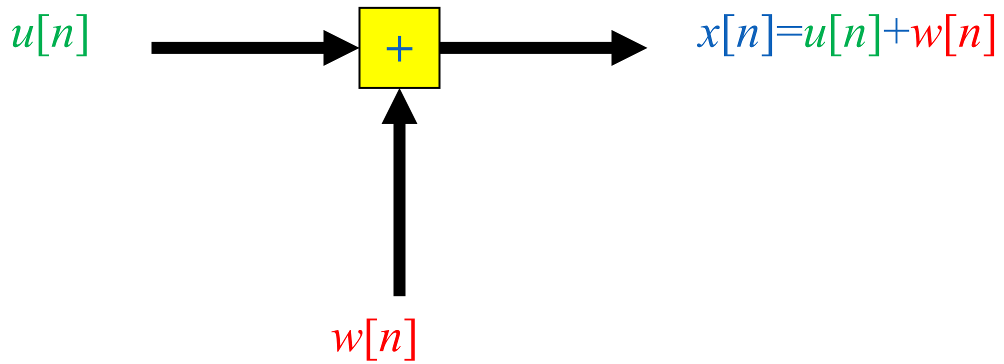
ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων

Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Βασικό Μοντέλο

“Σήμα Πληροφορίας” “Παρατηρούμενο Σήμα”

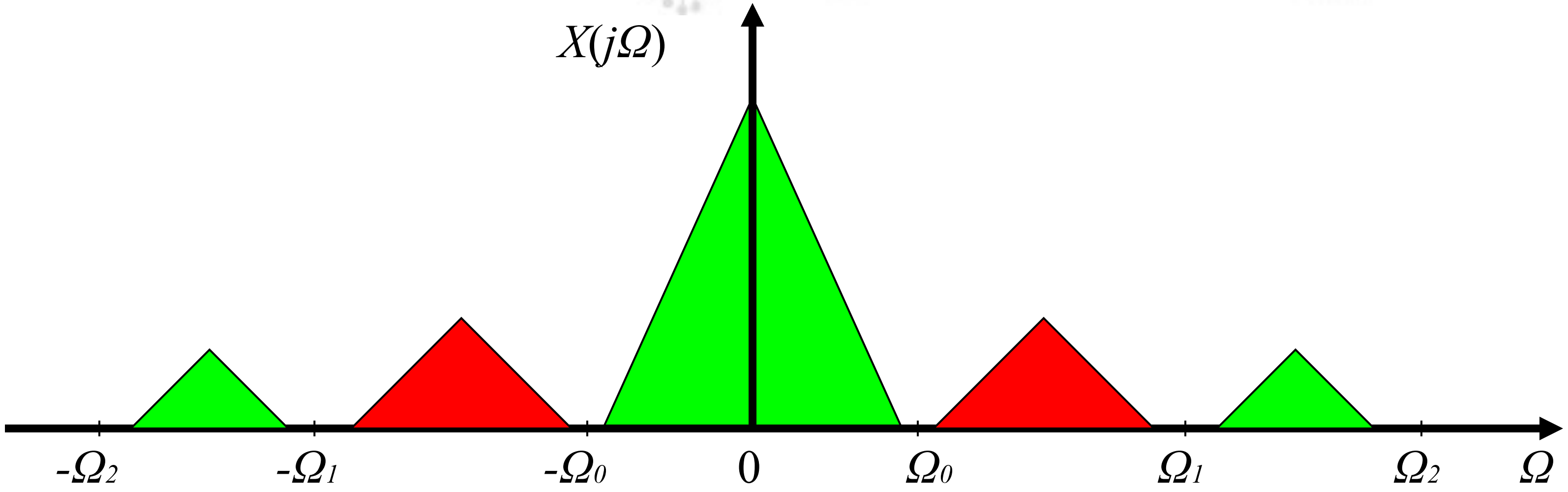


“Θόρυβος”

Σκοπός της Επεξεργασίας: Η ΑΠΟΜΑΚΡΥΝΣΗ ΤΟΥ “ΘΟΡΥΒΟΥ”

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Κλασσική Επεξεργασία Σημάτων:



Βασική Υπόθεση: Το Σήμα *Πληροφορίας* και ο *Θόρυβος* δεν περιέχουν *κοινές* συχνότητες.

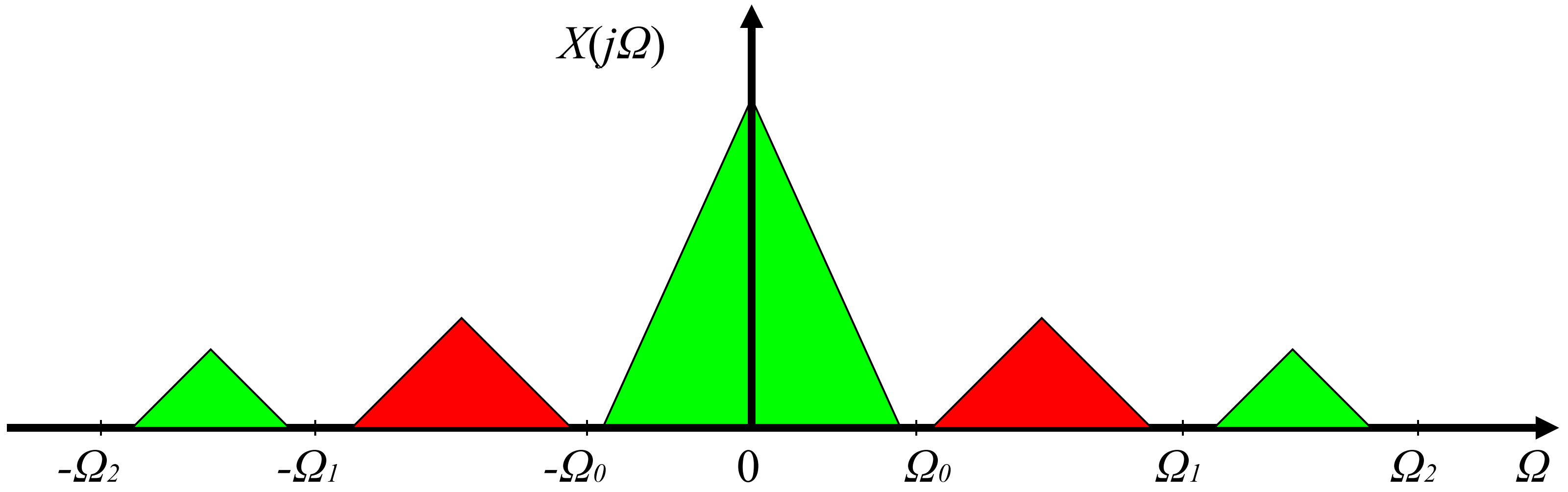
Με άλλα λόγια πληροφορία και θόρυβος είναι *διαχωρίσιμα* στο πεδίο της συχνότητας

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Κλασική Επεξεργασία Σημάτων:

•Περιγραφή στο Πεδίο της Συχνότητας

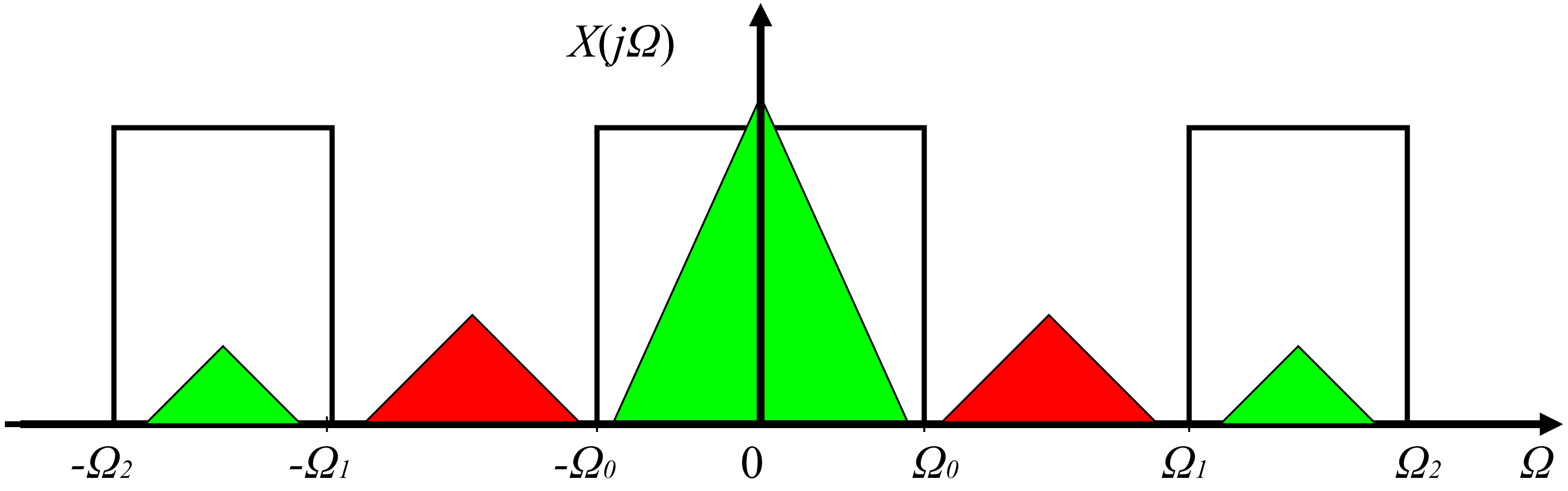
•Ανάλυση Διαθέσιμου Σήματος σε Μη Επικαλυπτόμενες Συχνοτικές Ζώνες



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

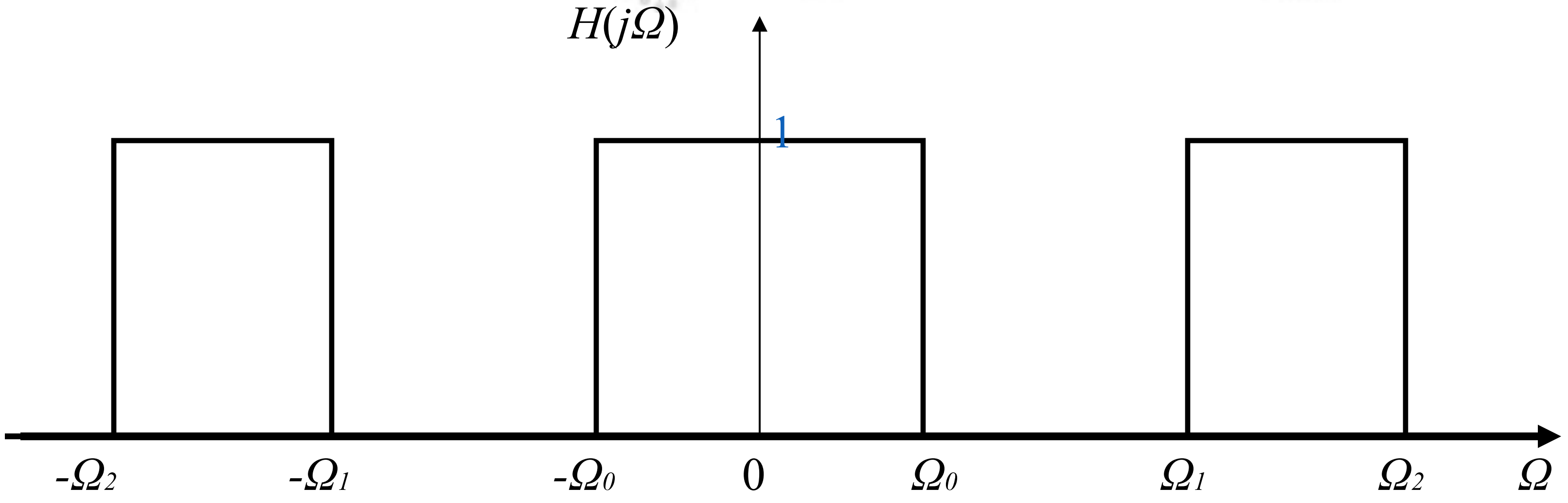
Κλασική Επεξεργασία Σημάτων:

•Η Βασική Υπόθεση επιτρέπει την Απομάκρυνση του «Θορύβου» με τη χρήση «απλών» συστημάτων.



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Κλασική Επεξεργασία Σημάτων: *Φίλτρα*

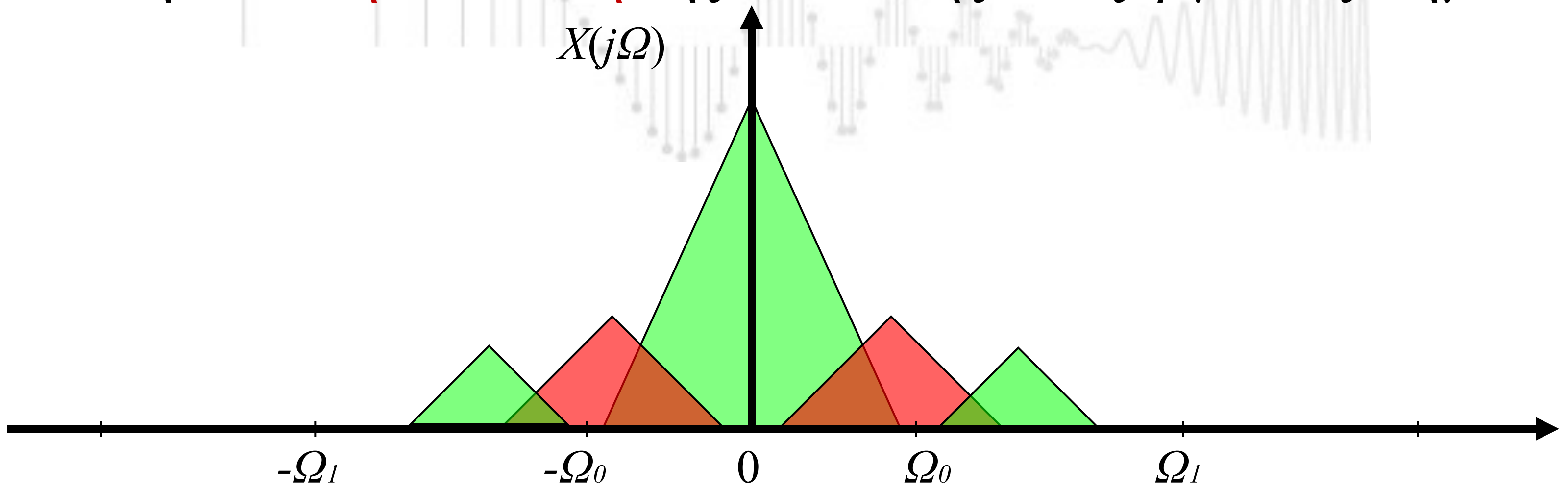


Γραμμικά Φίλτρα: Ερωτήματα που θα πρέπει να έχουν απαντηθεί:

- Τι φίλτρο θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε IIR ή FIR;
- Μπορούμε να βρούμε ένα γραμμικό σύστημα υλοποιήσιμο του οποίου η απόκριση συχνότητας θα έχει την επιθυμητή ιδανική μορφή;
- Αν όχι, τι μπορούμε να κάνουμε;

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Τι συμβαίνει αν η Βασική Υπόθεση της Κλασικής Επεξεργασίας Σημάτων δεν ισχύει;



Αν δηλαδή, το Σήμα *Πληροφορίας* και ο *Θόρυβος* περιέχουν *κοινές* συχνότητες και επομένως δεν είναι *διαχωρίσιμα* στο πεδίο της συχνότητας, τι μπορούμε να κάνουμε;

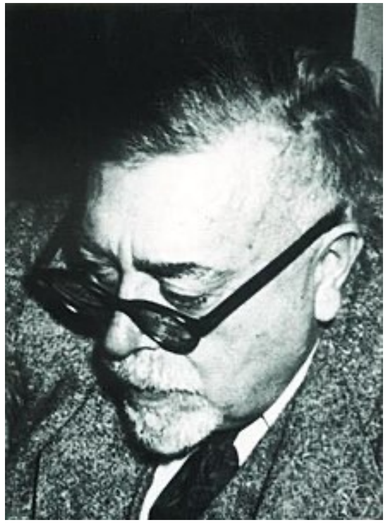
Σ΄αυτή την περίπτωση η περιγραφή του διαθέσιμου σήματος με την βοήθεια των συχνοτικών ζωνών είναι ανεπαρκής.

Χρειαζόμαστε μια διαφορετική περιγραφή των σημάτων και μια διαφορετικού είδους επεξεργασία…..

Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων

Thomas Bayes	Carl Friedrich Gauss	Robert Wiener	Rudolf E. Kalman
1701-1761	1777 -1855	1894-1964	1930-2016





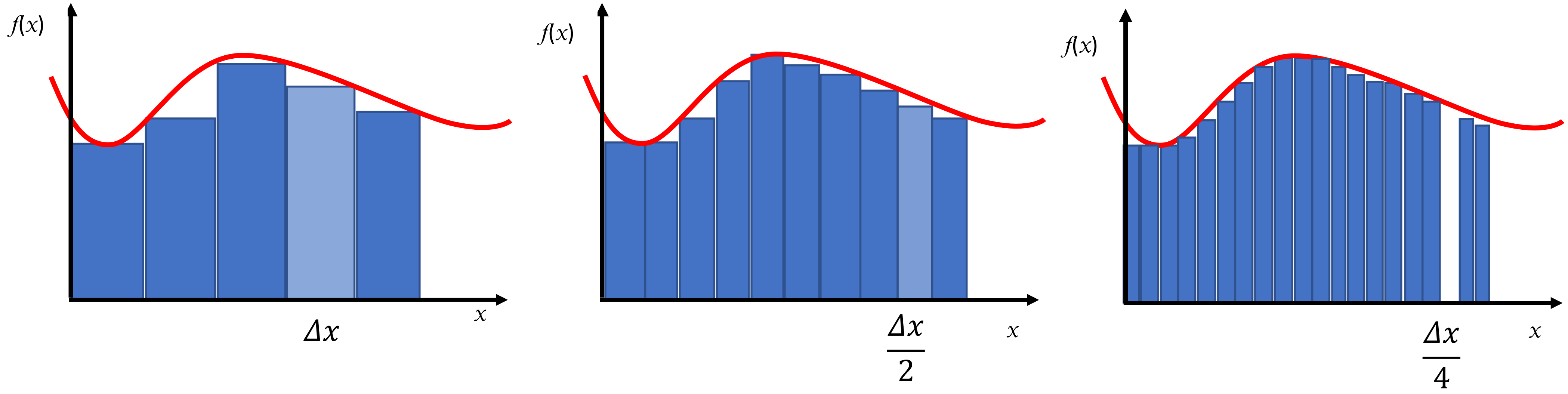

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων:

- Χώρος Πιθανότητας
- Τυχαίες Μεταβλητές
- Πείραμα
- Στατιστικές Πρώτης και Δεύτερης Τάξης
- Στοχαστικά ή Τυχαία Σήματα
- Στασιμότητα και Εργοδικότητα
- Γενίκευση του συχνοτικού περιεχομένου ενός σήματος και ορισμός της πυκνότητας φάσματος.
- Επίδραση Γραμμικού Συστήματος σε Στατιστικές Στοχαστικού Σήματος Βέλτιστο Γραμμικό Φιλτράρισμα.

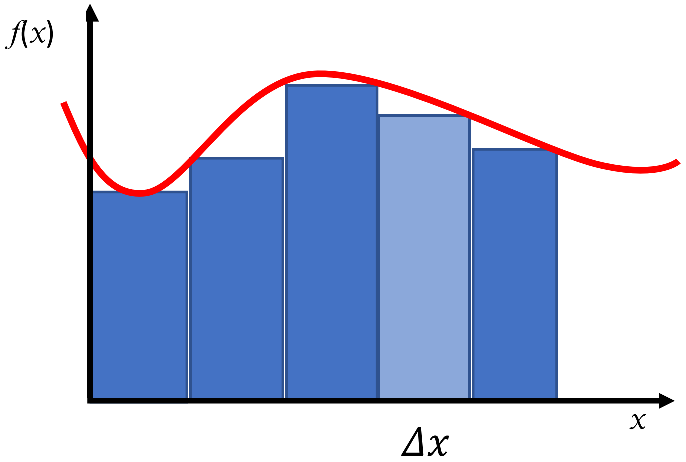
Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Ολοκλήρωση κατά Riemann



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

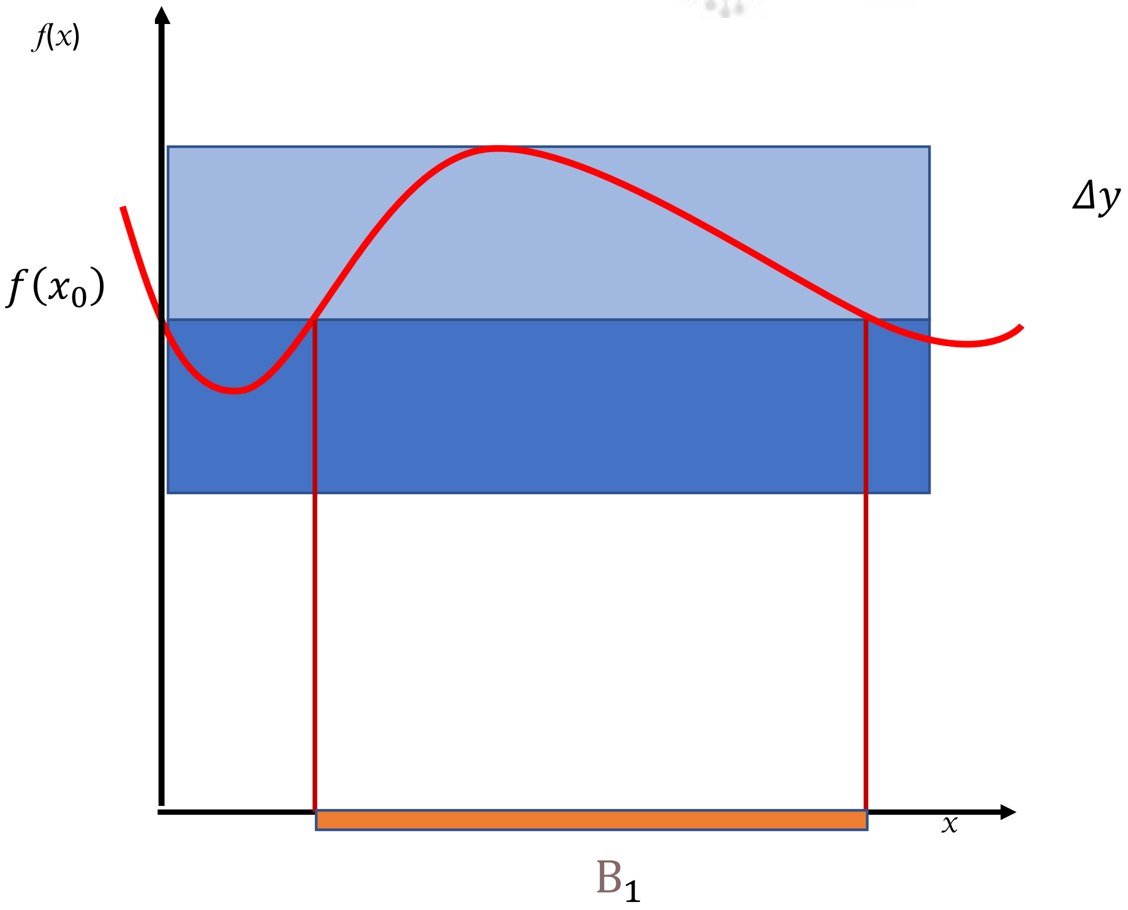
Ολοκλήρωση κατά Riemann



$$f(x)=\begin{cases} 1, & \alpha\nu\ x\ \rho\eta\tau\acute{o}\varsigma \\ 0, & \alpha\nu\ x\ \acute{\alpha}\rho\rho\eta\tau o\varsigma \end{cases}$$

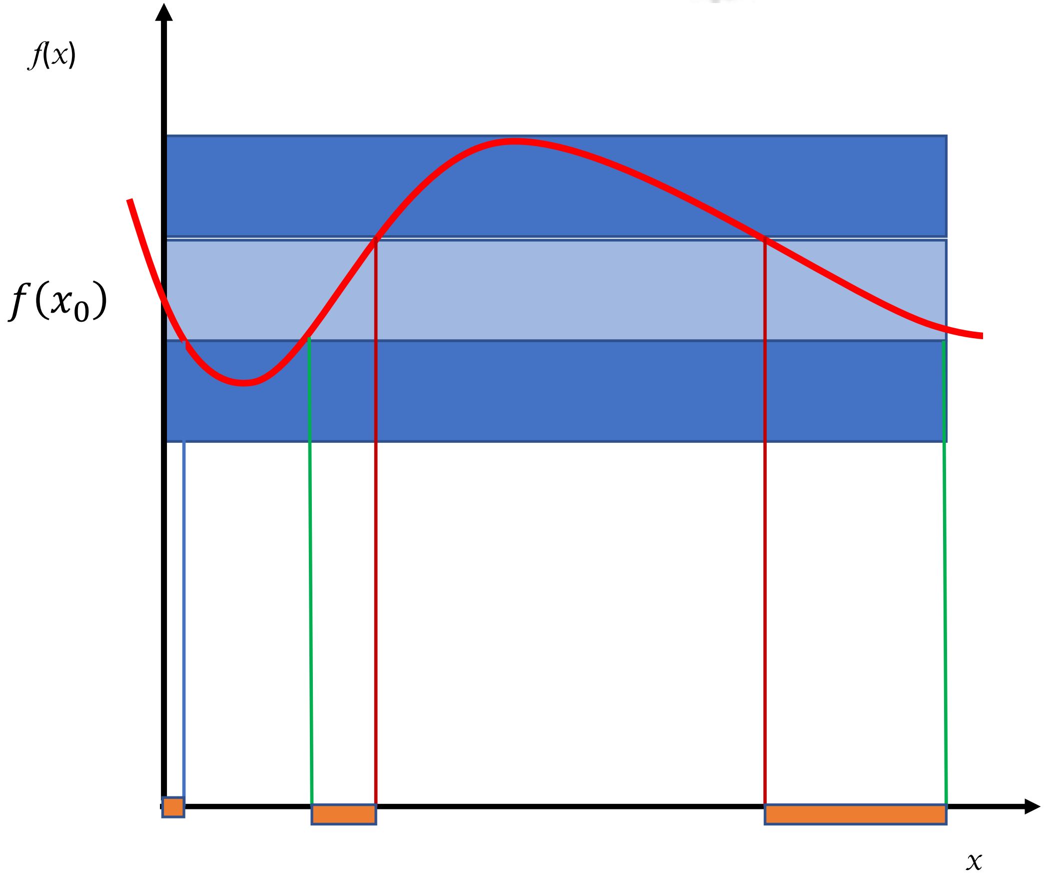
Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Ολοκλήρωση κατά Lebesgue 1904



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

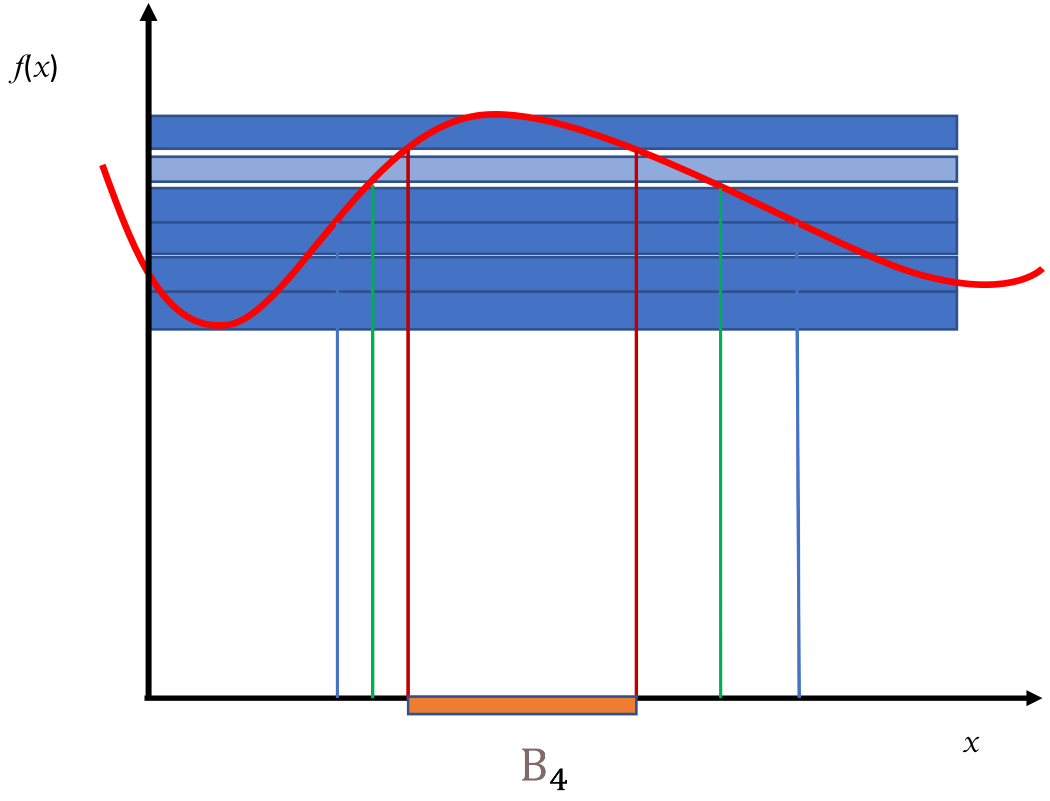
Ολοκλήρωση κατά Lebesgue 1904



$$\left[f(x_0)+\frac{\Delta y}{2}\right]\times Μήκος\,\{A_1\cup A_2\cup A_3\}$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Ολοκλήρωση κατά Lebesgue 1904



$$\frac{\Delta y}{4}$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων:

•Χώρος Πιθανότητας

•Τυχαίες Μεταβλητές

•Πείραμα

•Στατιστικές Πρώτης και Δεύτερης Τάξης

•Στοχαστικά ή Τυχαία Σήματα

•Στασιμότητα και Εργοδικότητα

•Γενίκευση του συχνοτικού περιεχομένου ενός σήματος και ορισμός της πυκνότητας φάσματος.

•Επίδραση Γραμμικού Συστήματος σε Στατιστικές Στοχαστικού Σήματος Βέλτιστο Γραμμικό Φιλτράρισμα.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων: Πείραμα \ Υλοποιήσεις

Πείραμα: Η διαδικασία δημιουργίας Υλοποιήσεων…

Στοχαστικός Μέσος Όρος: $\mu_\chi = \mathbb{E}_{f_\chi}[\chi(\theta)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\chi(x)dx$

Διασπορά: $\sigma_\chi^2 = \mathbb{E}_{f_\chi}\left[(\chi(\theta) - \mu_\chi)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_\chi)^2 f_\chi(x)dx$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων: NMA

Ας υποθέσουμε *N iid τ.μ.* $\chi_n(\theta)$, n=1,2,…,N

Αριθμητικός Μέσος Όρος *N i.i.d. τ.μ.* $\chi_n(\theta)$: $m(N) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\chi_n(\theta)$

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}_{f_\chi}[\mu_\chi - m(N)]=0$$

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}_{f_\chi}[(\mu_\chi - m(N))^2]=\lim_{N\to\infty}\frac{\sigma_\chi^2}{N}=0$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων: Πείραμα\Υλοποιήσεις

Πείραμα: Η διαδικασία δημιουργίας Υλοποιήσεων

$$
\begin{array}{ccc}
\theta_1 & \rightarrow & \chi(\theta_1) \\
\theta_2 & \rightarrow & \chi(\theta_2) \\
\theta_3 & \rightarrow & \chi(\theta_3) \\
\theta_4 & \rightarrow & \chi(\theta_4) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\theta_{\mathrm{N}} & \rightarrow & \chi(\theta_{\mathrm{N}})
\end{array}
$$

Πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις υλοποιήσεις μίας τυχαίας μεταβλητής;

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων: Πείραμα \ Υλοποιήσεις

Πείραμα: Η διαδικασία δημιουργίας Υλοποιήσεων…

Στοχαστικός Μέσος Όρος:

$$\mu_\chi = \mathbb{E}_{f_\chi}[\chi(\theta)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\chi(x)dx$$

Αριθμητικός Μέσος Όρος:

$$m_\chi(N) = \hat{\mu}_\chi = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi(\theta_n)$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων: Πείραμα \ Υλοποιήσεις

Πείραμα: Η διαδικασία δημιουργίας Υλοποιήσεων: ΝΜΑ

Αριθμητικός Μέσος Όρος: $m_\chi(N) = \hat{\mu}_\chi = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi(\theta_n)$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{f_\chi}\left[\mu_\chi - m_\chi(N)\ \right]=0$$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{f_\chi}\left[(\mu_\chi - m_\chi(N))^2\right]= \lim_{N\to\infty} \frac{\sigma_\chi^2}{N}=0$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων

Στοχαστικός Μέσος Όρος

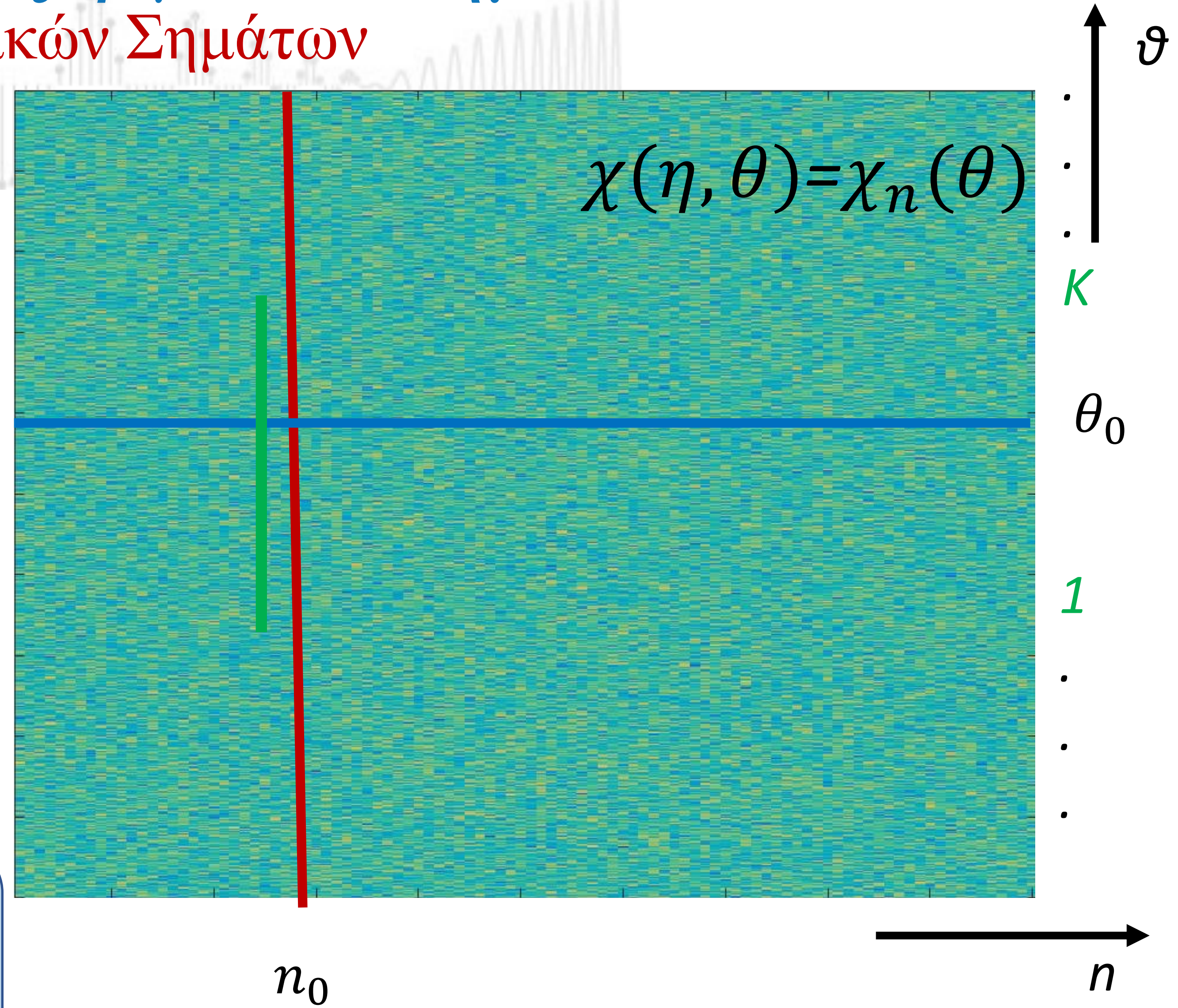
$$\mu_{\chi_{n_0}} = \mathbb{E}_{f_{\chi_{n_0}}}\left[\chi_{n_0}(\theta)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\chi_{n_0}}(x)dx$$

Αριθμητικός Μέσος Όρος

$$m_{\chi_{n_0}}(K) = \hat{\mu}_{\chi_{n_0}} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} x_{n_0}(\theta_k)$$

Χρονικός Μέσος Όρος

$$m_{\chi}(N) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n(\theta_0)$$



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων

Έστω $f_{\chi_{n_0}}(x)$ η σππ της στοχαστικής διαδικασίας $\chi(\eta,\theta)$=$\chi_n(\theta)$ τη χρονική στιγμή n_0

Αν η $f_{\chi_{n_0}}(x)$ της στοχαστικής διαδικασίας δεν εξαρτάται από τον χρόνο, δηλαδή:

$$f_{\chi_{n_0}}(x) = f_{\chi}(x)$$

η διαδικασία είναι **ισχυρώς στάσιμη πρώτης τάξης**

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων

Στοχαστικός Μέσος Όρος διαδικασίας την χρονική στιγμή n_0

$$\mu_{\chi_{n_0}} = \mathbb{E}_{f_{\chi_{n_0}}}\left[\chi_{n_0}(\theta)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\chi_{n_0}}(x)dx$$

Αν ο Στοχαστικός Μέσος Όρος, $\mu_{\chi_{n_0}}$ της στοχαστικής διαδικασίας $\chi(\eta,\theta)$=$\chi_n(\theta)$ δεν εξαρτάται από τον χρόνο, δηλαδή:

$$\mu_{\chi_{n_0}} = \mu_\chi$$

η διαδικασία είναι **ασθενώς στάσιμη πρώτης τάξης**

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων

Έστω $f_{\chi_{n_0}\chi_{n_1}}(x_1, x_2; n_0, n_1)$ η από κοινού σππ της στοχαστικής διαδικασίας $\chi(\eta,\theta)=\chi_n(\theta)$ τις χρονικές στιγμές n_0, n_1.

Αν η $f_{\chi_{n_0}\chi_{n_1}}(x_1, x_2; n_0, n_1)$ δεν εξαρτάται από τις απόλυτες χρονικές στιγμές αλλά μόνο από την διαφορά τους, δηλαδή:

$$f_{\chi_{n_0}\chi_{n_1}}(x_1, x_2; n_0, n_1) = f_{\chi_1\chi_2}(x_1, x_2; n_1 - n_0)$$

η διαδικασία είναι **ισχυρώς στάσιμη δεύτερης τάξης**

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων

Έστω $r_{\chi_{n_0}\chi_{n_1}}(n_0, n_1)$ η ακολουθία ετεροσυσχέτισης των τ.μ. $\chi_{n_0}(\theta)$, $\chi_{n_1}(\theta)$ της στοχαστικής διαδικασίας $\chi(\eta,\theta)$=$\chi_n(\theta)$ τις χρονικές στιγμές n_0, n_1.

Αν η $r_{\chi_{n_0}\chi_{n_1}}(n_0, n_1)$ δεν εξαρτάται από τις απόλυτες χρονικές στιγμές αλλά μόνο από την διαφορά τους, δηλαδή:

$$r_{\chi_{n_0}\chi_{n_1}}(n_0, n_1) = r_{\chi_{n_0}\chi_{n_1}}(n_1 - n_0)$$

η διαδικασία είναι **ασθενώς στάσιμη δεύτερης τάξης.**

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων

Χρονικός Μέσος Όρος Στοχαστικής διαδικασίας βασιζόμενος σε N δείγματα της υλοποίησης θ_0

$$m_\chi(N) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n(\theta_0)$$

Αν ο Χρονικός Μέσος Όρος $m_\chi(N)$ της στοχαστικής διαδικασίας $\chi(\eta,\theta)=\chi_n(\theta)$ αποτελεί εκτίμηση του Στοχαστικού Μέσου Όρου, δηλαδή:

$$m_\chi(N) = \hat{\mu}_{\chi_{n_0}}$$

η διαδικασία είναι **εργοδική πρώτης τάξης.**

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων

Χρονικός Μέσος Όρος Στοχαστικής διαδικασίας βασιζόμενος σε Ν δείγματα της υλοποίησης θ_0

$$m_\chi(N) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n(\theta_0)$$

Αν ο Χρονικός Μέσος Όρος $m_\chi(N)$ της στοχαστικής διαδικασίας $\chi(\eta,\theta)=\chi_n(\theta)$ αποτελεί εκτίμηση του Στοχαστικού Μέσου Όρου, δηλαδή:

$$m_\chi(N) = \hat{\mu}_{\chi_{n_0}}$$

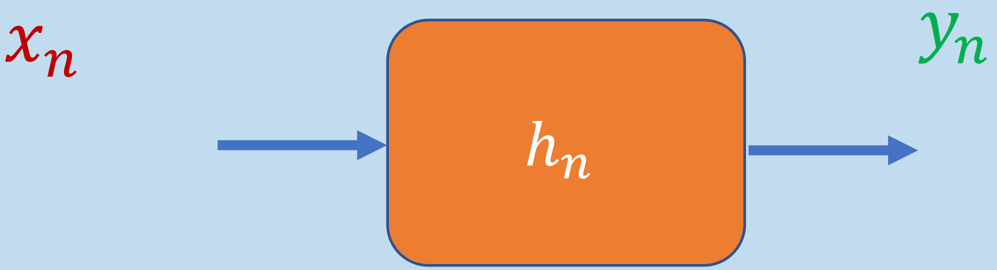
η διαδικασία είναι **εργοδική πρώτης τάξης.**

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Κλασσική Επεξεργασία Σημάτων

Σήμα Εισόδου

Σήμα Εξόδου



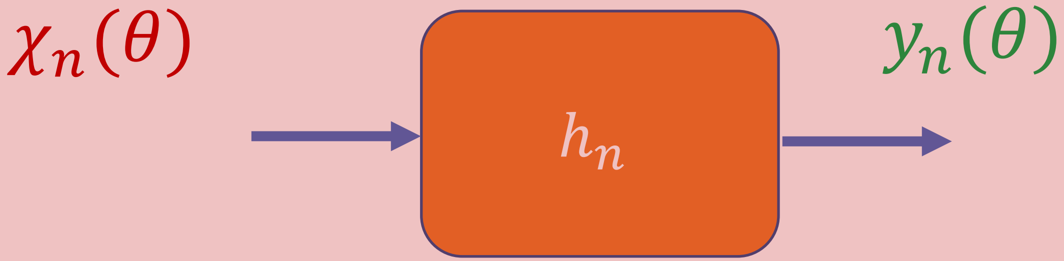
$$X\left(e^{j\omega}\right) H\left(e^{j\omega}\right) = Y\left(e^{j\omega}\right)$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων

Παρατηρήσεις

Στοχαστική Διαδικασία Εξόδου



$$\Phi_{\chi\chi}\left(e^{j\omega}\right)\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = \Phi_{yy}\left(e^{j\omega}\right)$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Σήμα Εισόδου

Σήμα Εξόδου

$$x_n \longrightarrow \boxed{h_n} \longrightarrow y_n$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) H\left(e^{j\omega}\right) = Y\left(e^{j\omega}\right)$$

Παρατηρήσεις

Στοχαστική Διαδικασία Εξόδου

$$\chi_n(\theta) \longrightarrow \boxed{h_n} \longrightarrow y_n(\theta)$$

$$\Phi_{\chi\chi}\left(e^{j\omega}\right) \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = \Phi_{yy}\left(e^{j\omega}\right)$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Τα ΓΧΑ Συστήματα σαν Μοντέλα Γένεσης ΑΣ 2-ης τάξης Στοχαστικών Διαδικασιών

Παρατηρήσεις — Στοχαστική Διαδικασία Εξόδου

$$\chi_n(\theta) \xrightarrow{} \boxed{h_n} \xrightarrow{} y_n(\theta)$$

$$\Phi_{\chi\chi}\left(e^{j\omega}\right)\,|H(e^{j\omega})|^2 = \Phi_{yy}\left(e^{j\omega}\right)$$

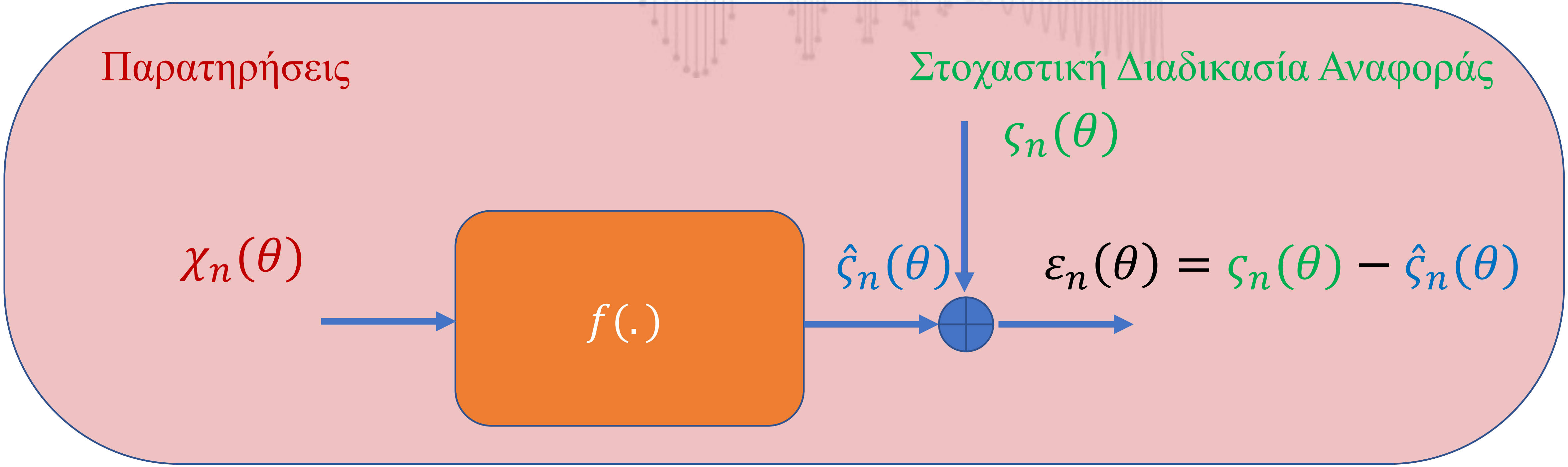
Λευκός Θόρυβος — Στοχαστική Διαδικασία Εξόδου

$$w_n(\theta) \xrightarrow{} \boxed{h_n} \xrightarrow{} y_n(\theta)$$

$$\sigma_w^2\ \ |H(e^{j\omega})|^2 = \Phi_{yy}\left(e^{j\omega}\right)$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων: Βέλτιστο Φίλτρο

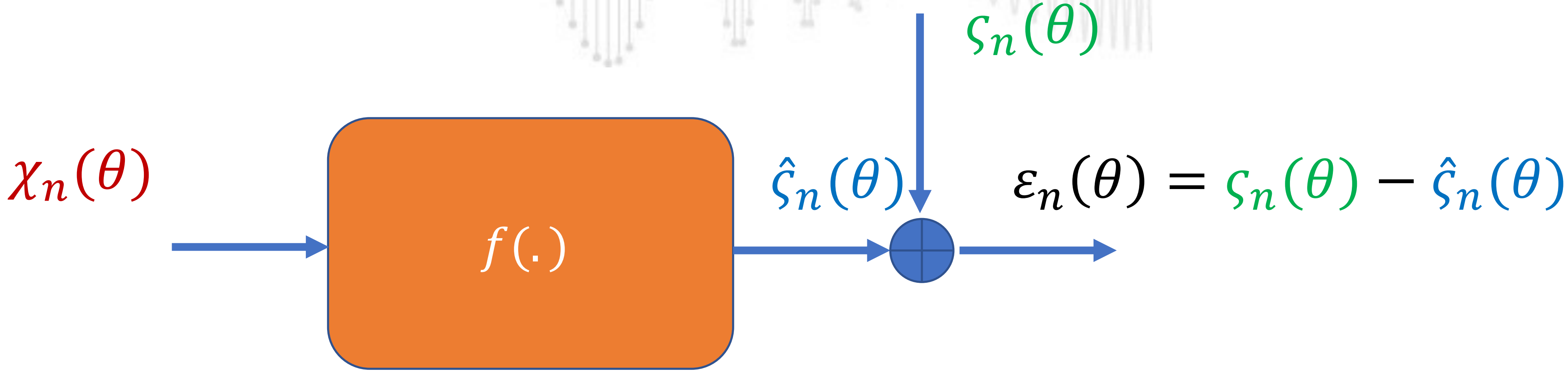


Συνάρτηση κόστους: $\mathbb{E}[\varepsilon_n(\theta)^2]$

$$\mathbb{E}[\varepsilon_n(\theta)^2] = \mathbb{E}[(\varsigma_n(\theta) - \hat{\varsigma}_n(\theta))^2] = \mathbb{E}[(\varsigma_n(\theta) - f(\chi_n(\theta)))^2]$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων: Βέλτιστο Φίλτρο

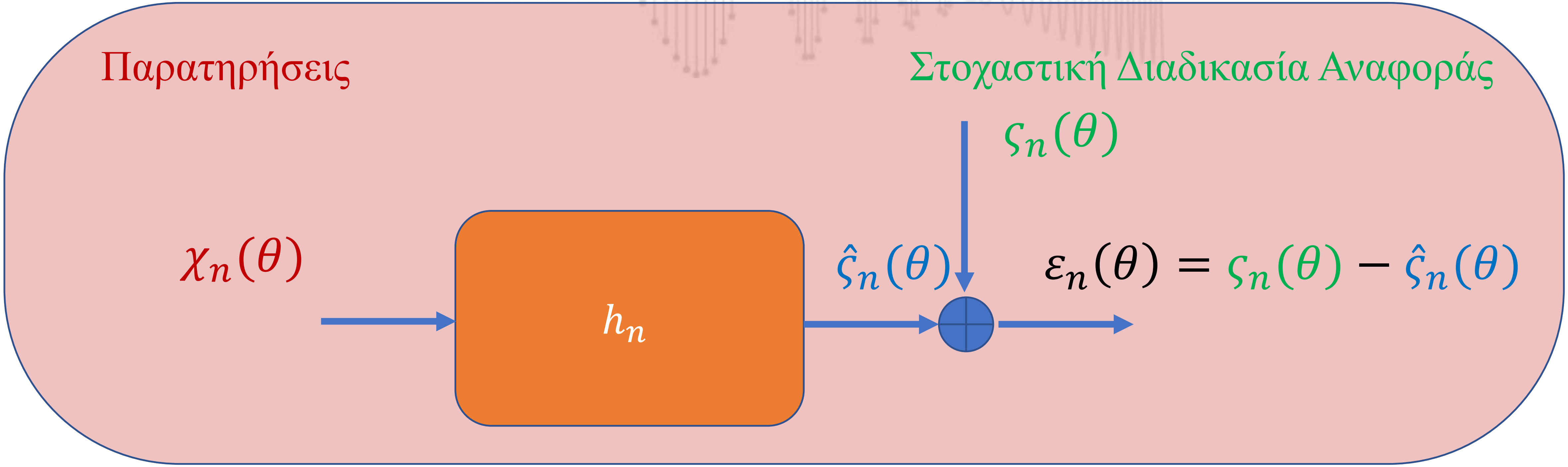


Συνάρτηση κόστους: $\mathbb{E}[\varepsilon_n(\theta)^2]$ και ελαχιστοποίησή της:

$$\min_f \mathbb{E}[(\varsigma_n(\theta) - f(\chi_n(\theta)))^2]$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων: Φίλτρο Wiener

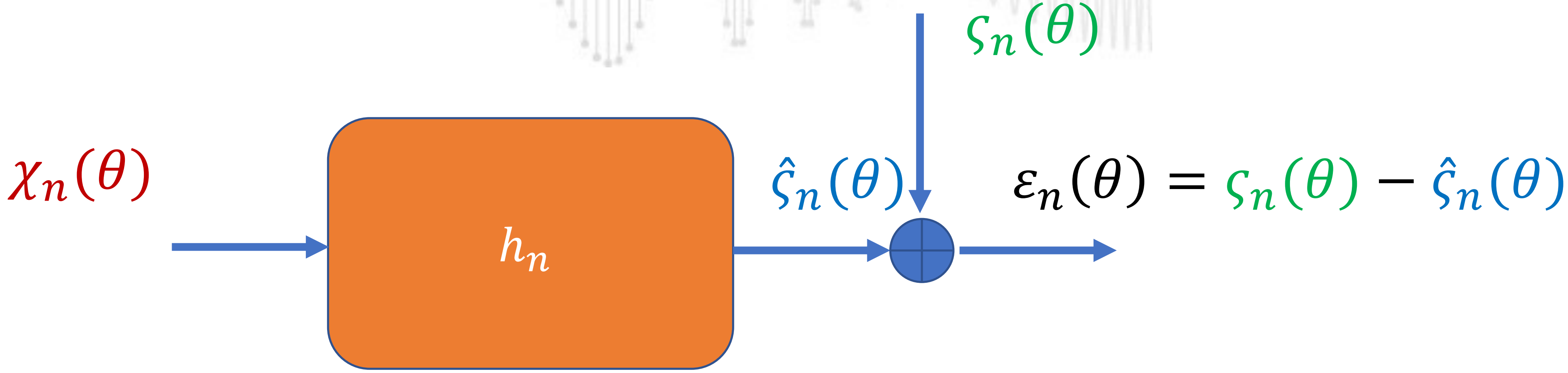


Συνάρτηση κόστους: $\mathbb{E}[\varepsilon_n(\theta)^2]$

$$\mathbb{E}[\varepsilon_n(\theta)^2] = \mathbb{E}[(\varsigma_n(\theta) - \hat{\varsigma}_n(\theta))^2] = \mathbb{E}[(\varsigma_n(\theta) - h_n * \chi_n(\theta))^2]$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

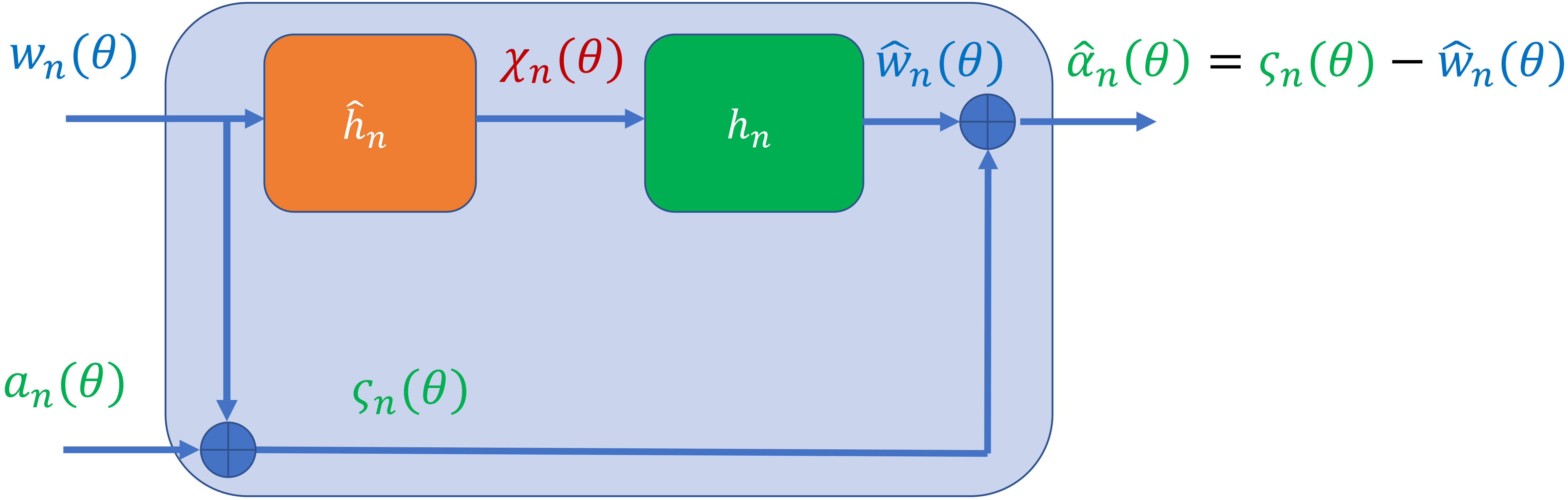
Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων: Φίλτρο Wiener



Συνάρτηση κόστους: $\mathbb{E}[\varepsilon_n(\theta)^2]$ και ελαχιστοποίησή της:

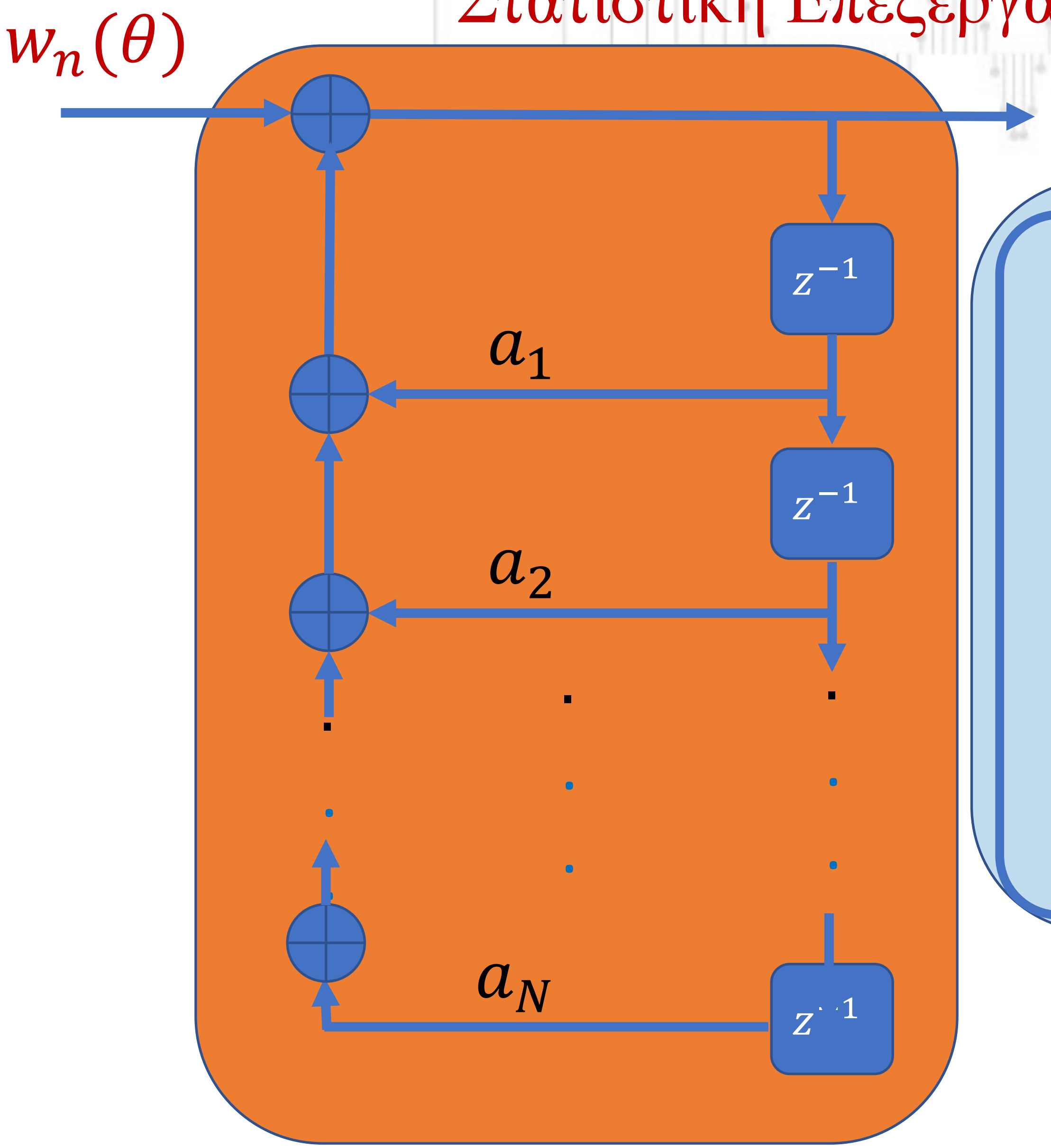
$$\min_{h_n} \mathbb{E}[(\varsigma_n(\theta) - h_n * \chi_n(\theta))^2]$$

Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων: Φίλτρο Wiener



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων:



$y_n(\theta)$ $\varsigma_n(\theta)$ $\hat{\varsigma}_n(\theta) = ;$

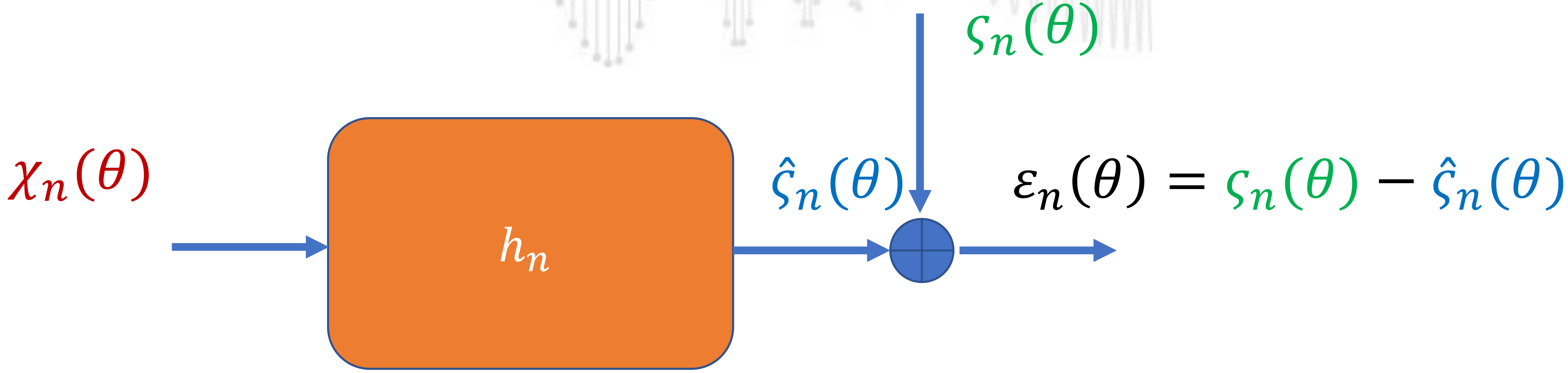
$$\begin{pmatrix} y_{n-1}(\theta) \\ y_{n-2}(\theta) \\ \vdots \\ y_{n-N}(\theta) \end{pmatrix} = \underline{\chi}_n(\theta)\ \underline{h} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_n(\theta) = \varsigma_n(\theta) - \hat{\varsigma}_n(\theta)$$

$$\min_{h_n} \mathbb{E}[(\varsigma_n(\theta) - \underline{\chi}_n(\theta)^t \underline{h})^2]$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων: Φίλτρο Wiener



Συνάρτηση κόστους: $\mathbb{E}[\varepsilon_n(\theta)^2]$ και ελαχιστοποίησή της:

$$\min_{h_n} \mathbb{E}[(\varsigma_n(\theta) - h_n * \chi_n(\theta))^2]$$

Πως θα λύσουμε το πρόβλημα της απληστίας του Φίλτρου Wiener;