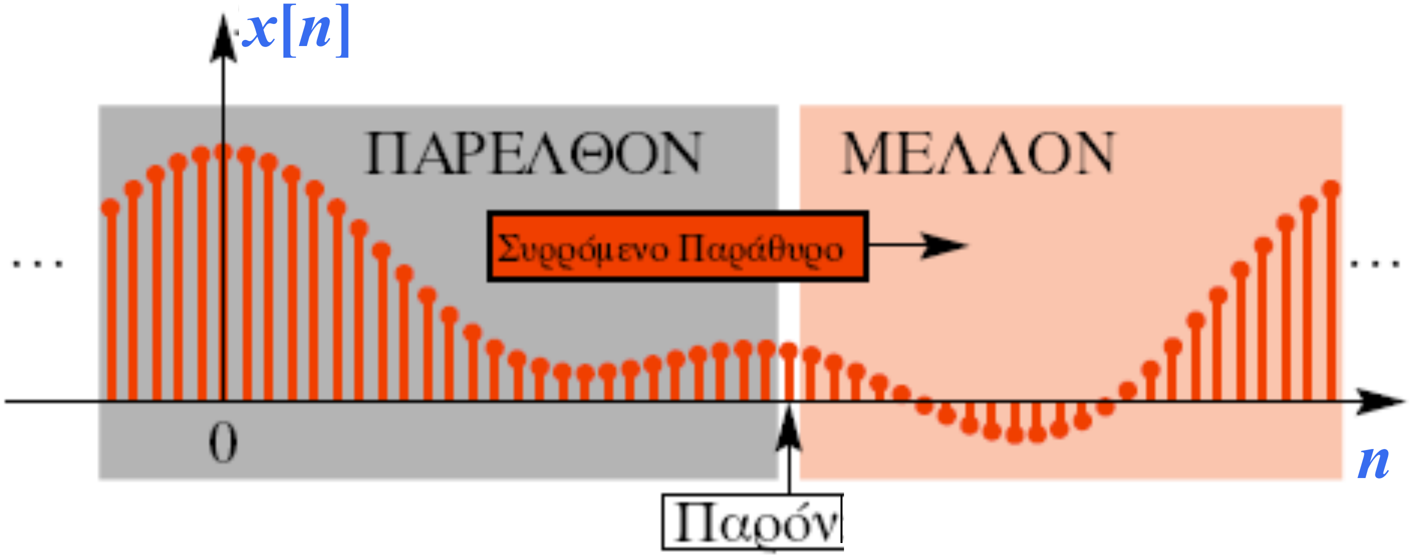
Κυκλικό Μητρώο

$$\mathcal{H}_M = \begin{bmatrix} h_0 & h_{M-1} & h_{M-2} \cdots & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_{M-1} \cdots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \cdots & \vdots \\ h_{M-1} & h_{M-2} & h_{M-3} \cdots & h_0 \end{bmatrix}$$

Κυκλική Συνέλιξη



Γραμμική Συνέλιξη



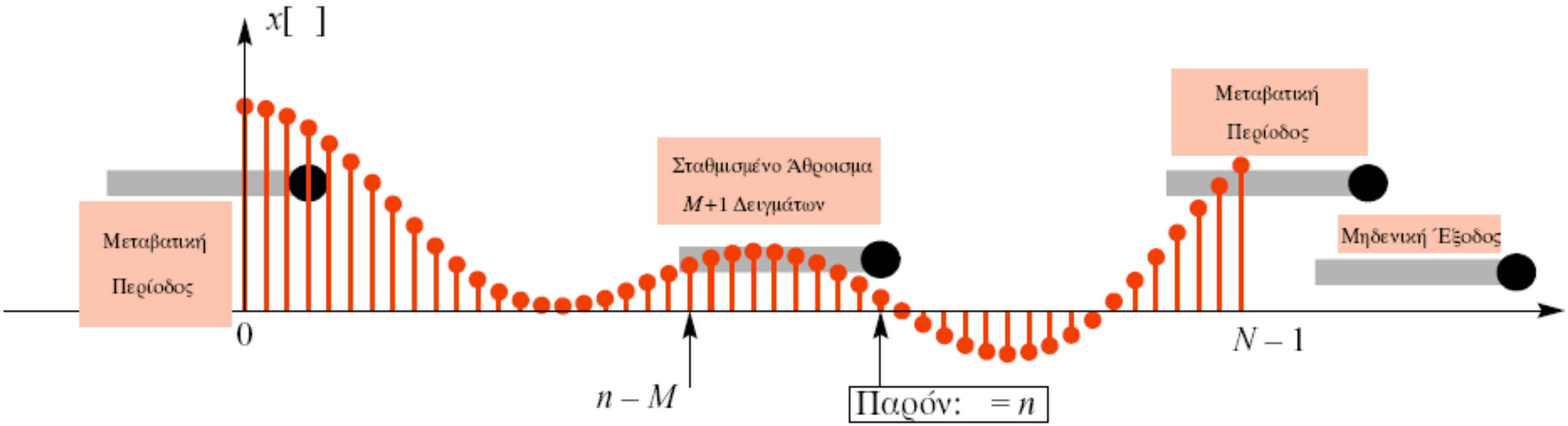
$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{m=0}^{M-1} h[(n-m)]x[m]$$

Γραμμική Συνέλιξη

Υποθέσεις:

1. Το μήκος της κρουστικής απόκρισης του αιτιατού συστήματος είναι M.

2. Το σήμα που θέλουμε να επεξεργαστούμε με το σύστημα έχει μήκος N δείγματα, με N>>M



Γραμμική Συνέλιξη

1-η Μεταβατική Περίοδος:

$$y[0] = h[0]x[0]$$

$$y[1] = h[1]x[0] + h[0]x[1]$$

$$\vdots$$

$$y[M-2] = h[M-2]x[0] + h[M-3]x[1] + \cdots + h[0]x[M-2]$$

Γραμμική Συνέλιξη

Περίοδος Μόνιμης Κατάστασης:

$$y[M-1] = h[M-1]x[0] + h[M-2]x[1] + \cdots + h[0]x[M-1]$$

$$y[M] = h[M-1]x[1] + h[M-2]x[2] + \cdots + h[0]x[M]$$

$$y[M+1] = h[M-1]x[2] + h[M-2]x[3] + \cdots + h[0]x[M+1]$$

$$\vdots$$

$$y[N-1] = h[M-1]x[N-M] + h[M-2]x[N-M-1] + \cdots + h[0]x[N-1]$$

Γραμμική Συνέλιξη

2-η Μεταβατική Περίοδος:

$$y[N] = h[M-1]x[N-M-1] + h[M-2]x[N-M-2] + \cdots + h[1]x[N-1]$$

$$\vdots$$

$$y[M+N-3] = h[M-1]x[N-2] + h[M-2]x[N-1]$$

$$y[M+N-2] = h[M-1]x[N-1]$$

Γραμμική Συνέλιξη

1-η Μεταβατική Περίοδος:

N στήλες

$$
{}_1\mathcal{T}_{(M-1)\times N} = \left[\begin{array}{ccccc|ccc}
h_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
h_1 & h_0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & h_1 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
h_{M-3} & \vdots & \ddots & h_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
h_{M-2} & h_{M-3} & \cdots & h_1 & h_0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right]
$$

Γραμμική Συνέλιξη

Περίοδος Μόνιμης Κατάστασης:

$$
\begin{array}{c}
N \text{ στήλες} \\
{}_{2}\boldsymbol{\mathcal{T}}_{(N-M+1)\times N} = \begin{bmatrix}
h_{M-1} & \cdots & h_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & h_{M-1} & \cdots & h_0 & 0 & \ddots & \vdots \\
0 & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & \ddots & 0 & h_{M-1} & \cdots & h_0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & h_{M-1} & \cdots & h_0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

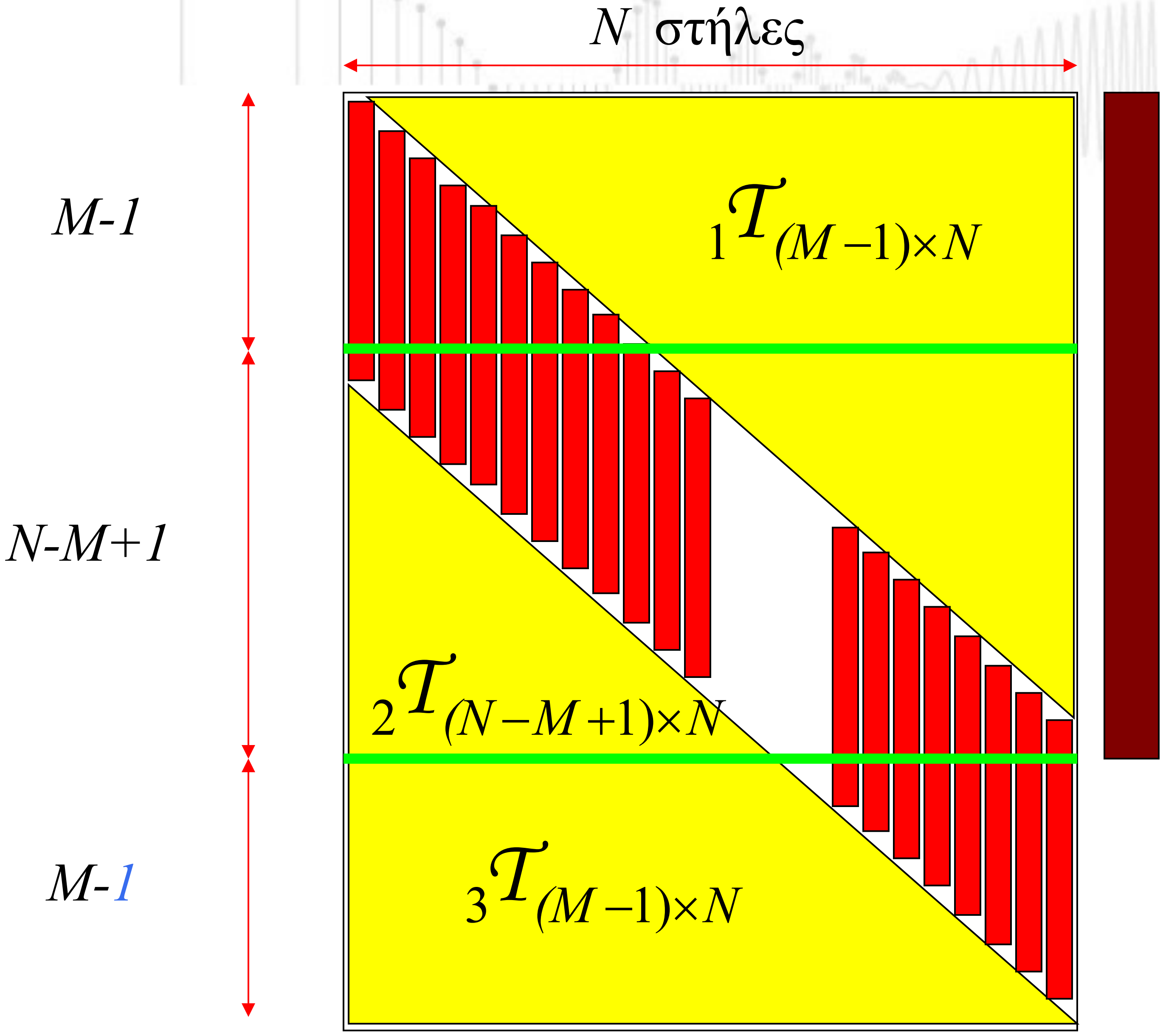
Γραμμική Συνέλιξη

2-η Μεταβατική Περίοδος:

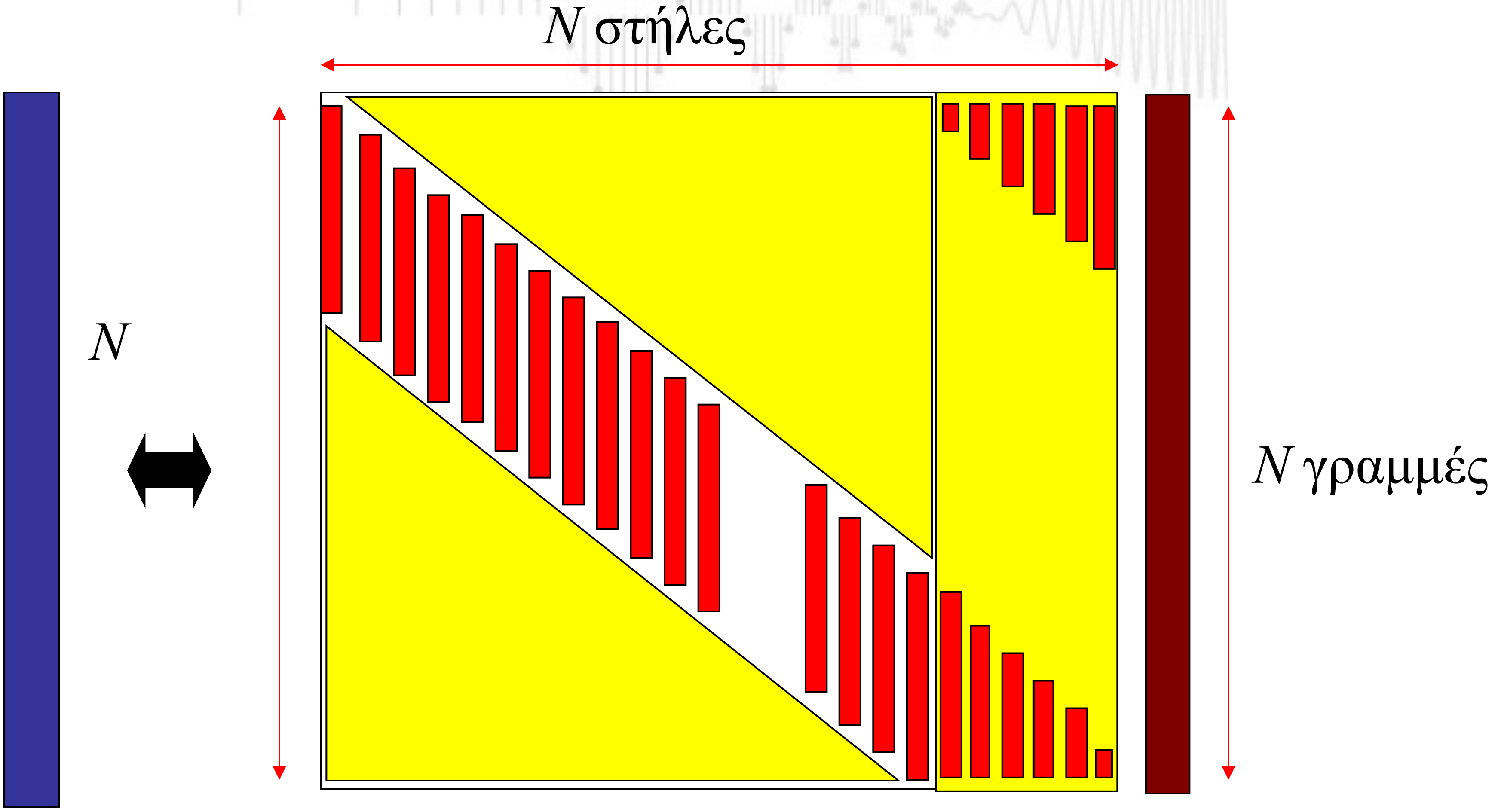
N στήλες

$$
{}_3\mathcal{T}_{(M-1)\times N} = \left[\begin{array}{ccc|ccccc}
0 & \cdots & 0 & h_{M-1} & h_{M-2} & h_{M-3} & \cdots & h_1 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & h_{M-1} & h_{M-2} & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \vdots & 0 & \ddots & h_{M-1} & \ddots & h_{M-3} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & 0 & \ddots & h_{M-2} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & h_{M-1}
\end{array}\right]
$$

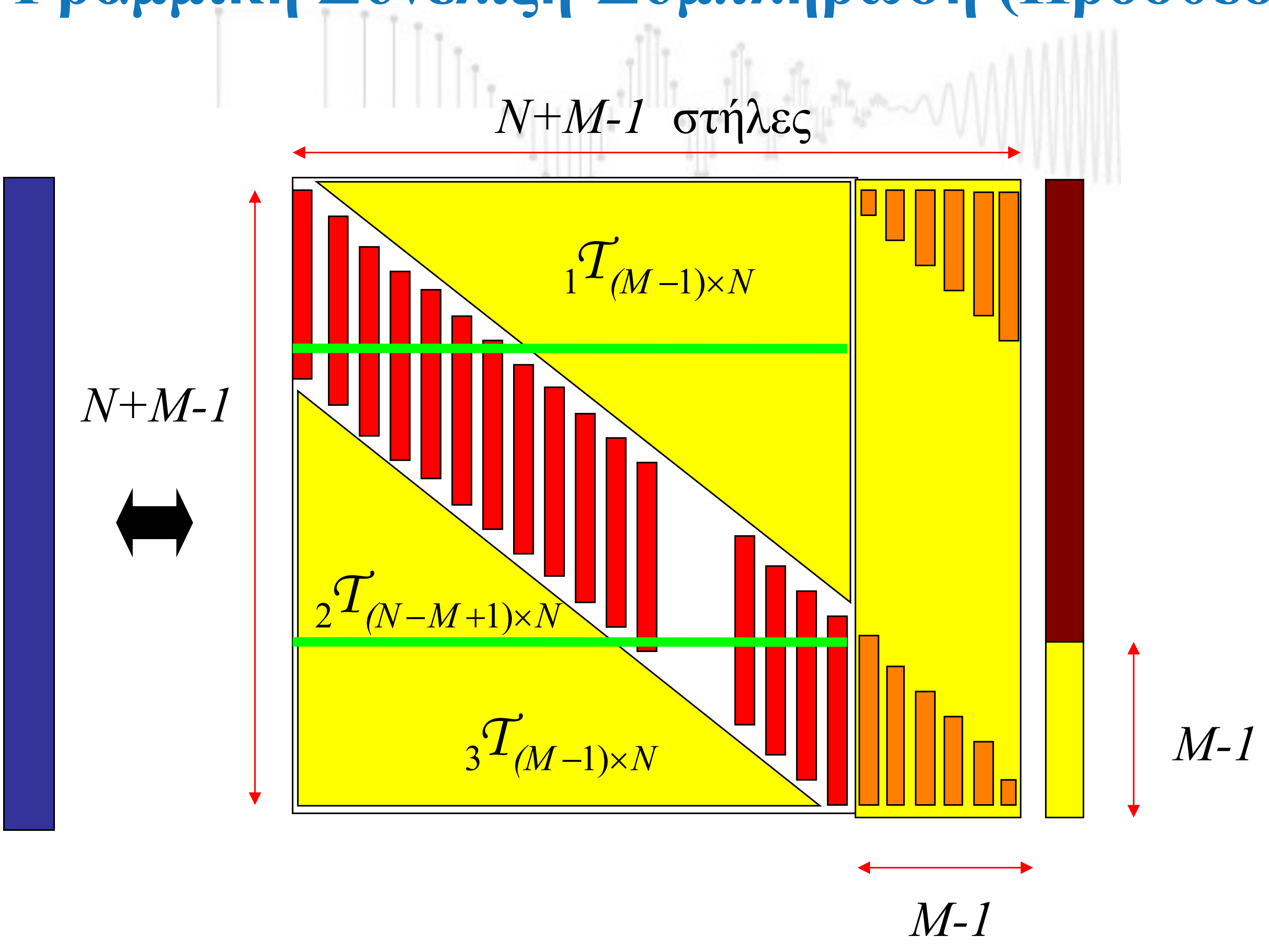
Γραμμική Συνέλιξη



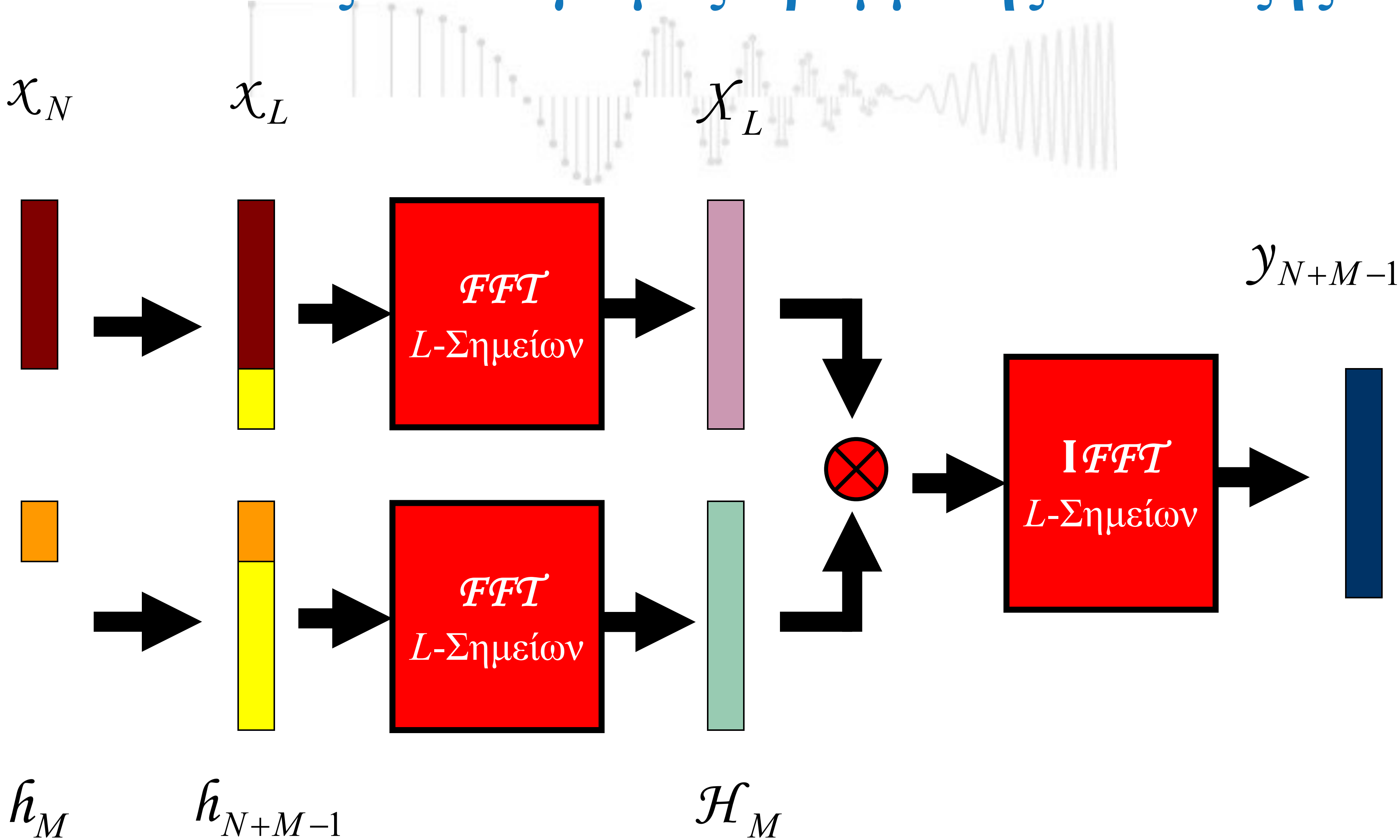
Κυκλική Συνέλιξη-Συμπλήρωση



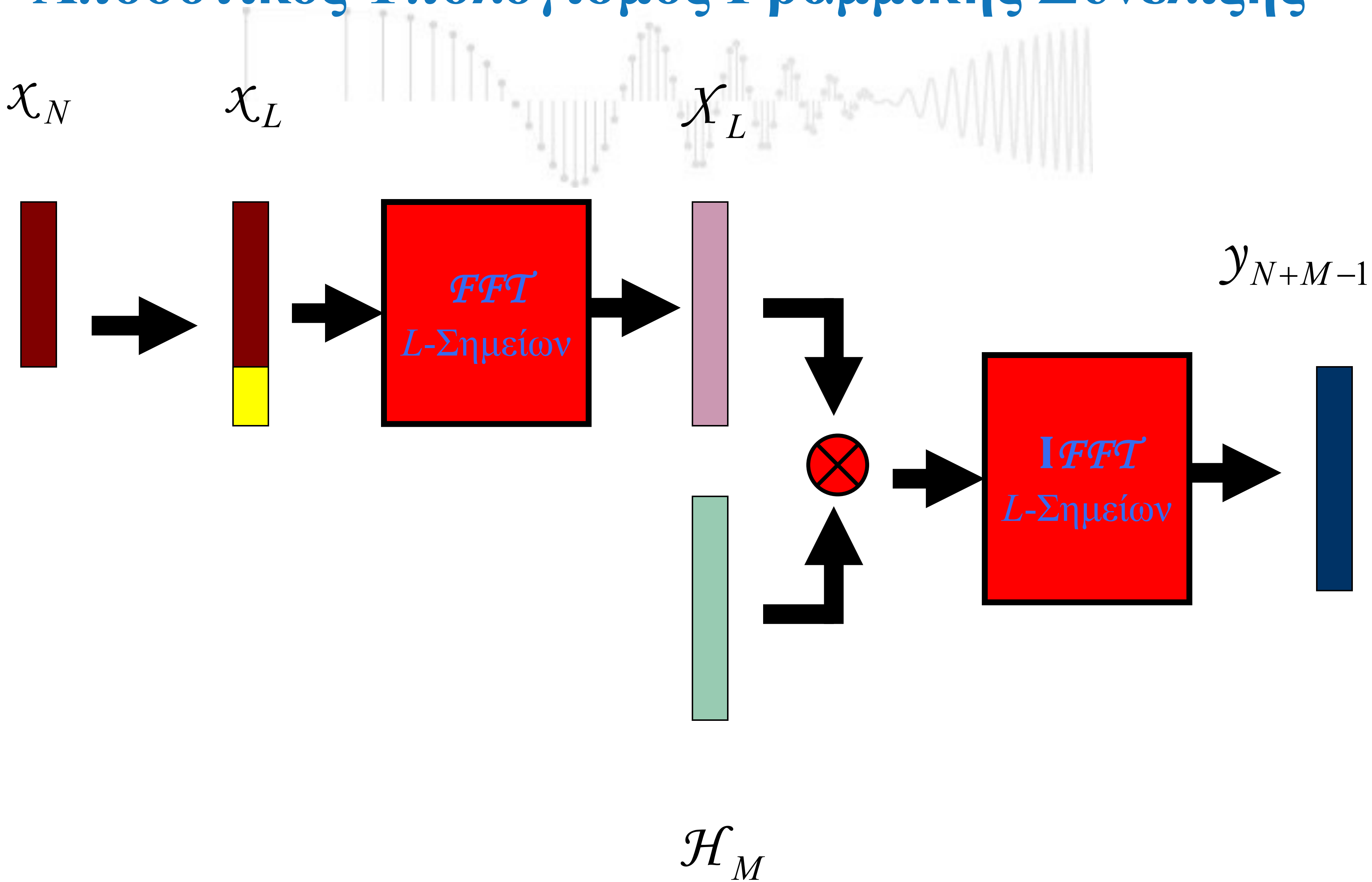
Γραμμική Συνέλιξη-Συμπλήρωση (Πρόσθεση)



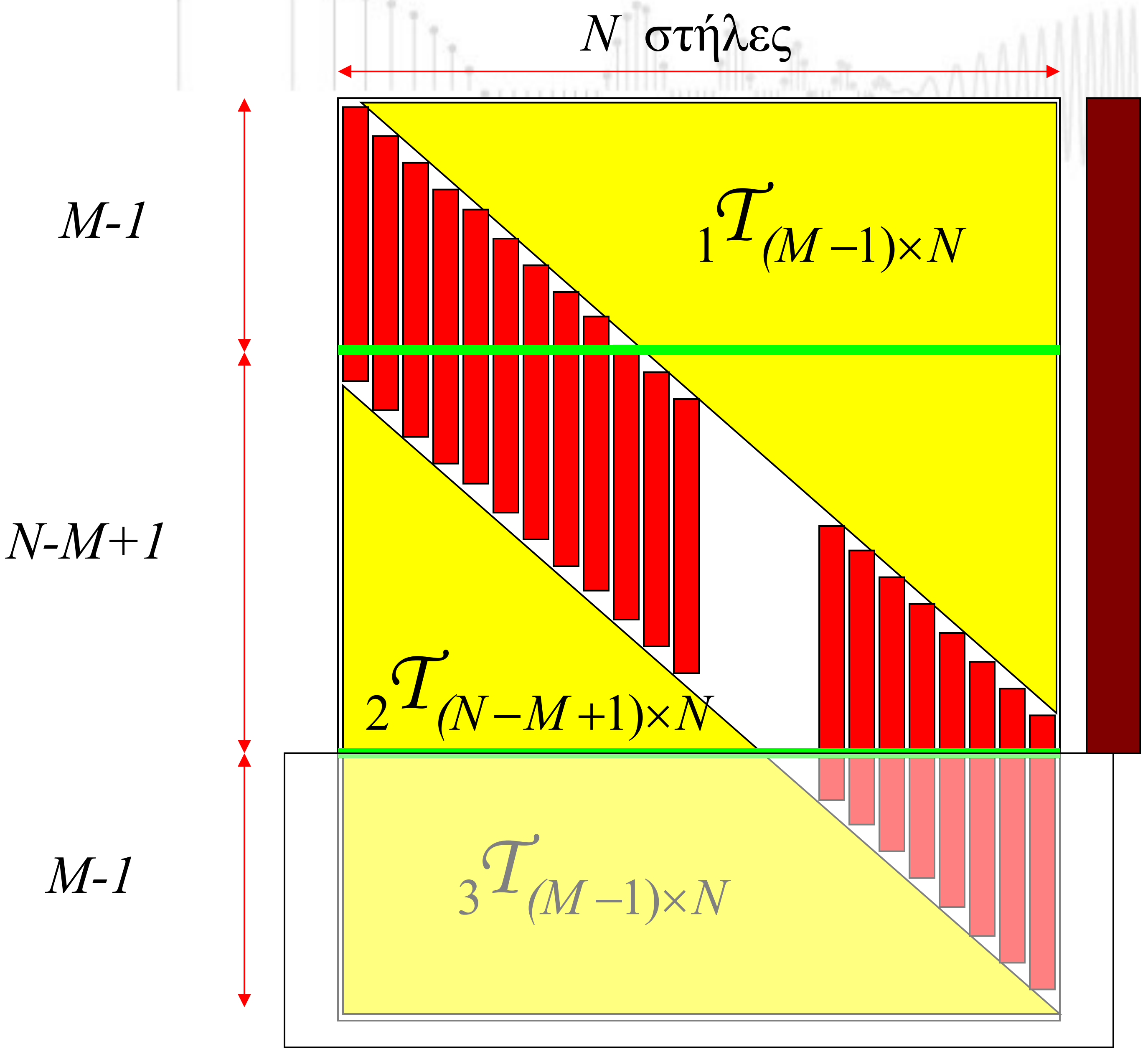
Αποδοτικός Υπολογισμός Γραμμικής Συνέλιξης



Αποδοτικός Υπολογισμός Γραμμικής Συνέλιξης

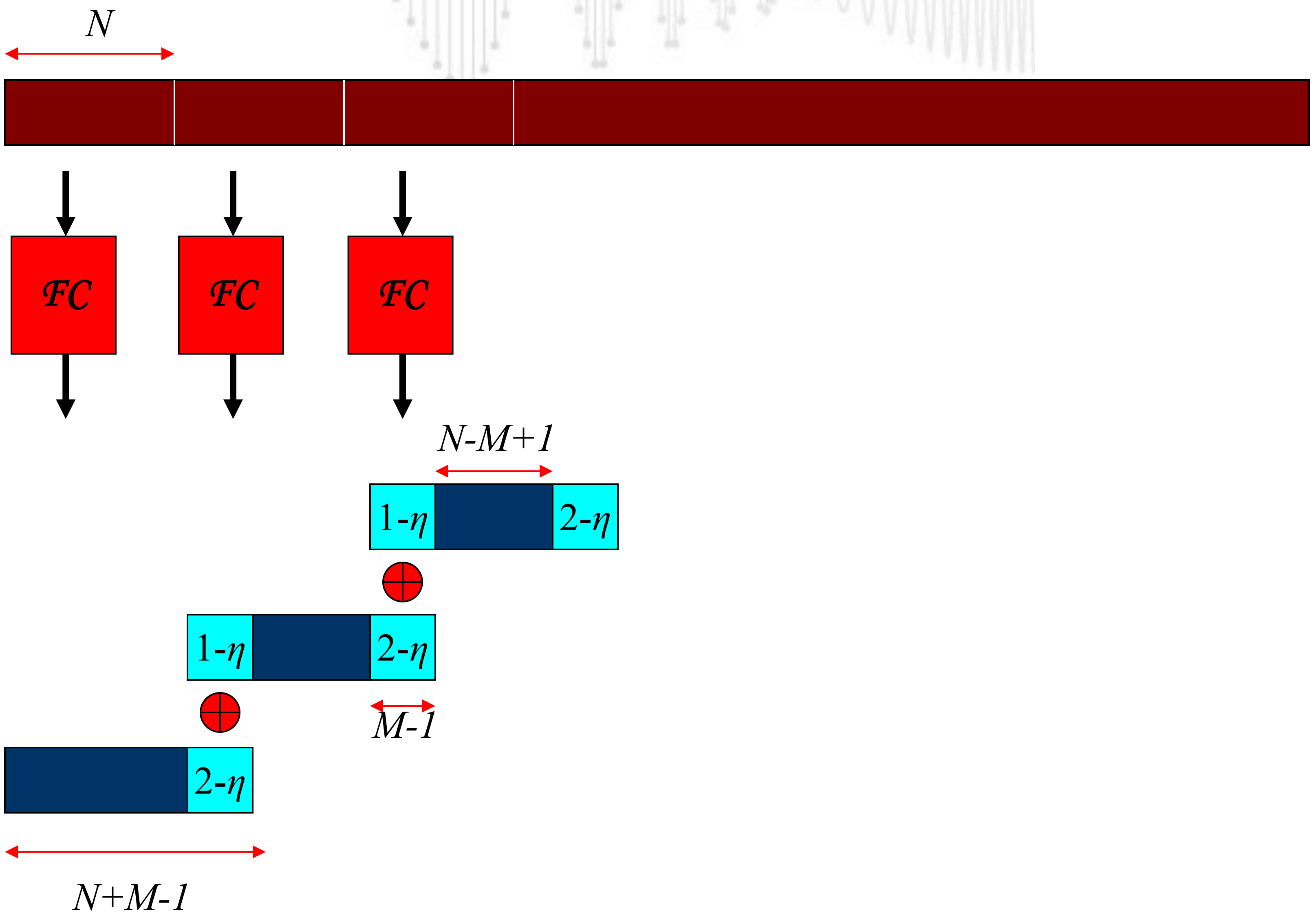


Γραμμική Συνέλιξη-Επικάλυψης & Άθροισης

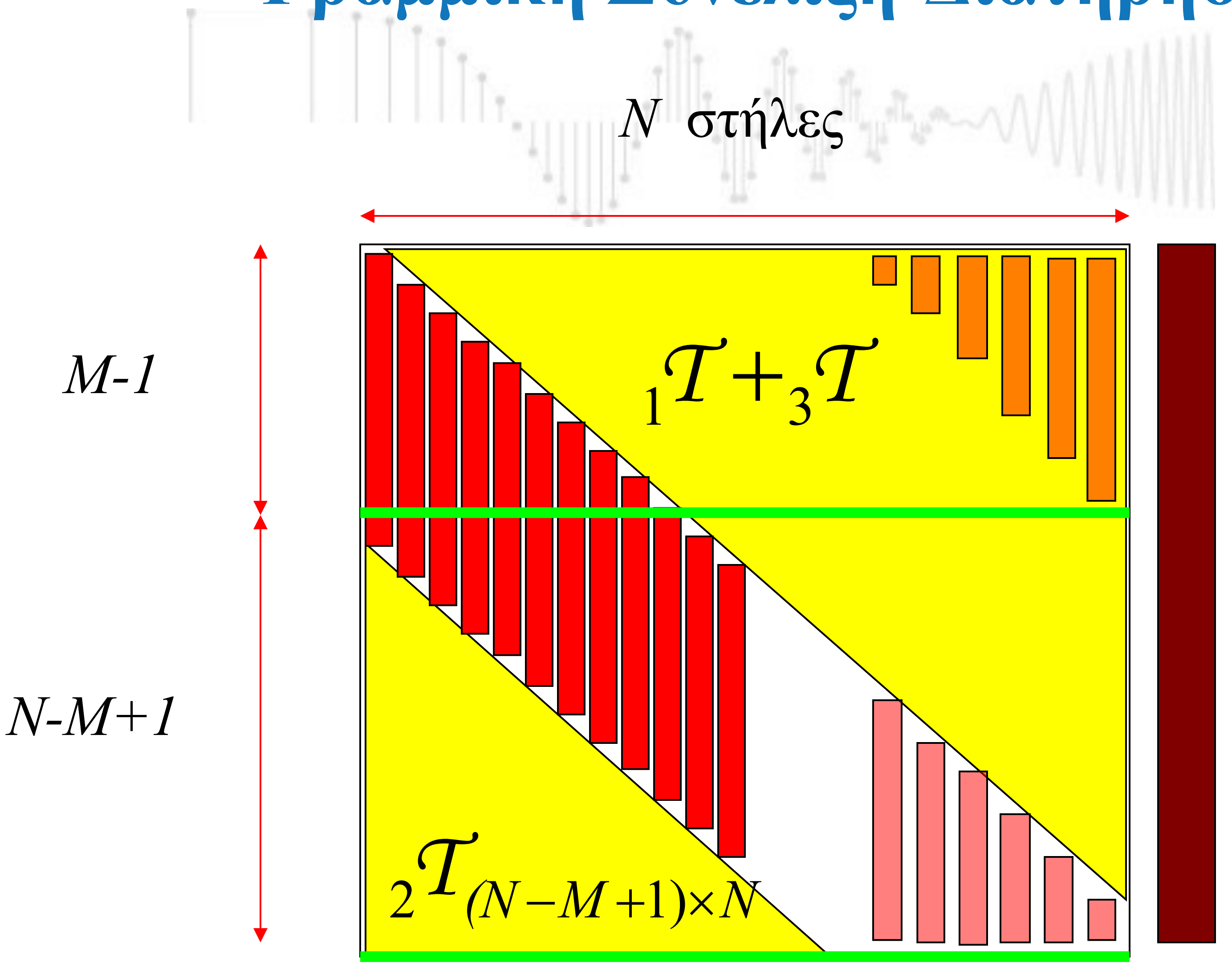


Μέθοδοι Υλοποίησης Γραμμικής Συνέλιξης

Μέθοδος Επικάλυψης & Άθροισης

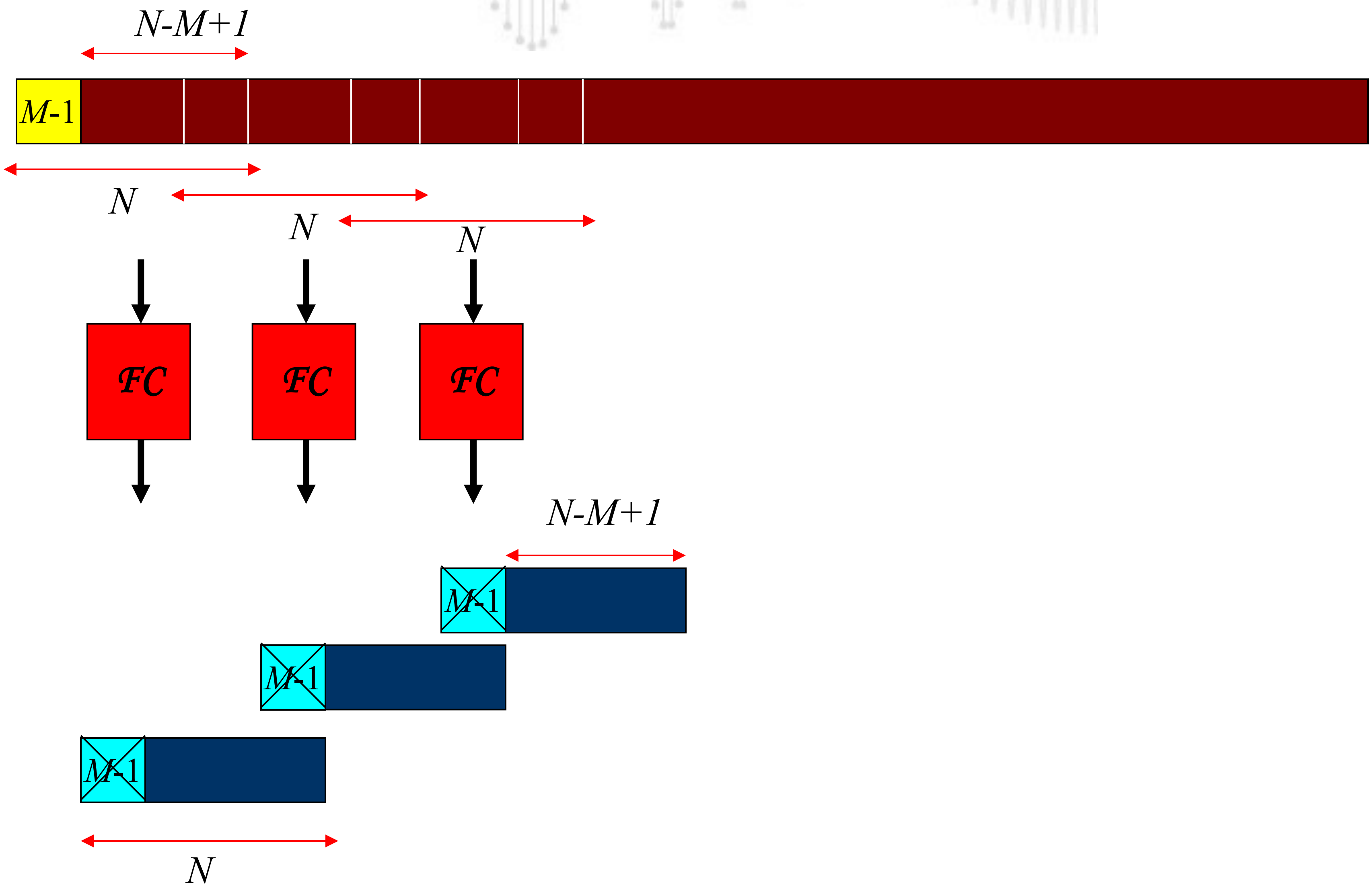


Γραμμική Συνέλιξη-Διατήρηση



Μέθοδοι Υλοποίησης Γραμμικής Συνέλιξης

Μέθοδος Επικάλυψης & Διατήρησης



Κβαντικός Μετασχηματισμός Fourier

Εφαρμογές της ΨΕΣ: **Μάθημα Επιλογής**

Quantum Computer **Peter Shor 1959**

Quantum Fourier Transform

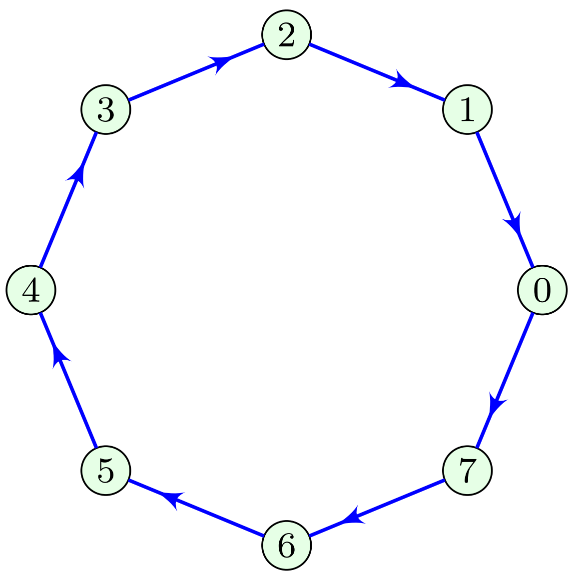
Αλγόριθμοι Γρήγορου υπολογισμού

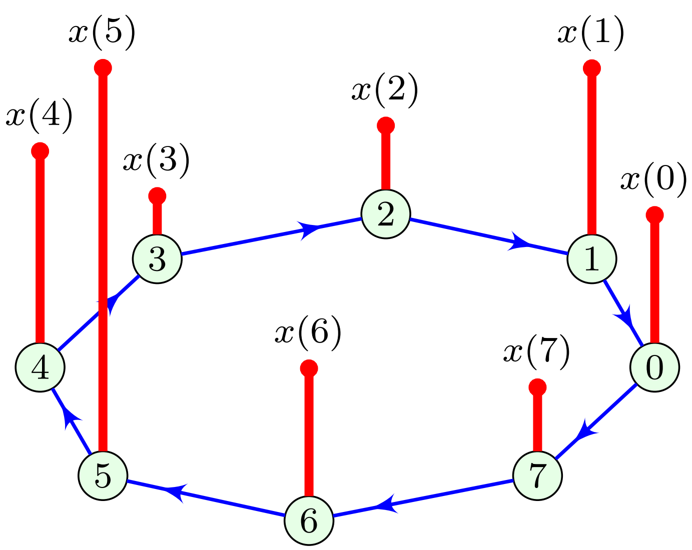
Πολυπλοκότητα FFT (IFFT): $N\log_2(N)$

Πολυπλοκότητα QFT (IQFT): $\log_2(N)^2$

Επέκταση Κυκλικής Συνέλιξης

Επεξεργασία Γραφημάτων: **Νέο Μάθημα Επιλογής**





(α): Κυκλικό Γράφημα και

(β): η αναπαράσταση ενός περιοδικού σήματος διακριτού χρόνου πάνω στο γράφημα

Επέκταση Κυκλικής Συνέλιξης

Επεξεργασία Γραφημάτων: **Νέο Μάθημα Επιλογής**