



ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

© Μετασχηματισμός Laplace

Εμμανουήλ Ζ. Φαράκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

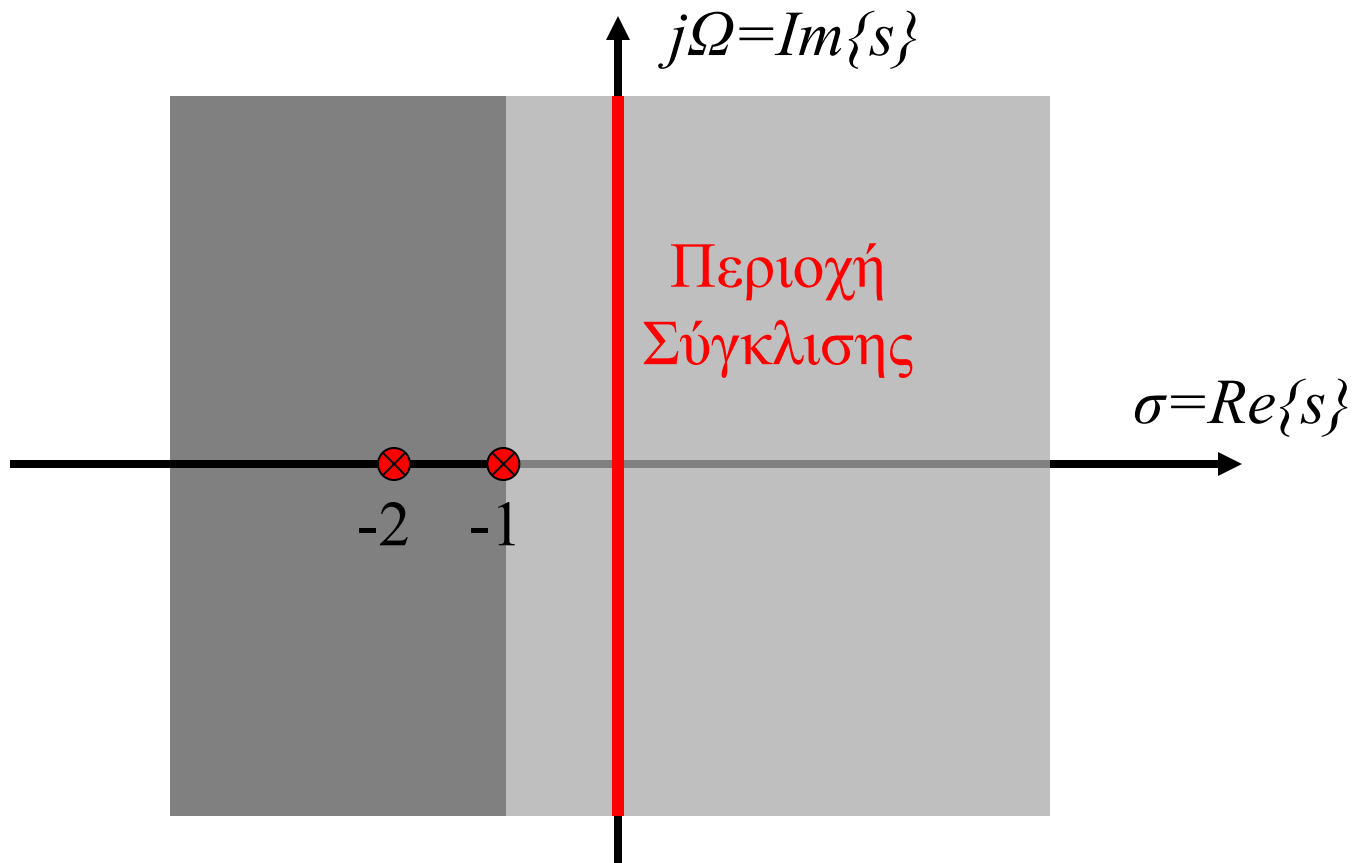
Μετασχηματισμός Laplace

- Αιτιατότητα Μη-Αιτιατότητα.
- Ευστάθεια.
- Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού Laplace των Ευσταθών & Αιτιατών Συστημάτων.
- Εκθετικά Σήματα.
- Πολυωνυμικά Εκθετικά Σήματα n -οστής τάξης.
- Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace.
- Αυστηρά ρητός Μετασχηματισμός Laplace & Ανάλυση σε Απλά κλάσματα.
- Ρητός Μετασχηματισμός Laplace.

Μετασχηματισμός Laplace



Μιγαδικό Επίπεδο-s



Μετασχηματισμός Laplace



Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού (*Αιτιατά & Μη-αιτιατά σήματα*)

$$x_1(t) = e^{-at} u(t) \quad \xleftrightarrow{L} \quad X_1(s) = \frac{1}{s+a}, \operatorname{Re}\{s\} > -a$$

$$x_2(t) = -e^{-at} u(-t) \quad \xleftrightarrow{L} \quad X_2(s) = \frac{1}{s+a}, \operatorname{Re}\{s\} < -a$$

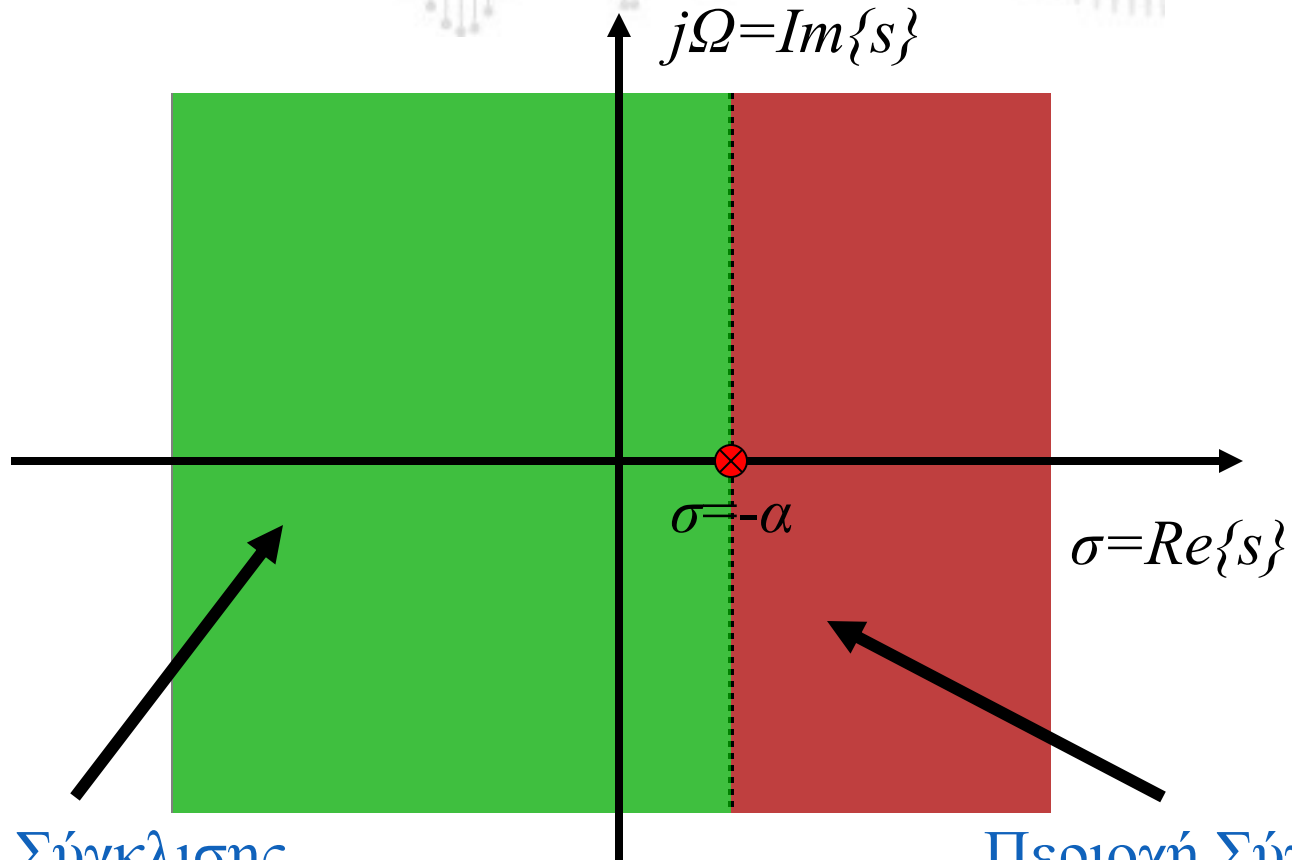
Μετασχηματισμός Laplace

$$x_2(t) = -e^{-\alpha t} u(-t)$$

Μιγαδικό Επίπεδο-s

$$x_1(t) = e^{-\alpha t} u(t)$$

⊗ Πόλος



Περιοχή Σύγκλισης

$$X_2(s) = L\{x_2(t)\}$$

$$\sigma = \text{Re}\{s\} < -\alpha$$

Περιοχή Σύγκλισης

$$X_1(s) = L\{x_1(t)\}$$

$$\sigma = \text{Re}\{s\} > -\alpha$$

Μετασχηματισμός Laplace



Εκθετικά Σήματα: $x(t) = e^{-at} u(t)$

$$x(t) = e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s + a}, \operatorname{Re}\{s\} > -a$$

Πολυωνυμικά Εκθετικά Σήματα *n-οστής* τάξης: $x(t) = \frac{t^n}{n!} e^{-at} u(t)$

$$x(t) = \frac{t^n}{n!} e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{(s + a)^{n+1}}, \operatorname{Re}\{s\} > -a$$

Μετασχηματισμός Laplace



Μετασχηματισμός Laplace & Διαφορικές Εξισώσεις

Θεωρήστε ένα ΓΧΑ σύστημα του οποίου η είσοδος και η έξοδος ικανοποιούν την ακόλουθη Δ.Ε.

$$\sum_{n=0}^N a_n y^{(n)}(t) = \sum_{n=0}^M \beta_n x^{(n)}(t)$$

Προσδιορίστε το Μετασχηματισμό *Laplace* της κρουστικής απόκρισης του συστήματος.

Μετασχηματισμός Laplace



Ιδιότητα της Διαφόρισης στο πεδίο του χρόνου

• Αν $X(s) = L\{x(t)\}$, τότε: $L\{x^{(1)}(t)\} = sX(s)$

Γενίκευση της ιδιότητας: $L\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s)$

Μετασχηματισμός Laplace

Λύση ΔΕ με Χρήση Μετασχηματισμού Laplace-Συνάρτηση Μεταφοράς

$$\sum_{n=0}^N a_n y^{(n)}(t) = \sum_{n=0}^M \beta_n x^{(n)}(t)$$

Εφαρμόζοντας Μετασχηματισμό *Laplace* και στα δύο μέλη, έχουμε:

$$\sum_{n=0}^N a_n L\{y^{(n)}(t)\} = \sum_{n=0}^M \beta_n L\{x^{(n)}(t)\}$$

και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαφορίσης, βρίσκουμε:

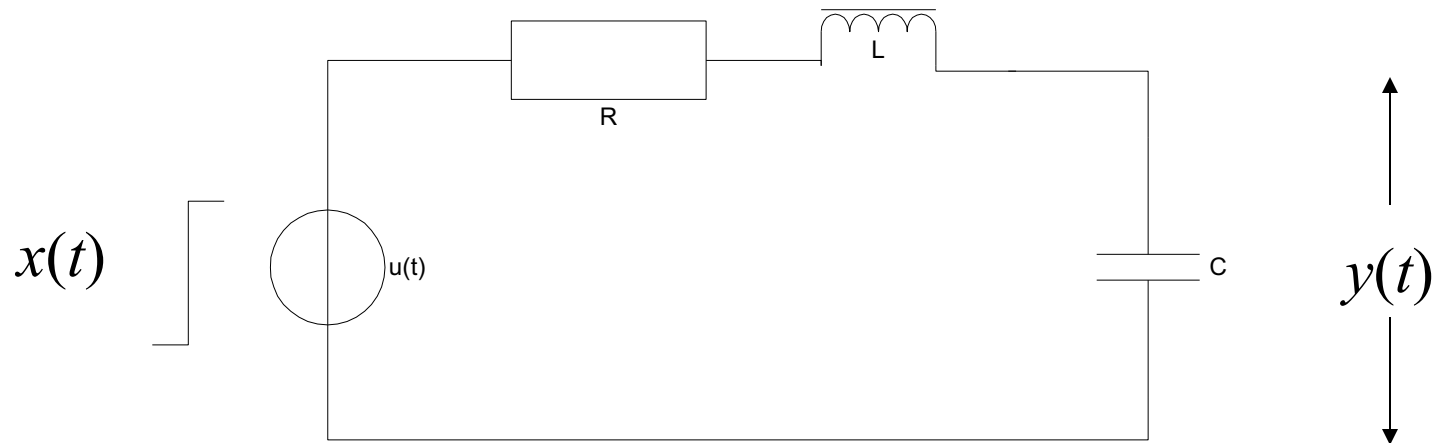
$$H(s) = L\{h(t)\} = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{n=0}^M \beta_n s^n}{\sum_{n=0}^N a_n s^n} \quad (\text{Συνάρτηση Μεταφοράς})$$

Μετασχηματισμός Laplace



Μετασχηματισμός Laplace & ΔΕ-Συνάρτηση Μεταφοράς

Προσδιορίστε τη Συνάρτηση Μεταφοράς του παρακάτω συστήματος:



Μετασχηματισμός Laplace



Μετασχηματισμός Laplace & ΔΕ-Χαρακτηρισμός Συστήματος

Θεωρήστε ένα ΓΧΑ σύστημα του οποίου η είσοδος και η έξοδος ικανοποιούν την ακόλουθη Δ.Ε.

$$y^{(1)}(t) + 3y(t) = x(t)$$

Προσδιορίστε την κρουστική απόκριση του συστήματος.

Μετασχηματισμός Laplace



Μετασχηματισμός Laplace & Δ.Ε-Ευστάθεια

Θεωρήστε ένα ΓΧΑ σύστημα για το οποίο γνωρίζουμε ότι αν εφαρμόσουμε στην είσοδό του το σήμα $x(t) = e^{-3t}u(t)$ η έξοδος του είναι $y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$.

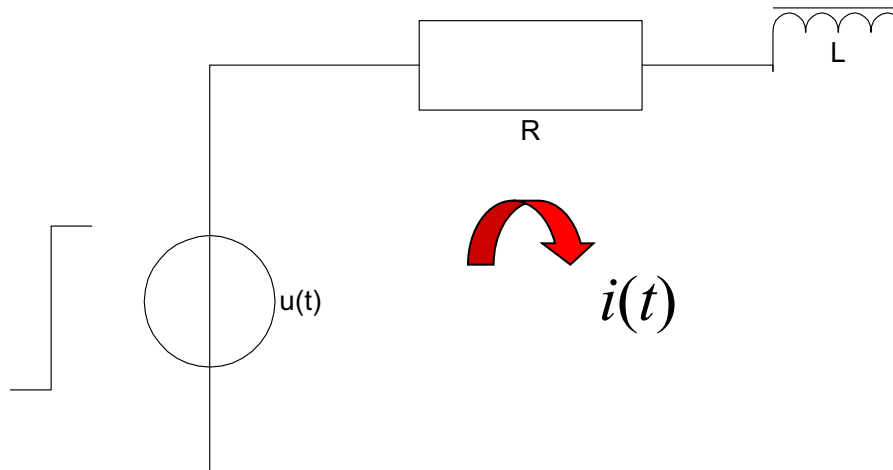
Χαρακτηρίστε το σύστημα ως προς την ευστάθειά του και προσδιορίστε τη Δ.Ε. που ικανοποιεί.

Μετασχηματισμός Laplace



Μετασχηματισμός Laplace & Διαφορικές Εξισώσεις

Προσδιορίστε το ρεύμα $i(t)$ που διαρρέει το παρακάτω κύκλωμα, αν γνωρίζουμε ότι $i(0^+) = i_0$.



Μετασχηματισμός Laplace



Μονόπλευρος Μετασχηματισμός Laplace

$$L_{0+} \{x(t)\} = X(s) = \int_{0+}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt, \quad s = \sigma + j\Omega$$

Υπολογίστε τον Αμφίπλευρο και το Μονόπλευρο Μετασχηματισμό του Σήματος $x(t) = e^{-a(t+1)}u(t+1)$

$$L\{x(t)\} = e^s \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

$$L_{0+}\{x(t)\} = e^{-a} \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

Μετασχηματισμός Laplace



Μονόπλευρος Μετασχηματισμός Laplace

$$L\{x(t)\} = X(s) = \int_a^{+\infty} x(t)e^{-st} dt, \quad s = \sigma + j\Omega$$

- *Ιδιότητα της Διαφόρισης στο πεδίο του χρόνου*
- *Αν $X(s)=L\{x(t)\}$, τότε: $L_a\{x^{(1)}(t)\} = sX(s) - x(a)$*

Γενίκευση της ιδιότητας:

$$L_a\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} x^{(k-1)}(a)$$

Μετασχηματισμός Laplace



Μονόπλευρος Μετασχηματισμός Laplace

Να λυθεί η Δ.Ε. $x^{(1)}(t) + 2x(t) = \delta(t)$, $x(0^-) = 1$, $t > 0^-$

- Κλασσικός Τρόπος Λύσης
- Χρησιμοποιώντας Μονόπλευρο Μετασχηματισμό Laplace ($\alpha=0+$)
- Χρησιμοποιώντας Μονόπλευρο Μετασχηματισμό Laplace ($\alpha=0-$)

Μετασχηματισμός Laplace



Ιδιότητα της Ολοκλήρωσης στο πεδίο του χρόνου

• Αν $X(s) = L_a\{x(t)\}$, και:
$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

τότε
$$L_a\{y(t)\} = \frac{X(s)}{s} + \frac{y(a)}{s}$$

Παράδειγμα: Λύστε την παρακάτω εξίσωση

$$Li^{(1)}(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = x(t), \quad \underbrace{v_c(0-), i_c(0-)}_{\text{γνωστά}}$$

Μετασχηματισμός Laplace



Μονόπλευρος Μετασχηματισμός Laplace

- *Θεώρημα Αρχικής και Τελικής τιμής*

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

Μετασχηματισμός Laplace

- *Θεώρημα Αρχικής Τιμής (Ανεξάρτητα από το α που χρησιμοποιούμε)*

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

- *Απόδειξη για τα σήματα που ανήκουν στην κλάση C_∞*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} L\{x^{(1)}(t)\} = 0$$

- *Απόδειξη για συνεχή σήματα και σήματα με ασυνέχεια στο $t=0$*
- *Γενίκευση του Θεωρήματος Αρχικής Τιμής για σήματα που περιέχουν και κρουστικές συναρτήσεις στο $t=0$.*

Μετασχηματισμός Laplace



• Γενίκευση του Θεωρήματος Αρχικής Τιμής για σήματα που περιέχουν και κρουστικές συναρτήσεις στο $t=0$.

• Αν

$$X(s) = \sum_{k=0}^K a_k s^k + X_o(s)$$

τότε

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX_o(s)$$

Μετασχηματισμός Laplace



Αιτιατά Περιοδικά Σήματα

Έστω

$$x(t) = \begin{cases} x(t + T), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

τότε

$$L\{x(t)\} = \frac{X_T(s)}{1 - e^{-sT}}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

όπου

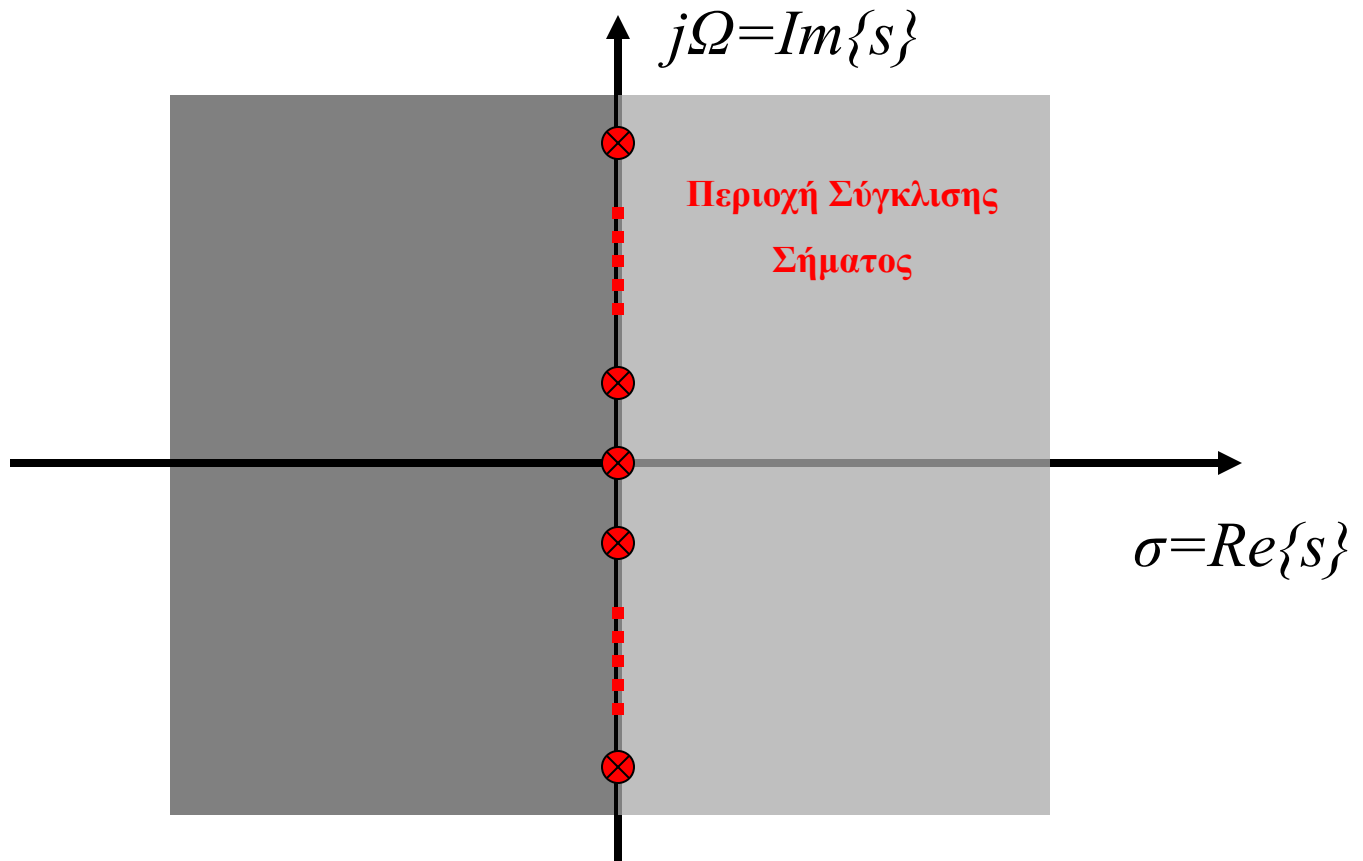
$$X_T(s) = L(x_T(t)), \quad x_T(t) = x(t), \quad T > t \geq 0$$

και μηδέν αλλού.

Μετασχηματισμός Laplace



Μιγαδικό Επίπεδο-s



Μετασχηματισμός Laplace



- Πόλοι στο Αριστερό Ημιεπίπεδο.

$$X(s) \Big|_{s=j\Omega} = F\{x(t)\} = X(j\Omega)$$

- Πόλοι Πάνω στον Φανταστικό άξονα (οριακή περίπτωση $\sigma=0$).

Τι γίνεται σ' αυτή την περίπτωση;