ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Μετασχηματισμός Fourier

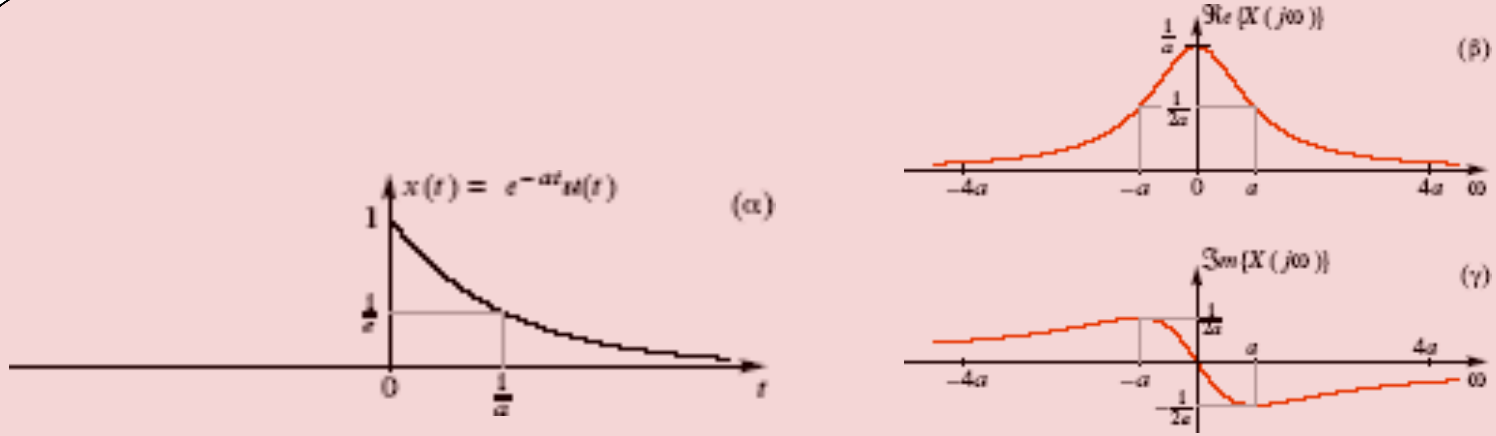
Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Μετασχηματισμός Fourier:

Πεδίο-Χρόνου *Πεδίο-Συχνότητας*

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$$



Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Μετασχηματισμός Fourier:

Πεδίο-Χρόνου *Πεδίο-Συχνότητας*

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$$

Ευθύς
Μετασχηματισμός Fourier Συνεχούς Χρόνου

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

Αντίστροφος
Μετασχηματισμός Fourier Συνεχούς Χρόνου

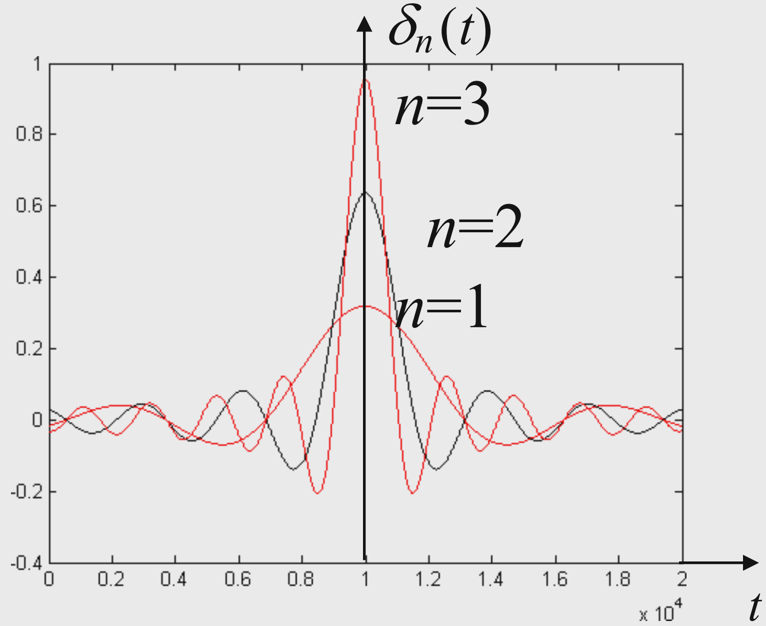
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Περιγραφή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Η «Συνάρτηση» δέλτα ως όριο ακολουθίας συναρτήσεων:

$$\delta_n(t) = \frac{\sin(nt)}{\pi t}, n = 1, 2, \ldots$$

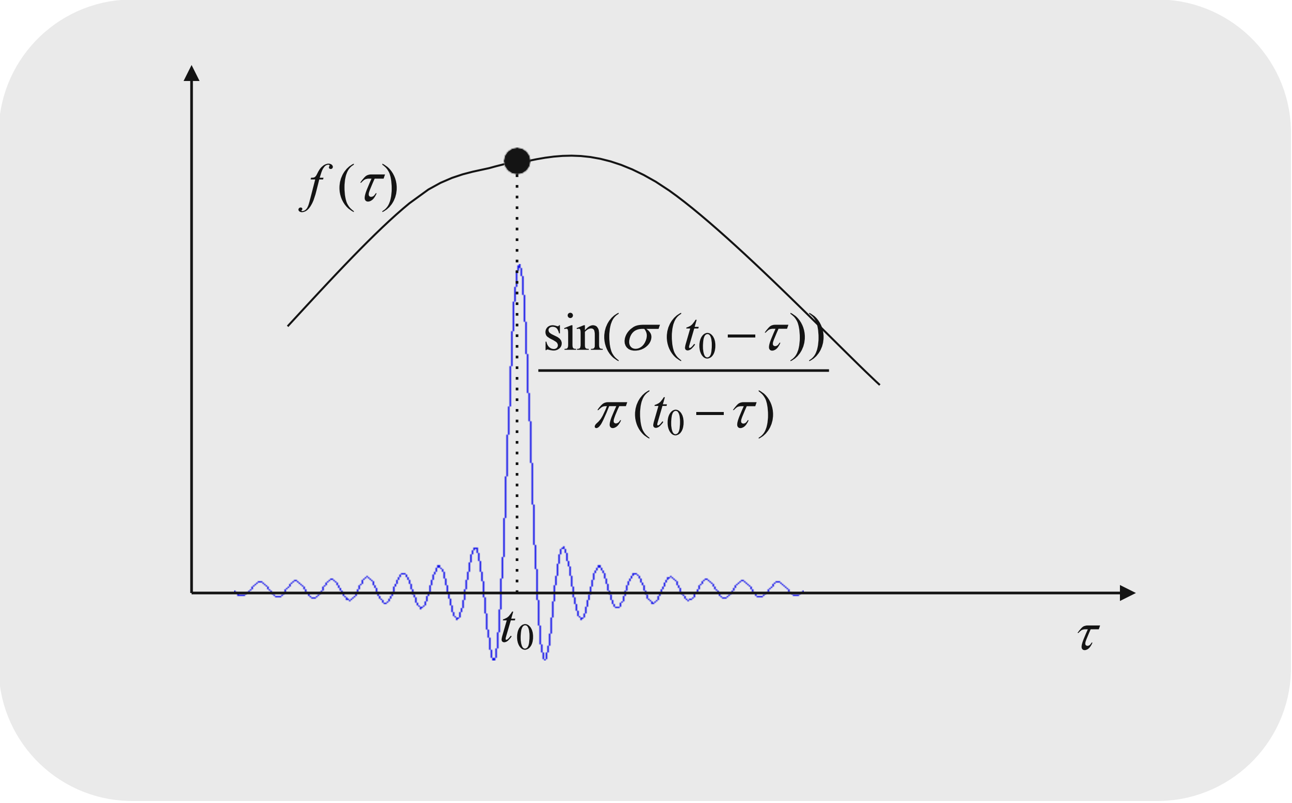
$\forall$ *n* ισχύει: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(\tau)d\tau = 1$



Μπορούμε να ορίσουμε την «Συνάρτηση» δέλτα ως ακολούθως: $\delta(t) = \lim_{n\to\infty} \delta_n(t)$

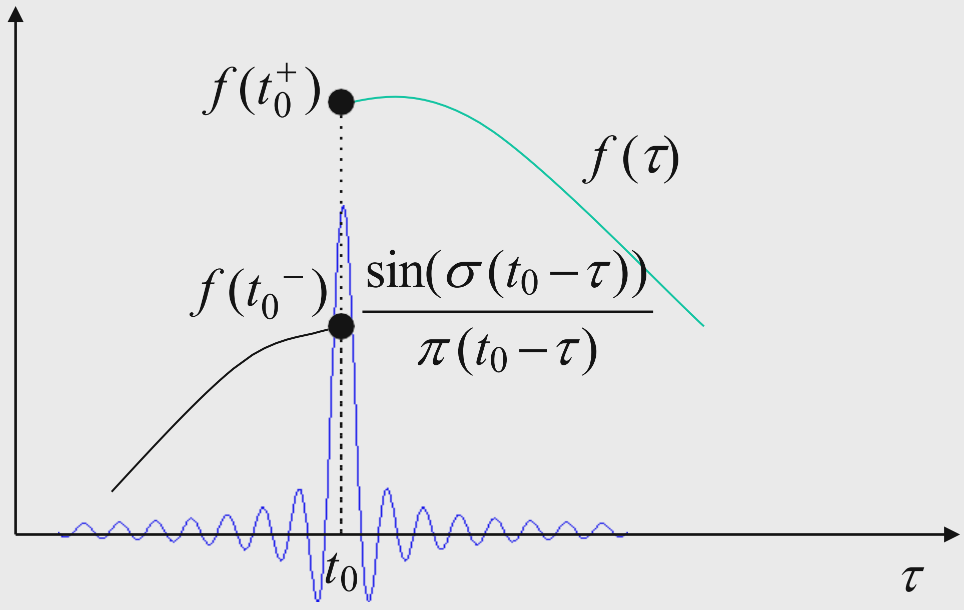
Περιγραφή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier-Συνεχής περίπτωση



Περιγραφή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

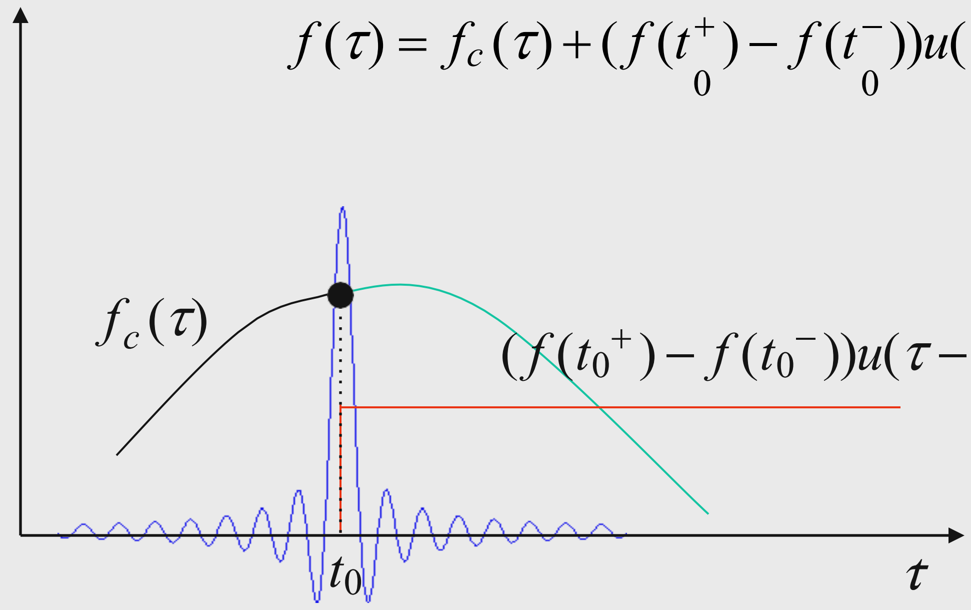
Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier-Ασυνεχής περίπτωση



Περιγραφή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier-Ασυνεχής περίπτωση

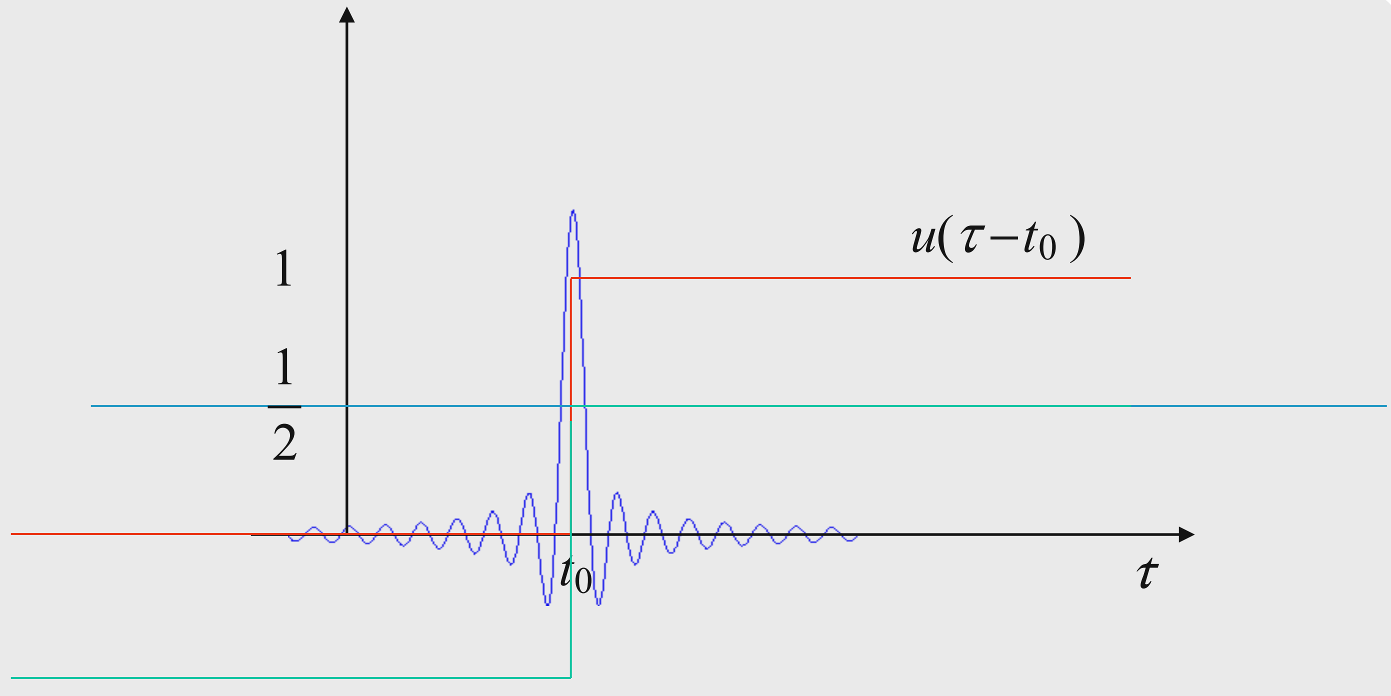
$$f(\tau) = f_c(\tau) + (f(t_0^+) - f(t_0^-))u(\tau - t_0)$$



Περιγραφή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier-Ασυνεχής περίπτωση

$$u(\tau - t_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} sign(\tau - t_0)$$

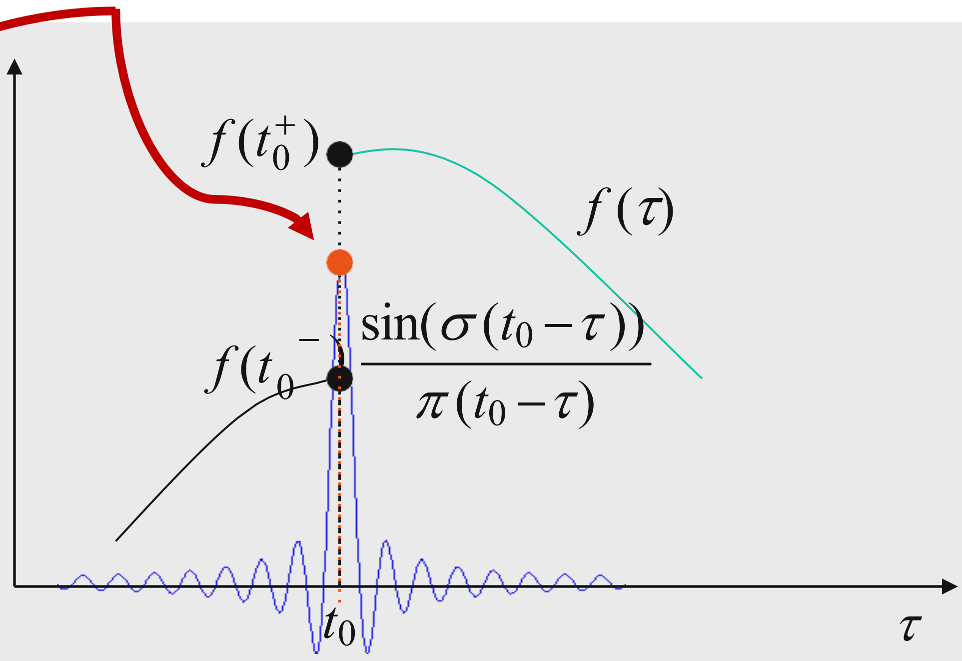


Περιγραφή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier-Ασυνεχής περίπτωση

Ανακατασκευασμένη Τιμή του ασυνεχούς σήματος

$$\frac{(f(t_0^{+})+f(t_0^{-}))}{2}$$



Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Συμμετρίες Σημάτων & Μετασχηματισμών τους

Σήμα: $x(t)$	Μετασχηματισμός Fourier: $X(j\Omega)$
Πραγματικό και Άρτιας Συμμετρίας	Πραγματικός και Άρτιας Συμμετρίας
Πραγματικό και Περιττής Συμμετρίας	Φανταστική και Περιττής Συμμετρίας
Φανταστικό και Άρτιας Συμμετρίας	Φανταστικός και Άρτιας Συμμετρίας
Φανταστικό και Περιττής Συμμετρίας	Πραγματικός και Περιττής Συμμετρίας

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Γραμμικότητα	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(j\omega) + bX_2(j\omega)$
Συζυγηκότητα	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
Χρονική-Αναστροφή	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
Βάθμωση	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X(j(\omega/a))$
Καθυστέρηση	$x(t-t_d)$	$e^{-j\omega t_d}X(j\omega)$
Διαμόρφωση	$x(t)e^{j\omega_0 t}$	$X(j(\omega-\omega_0))$
Διαμόρφωση	$x(t)\cos(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2}X(j(\omega-\omega_0)) + \frac{1}{2}X(j(\omega+\omega_0))$
Παραγώγιση	$\frac{d^k x(t)}{dt^k}$	$(j\omega)^k X(j\omega)$
Συνέλιξη	$x(t) * h(t)$	$X(j\omega)H(j\omega)$
Πολλαπλασιασμός	$x(t)p(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(j\omega) * P(j\omega)$

Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Συνέλιξη και Συνεχούς Χρόνου Μετασχηματισμός Fourier

Συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου αντιστοιχεί σε γινόμενο στο πεδίο της συχνότητας.

Πεδίο-Χρόνου *Πεδίο-Συχνότητας*

$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

Μαθηματική Περιγραφή Συστημάτων

Συνέλιξη και Συνεχούς Χρόνου Μετασχηματισμός Fourier

Ο πολλαπλασιασμός συναρτήσεων στο πεδίο του χρόνου αντιστοιχεί σε συνέλιξη των μετασχηματισμών Fourier.

Πεδίο-Χρόνου	Πεδίο-Συχνότητας

$$y(t) = p(t)x(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$

Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

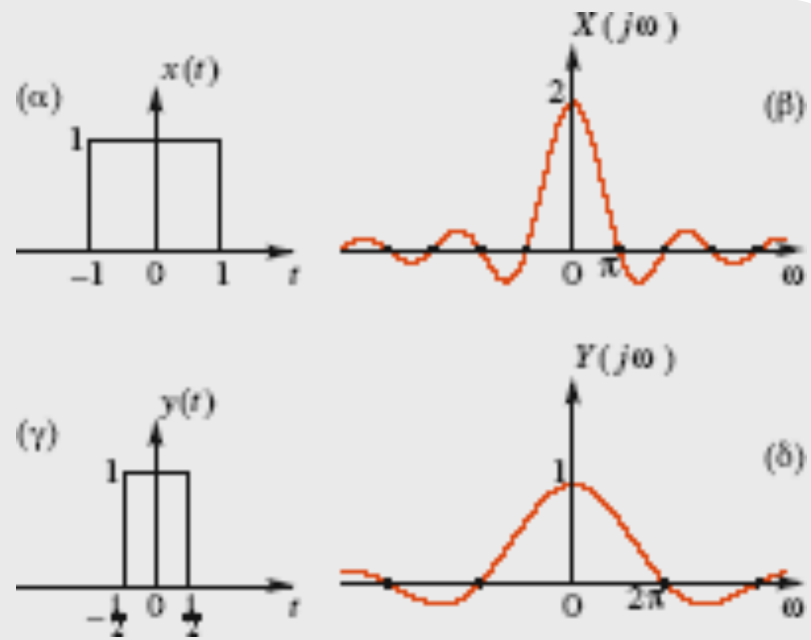
Ιδιότητα κλιμάκωσης Μετασχηματισμού

Πεδίο-Χρόνου *Πεδίο-Συχνότητας*

$$y(t) = x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\omega) = \frac{1}{|a|} X(j\omega/a)$$

Το χρονικό άπλωμα ενός σήματος θα συμπιέσει το μετασχηματισμό Fourier του.

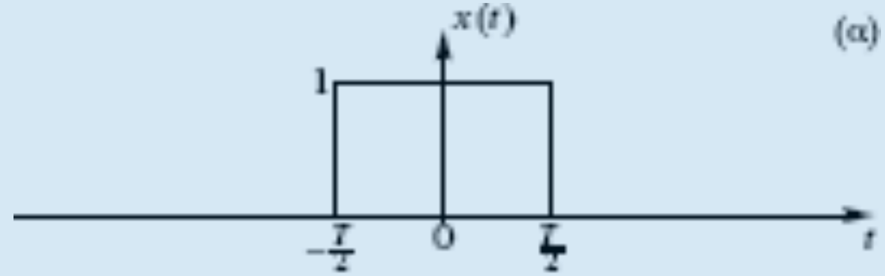
Η χρονική συμπίεση ενός σήματος θα απλώσει το μετασχηματισμό Fourier του.



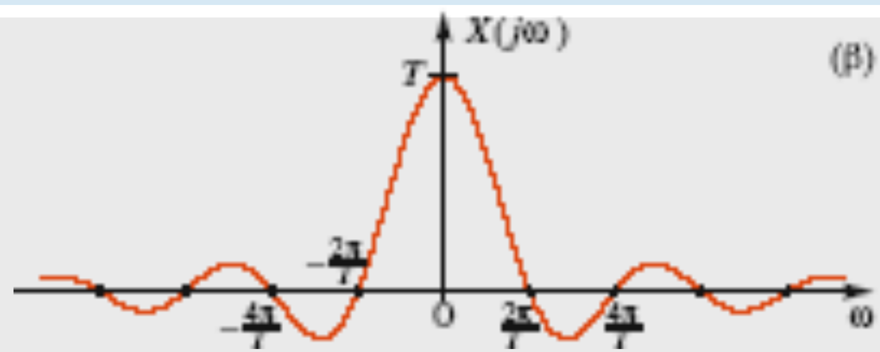
Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Σήματα Περιορισμένης Χρονικής Διάρκειας: Τετραγωνικός Παλμός

$$x(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2}T \le t < \frac{1}{2}T \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



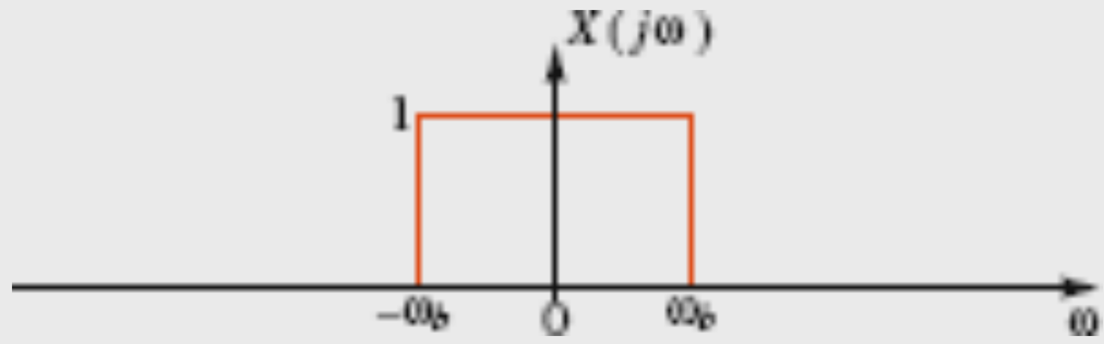
$$X(j\omega) = \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega/2}$$



Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

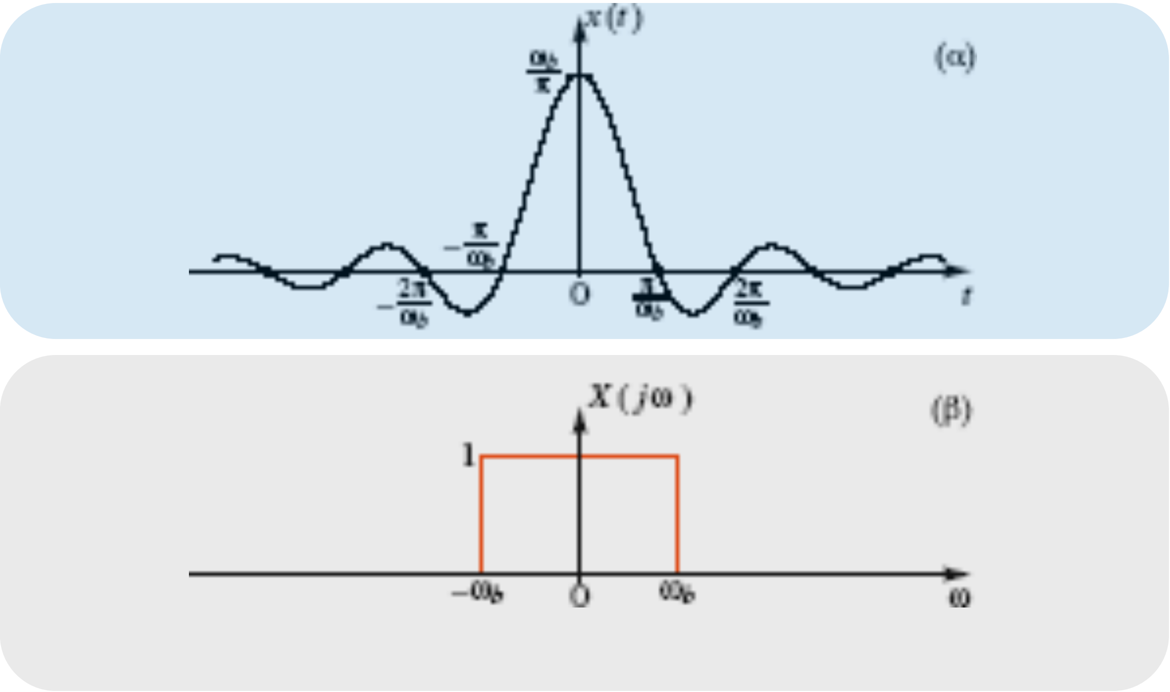
Σήματα Περιορισμένου Εύρους Ζώνης

$X(j\omega) = 0$ για $|\omega| > \omega_b$ με $\omega_b < \infty$.



Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Σήματα Περιορισμένου Εύρους Ζώνης



Μαθηματική Περιγραφή Συστημάτων

Ιδιότητα Χρονικής Αναστροφής: $\mathcal{F}\{x(t)\}=;$

Πεδίο-Χρόνου		Πεδίο-Συχνότητας
$x(-t)$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	$X(-j\omega)$

Μαθηματική Περιγραφή Συστημάτων

Ιδιότητα Διαφόρισης: Αν $y(t) = \frac{d^k x(t)}{dt^k}$, $\mathcal{F}\{y(t)\} =;$

Πεδίο-Χρόνου		*Πεδίο-Συχνότητας*
$\frac{d^k x(t)}{dt^k}$	$\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$	$(j\omega)^k X(j\omega)$

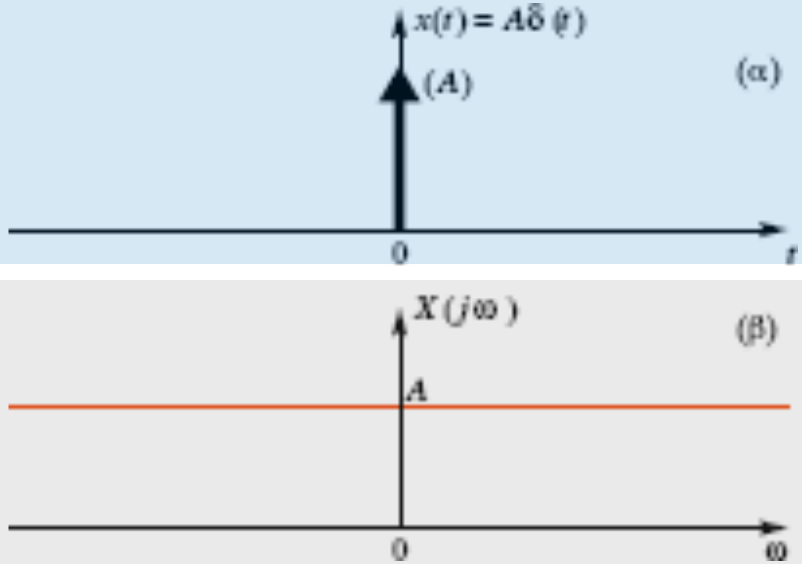
Λύση Σ. Δ. Ε.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

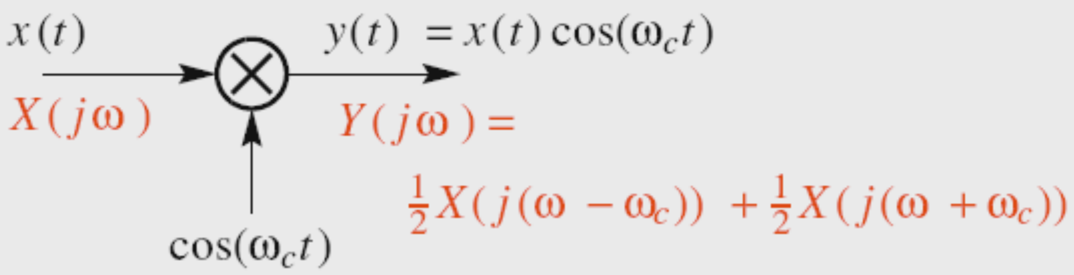
Μετασχηματισμός Κρουστικών Σημάτων

Πεδίο-Χρόνου		Πεδίο-Συχνότητας
1	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	$2\pi\delta(\omega)$



Μετασχηματισμός Fourier
&
Διαμόρφωση Πλάτους

Σύστημα Διαμόρφωσης Πλάτους (DSBAM)



Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Μετασχηματισμός Μιγαδικών Εκθετικών Σημάτων

Πεδίο-Χρόνου		Πεδίο-Συχνότητας
$e^{j\omega_0 t}$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

Μετασχηματισμός Ημιτονικών Σημάτων

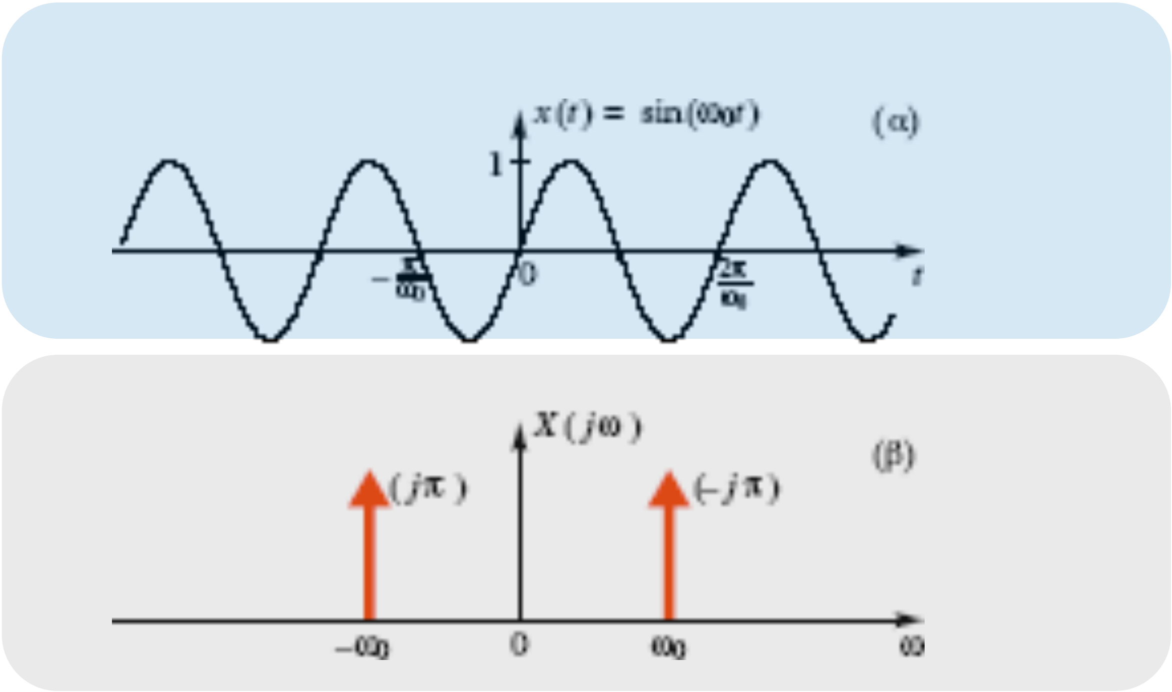
Πεδίο-Χρόνου *Πεδίο-Συχνότητας*

$$A\cos(\omega_0 t + \phi) \xleftrightarrow{\mathcal{F}}$$

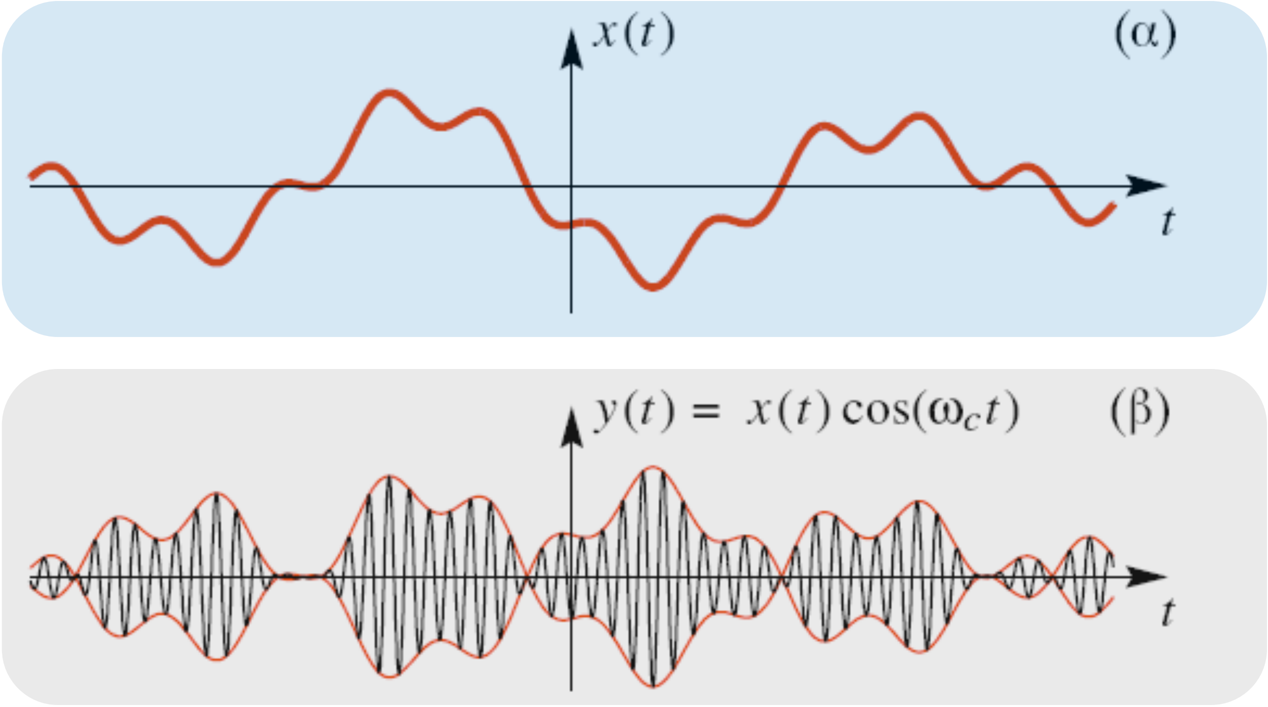
$$\pi A e^{j\phi}\delta(\omega - \omega_0) + \pi A e^{-j\phi}\delta(\omega + \omega_0)$$

Μαθηματική Περιγραφή Σημάτων

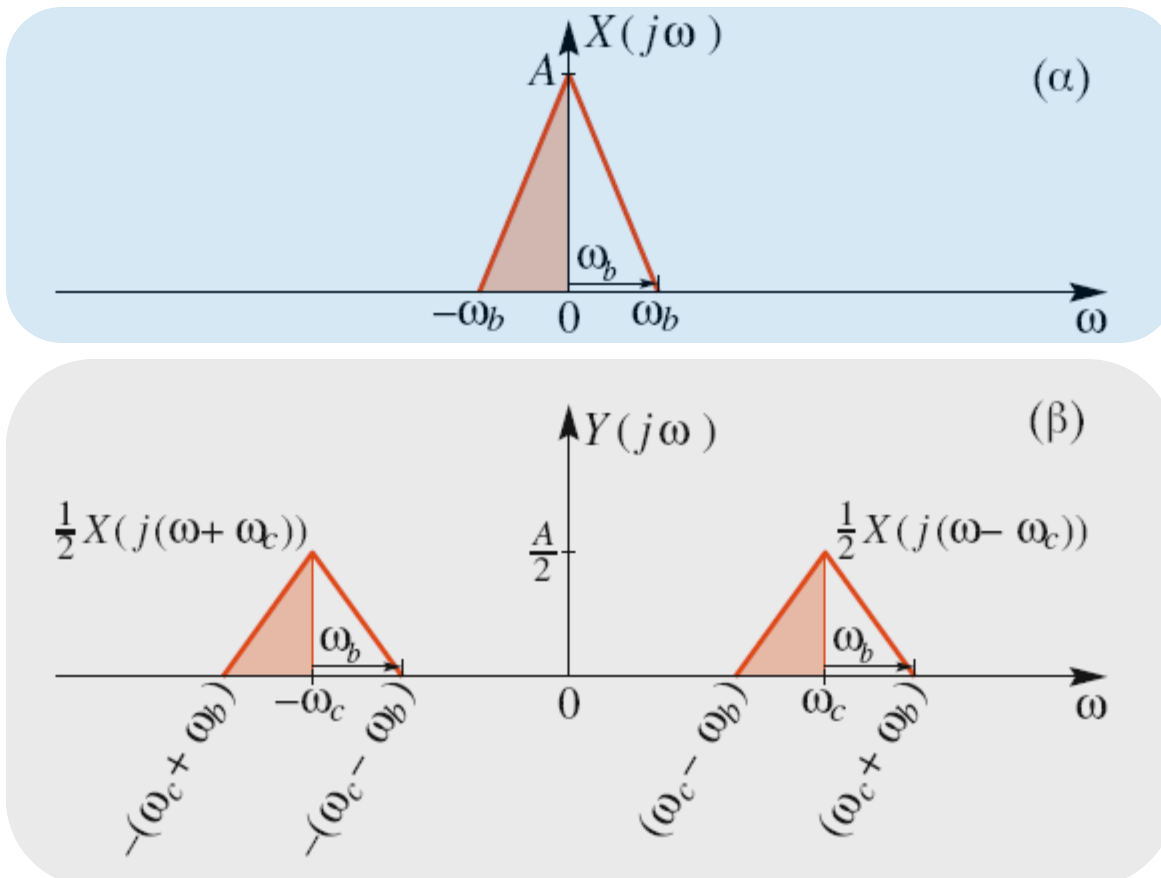
Μετασχηματισμός Ημιτονικών Σημάτων



Μετασχηματισμός Fourier
&
Διαμόρφωση Πλάτους

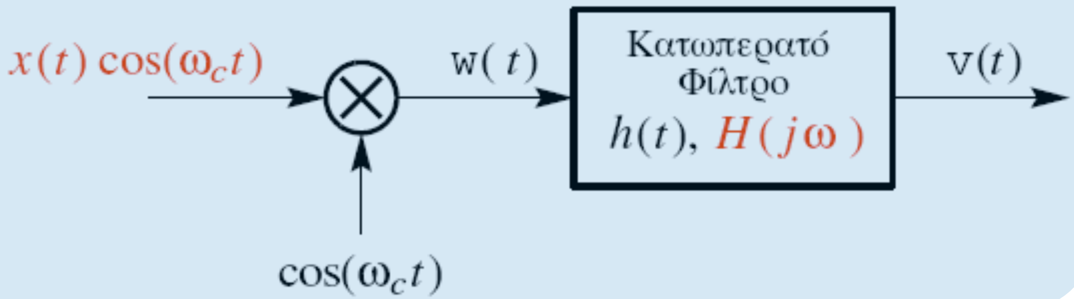


Μετασχηματισμός Fourier
&
Διαμόρφωση Πλάτους

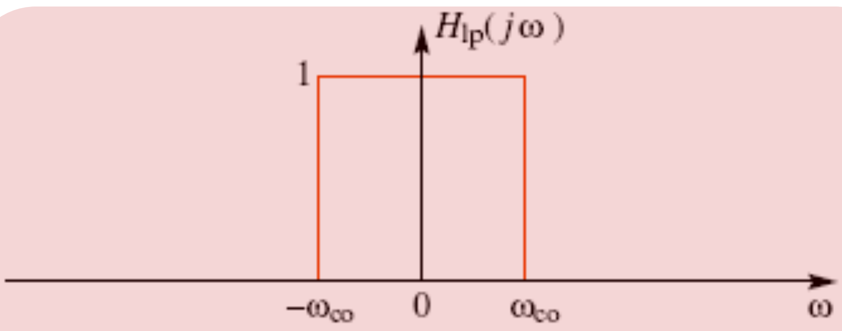


Μετασχηματισμός Fourier
&
Διαμόρφωση Πλάτους

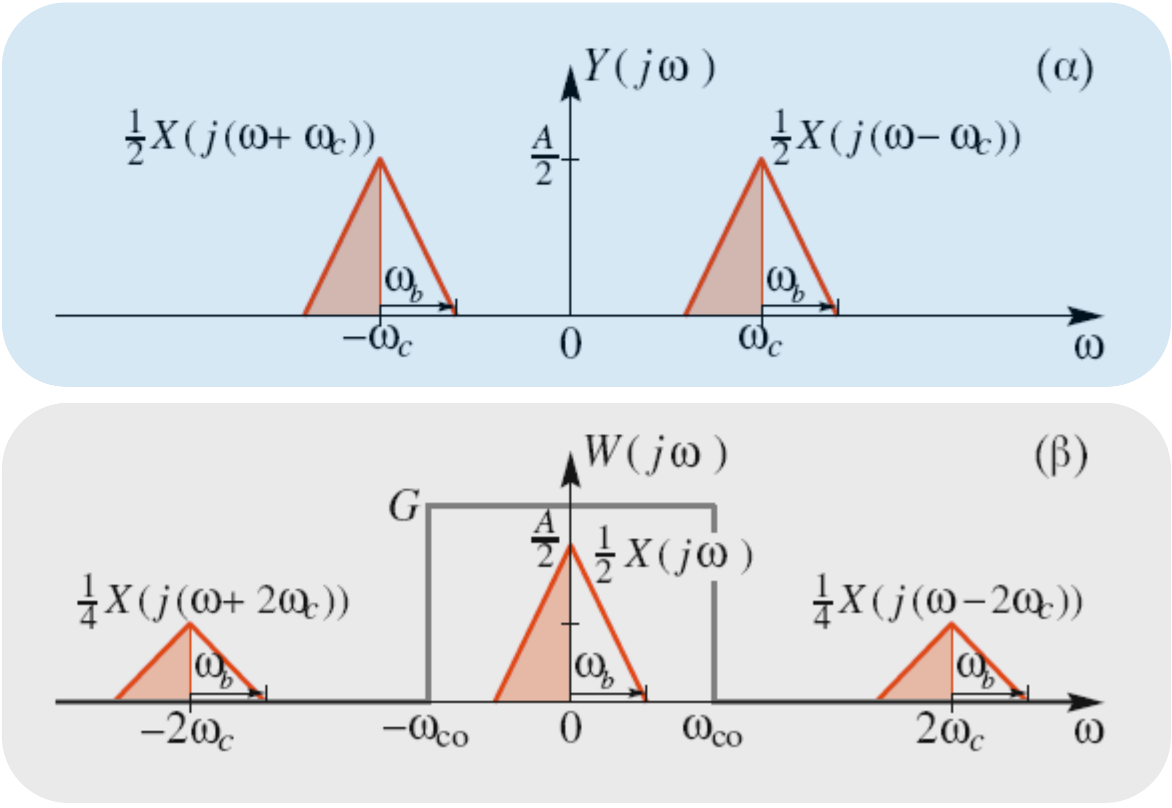
Σύστημα Αποδιαμόρφωσης Πλάτους (DSBAM)



$$H(j\omega) = \begin{cases} G & -\omega_{\text{co}} \le \omega \le \omega_{\text{co}} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

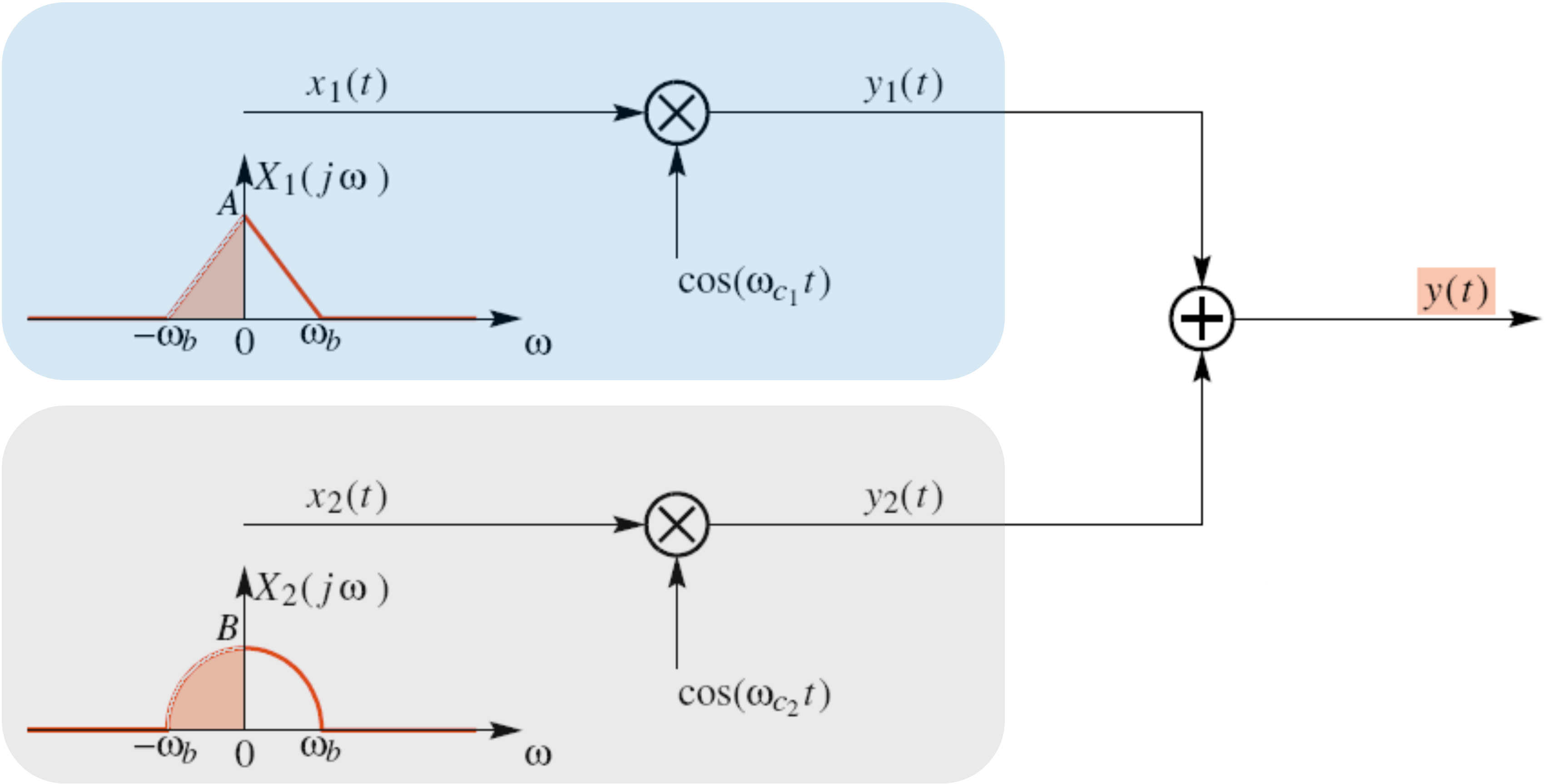


Μετασχηματισμός Fourier
&
Διαμόρφωση Πλάτους



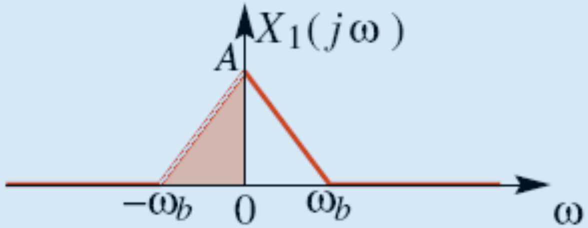
Μετασχηματισμός Fourier
&
Διαμόρφωση Πλάτους

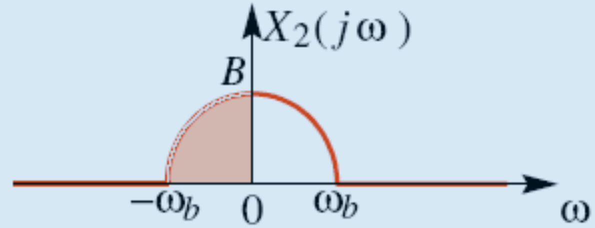
Σύστημα Πολύπλεξης με Διαίρεση Συχνότητας



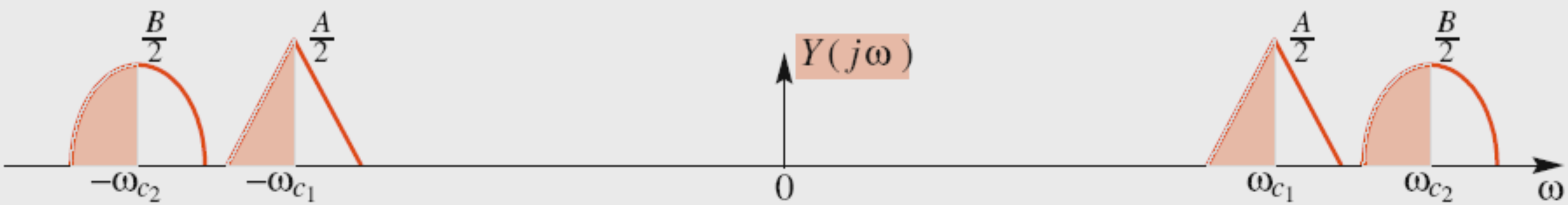
Μετασχηματισμός Fourier
&
Διαμόρφωση Πλάτους

Μετασχηματισμοί Fourier Σημάτων Εισόδου



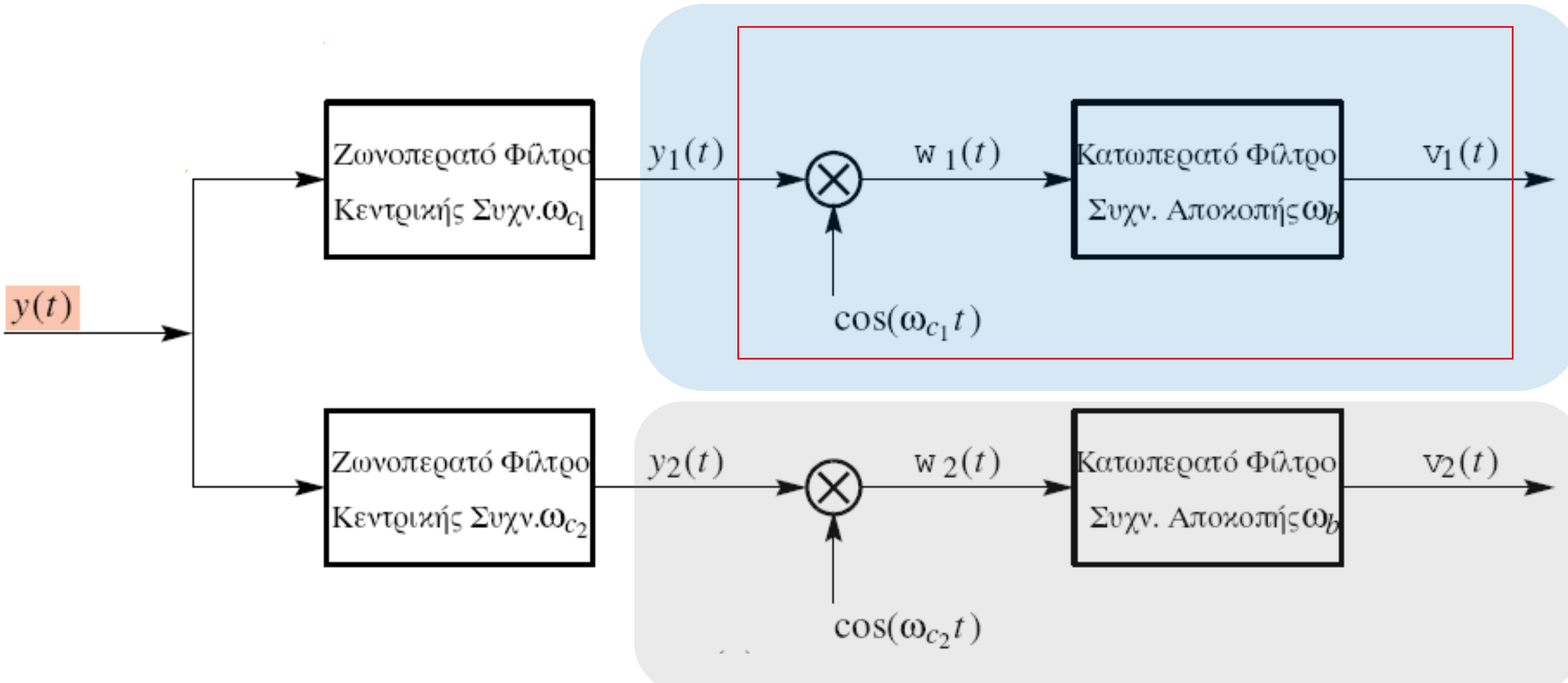


Μετασχηματισμός Fourier της Εξόδου του Συστήματος



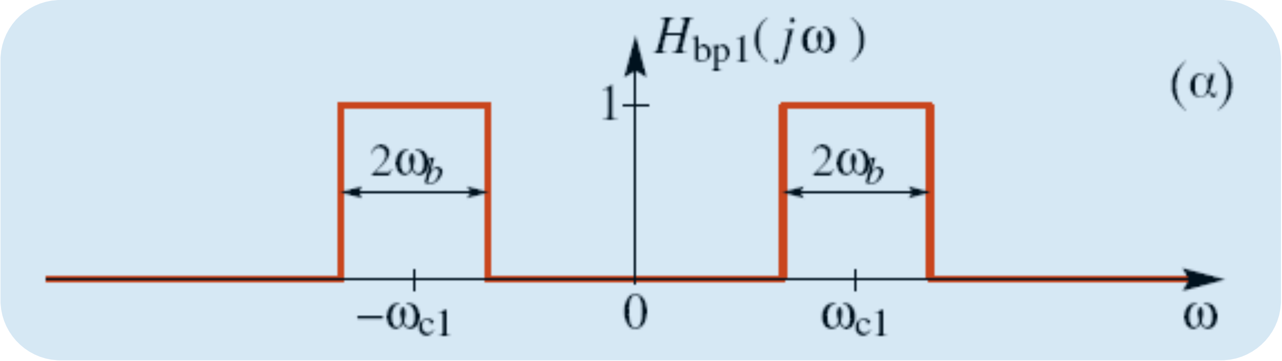
Μετασχηματισμός Fourier
&
Διαμόρφωση Πλάτους

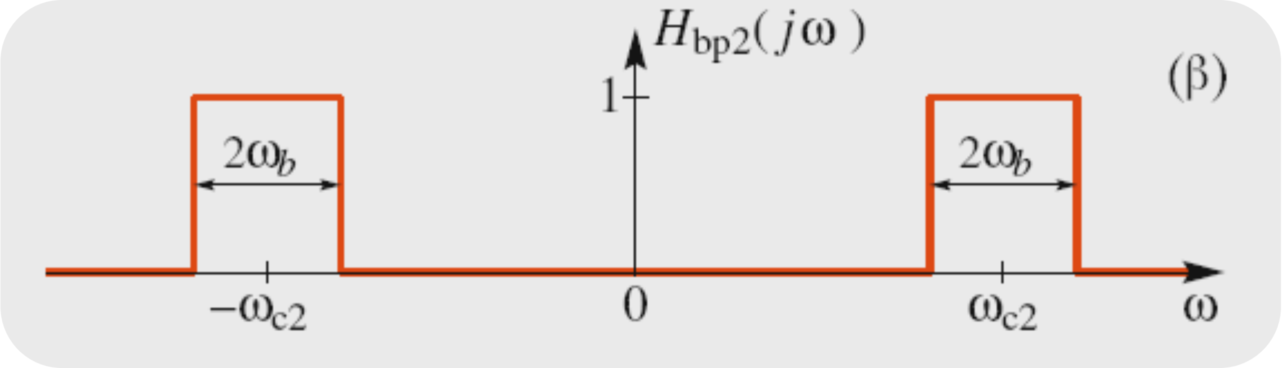
Σύστημα Από-Πολύπλεξης



Μετασχηματισμός Fourier
&
Διαμόρφωση Πλάτους

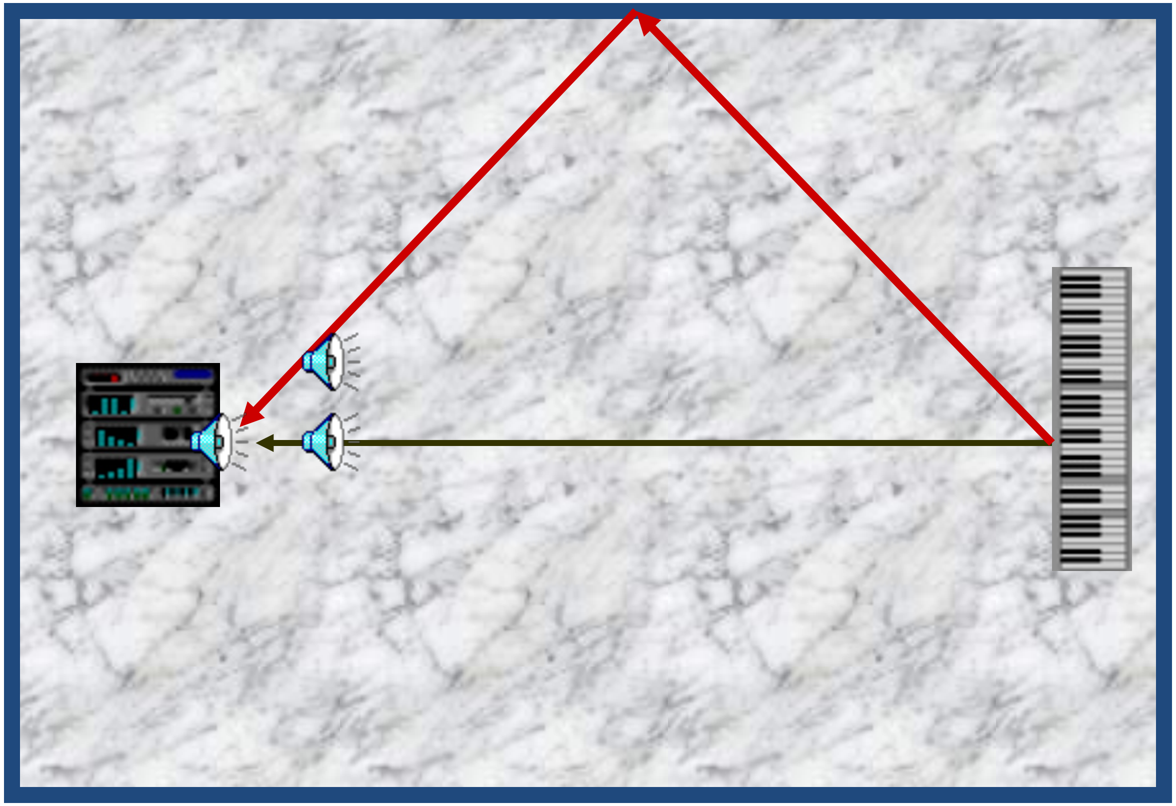
Αποκρίσεις Συχνότητας Ιδανικών Ζωνοδιαβατών Φίλτρων



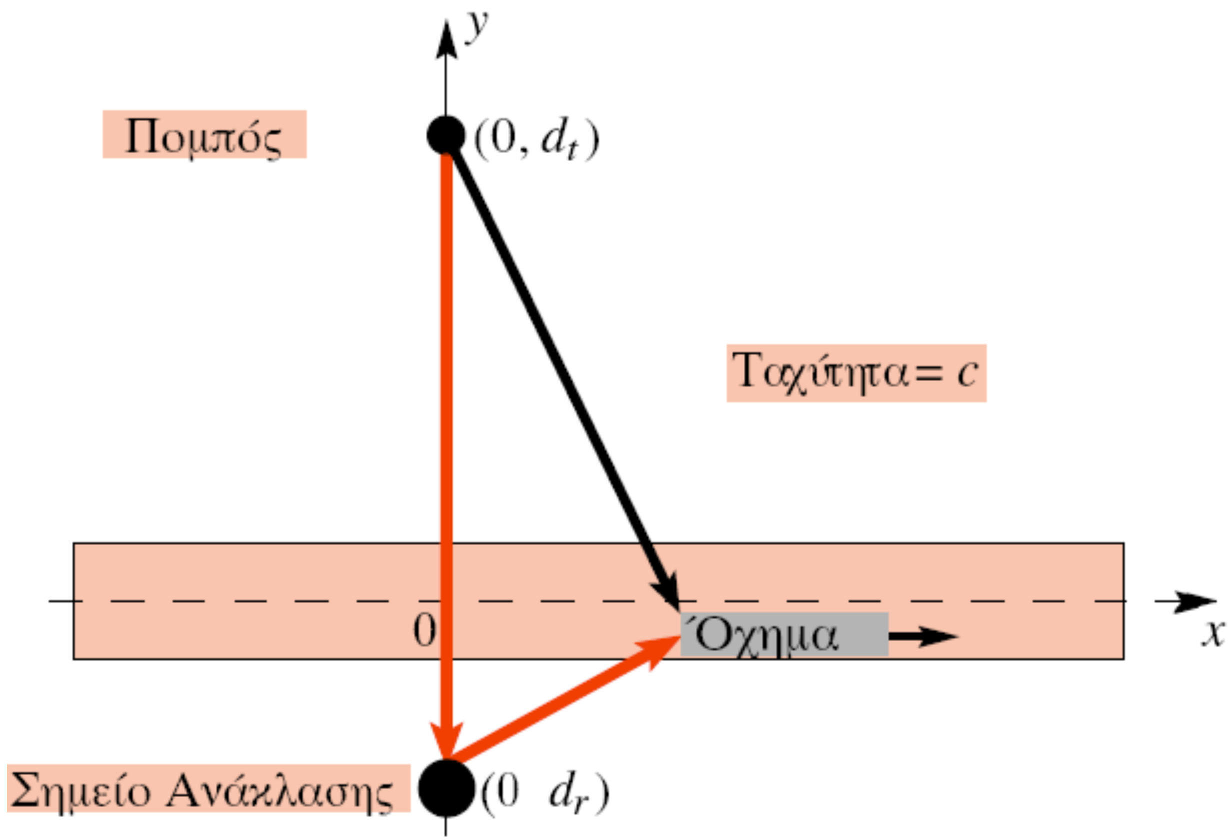


Μετασχηματισμός Fourier
&
το Πρόβλημα της Πολύ-όδευσης

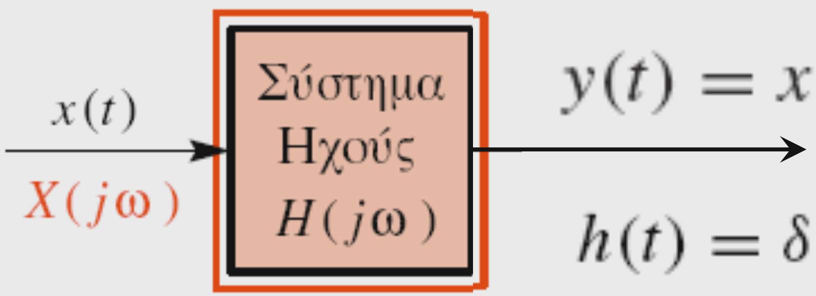
Το Πρόβλημα της Πολύ-όδευσης



Μετασχηματισμός Fourier
&
το Πρόβλημα της Πολύ-όδευσης



Μετασχηματισμός Fourier
&
το Πρόβλημα της Πολύ-όδευσης



$$y(t) = x(t) + \alpha x(t - t_d)$$

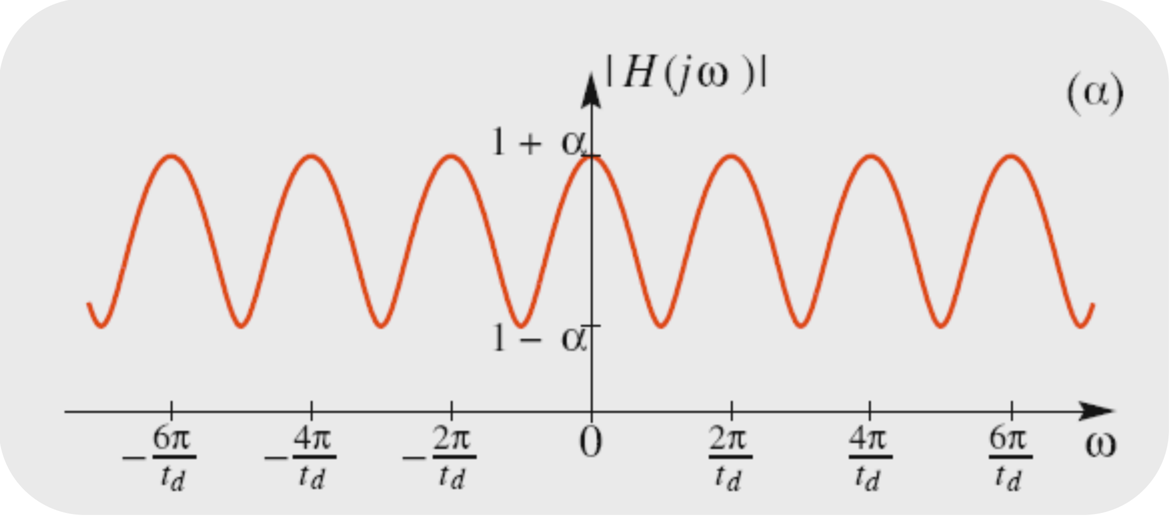
$$h(t) = \delta(t) + \alpha \delta(t - t_d)$$

Μετασχηματισμός Fourier
&
το Πρόβλημα της Πολύ-όδευσης

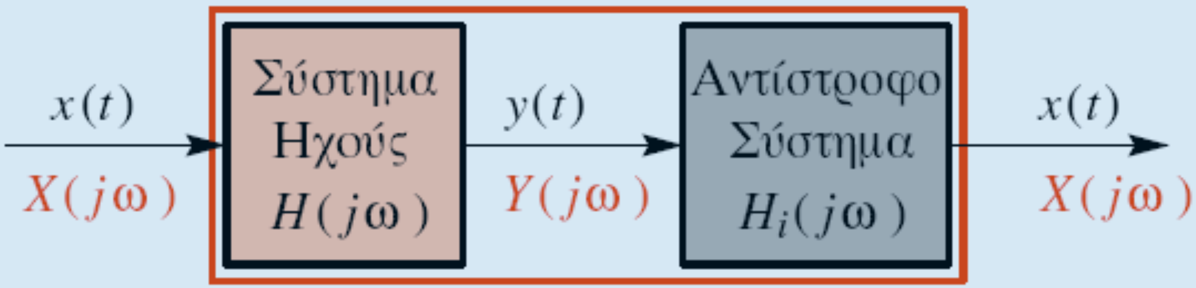
$$y(t) = x(t) + \alpha x(t - t_d)$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega) + \alpha e^{-j\omega t_d} X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = 1 + \alpha e^{-j\omega t_d}$$



Μετασχηματισμός Fourier
&
το Πρόβλημα της Πολύ-όδευσης

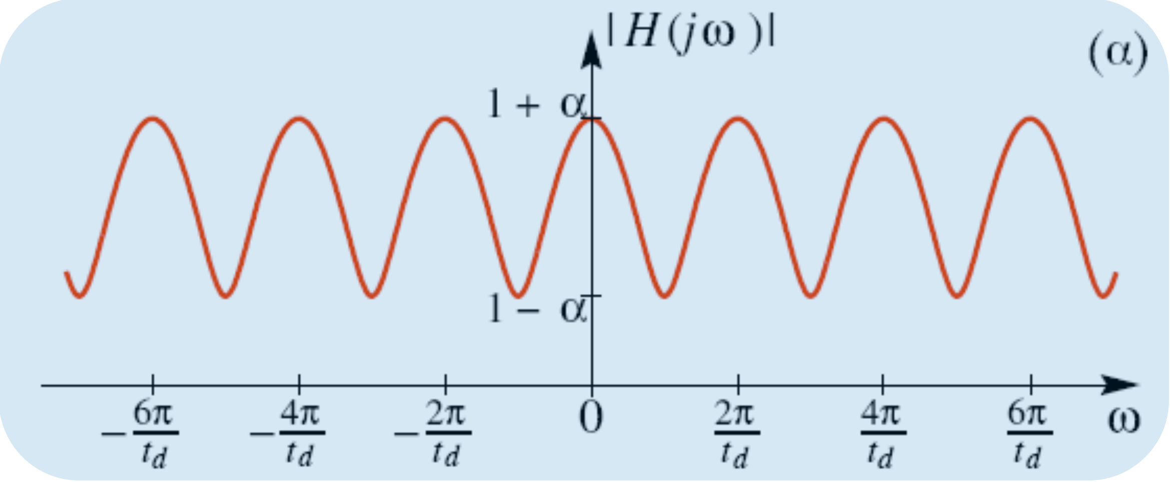


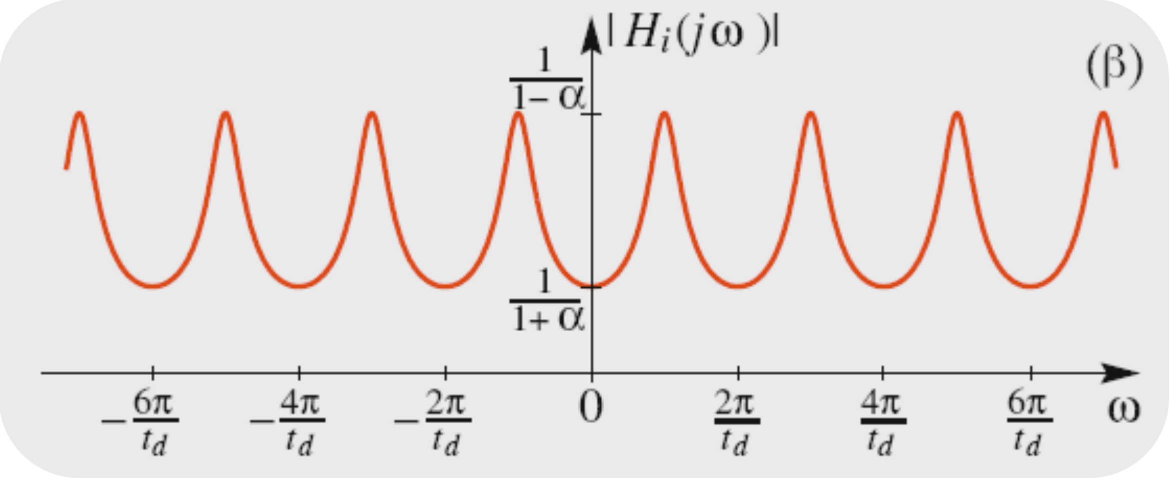
$$H_i(j\omega)H(j\omega) = 1$$

$$H_i(j\omega) = \frac{1}{H(j\omega)} = \frac{1}{1 + \alpha e^{-j\omega t_d}}$$

Μετασχηματισμός Fourier
&
το Πρόβλημα της Πολύ-όδευσης

Απόκριση Συχνότητας





Μετασχηματισμός Fourier
&
το Πρόβλημα της Πολύ-όδευσης

Η κρουστική Απόκριση του Αντίστροφου Συστήματος

$$
\begin{aligned}
H_i(j\omega) &= \frac{1}{1+\alpha e^{-j\omega t_d}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\alpha e^{-j\omega t_d}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k e^{-j\omega k t_d}
\end{aligned}
$$

Μετασχηματισμός Fourier
&
το Πρόβλημα της Πολύ-όδευσης

Η κρουστική Απόκριση του Αντίστροφου Συστήματος

$$h_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k \delta(t - kt_d)$$

Ζεύγη Μετασχηματισμών Fourier

$e^{-at}u(t) \quad (a>0)$	$\dfrac{1}{a+j\omega}$
$e^{bt}u(-t) \quad (b>0)$	$\dfrac{1}{b-j\omega}$
$u(t+\frac{1}{2}T)-u(t-\frac{1}{2}T)$	$\dfrac{\sin(\omega T/2)}{\omega/2}$
$\dfrac{\sin(\omega_b t)}{\pi t}$	$[u(\omega+\omega_b)-u(\omega-\omega_b)]$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_d)$	$e^{-j\omega t_d}$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{j\omega}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$A\cos(\omega_0 t+\phi)$	$\pi A e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0)+\pi A e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$
$\sin(\omega_0 t)$	$-j\pi\delta(\omega-\omega_0)+j\pi\delta(\omega+\omega_0)$