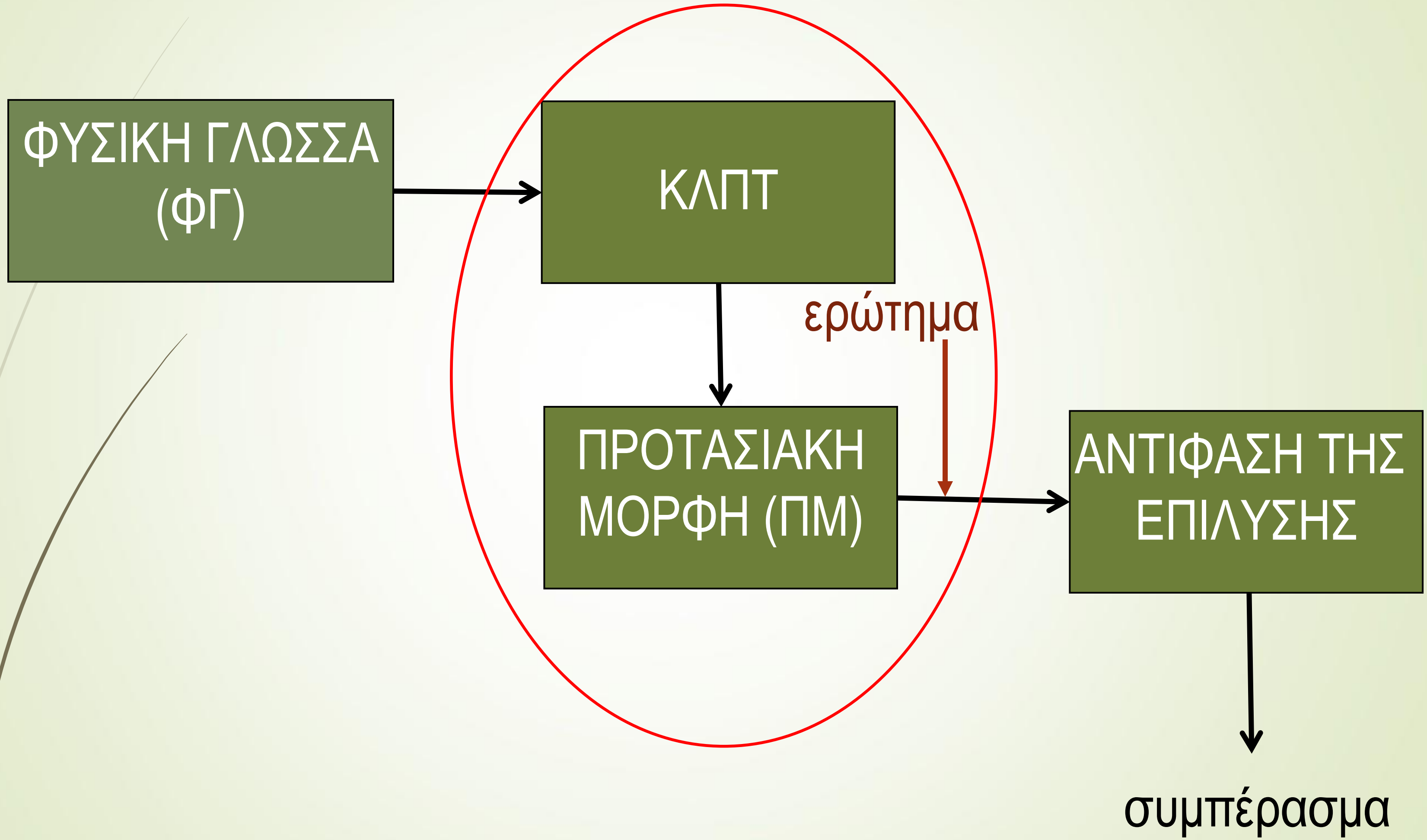
ΤΜΗΜΑ ΜΗΥΠ

ΠΜΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ (ΥΔΑ)

ΑΥΤΟΜΑΤΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕ ΛΟΓΙΚΗ

Ι. ΧΑΤΖΗΛΥΓΕΡΟΥΔΗΣ, ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΑΥΤΟΜΑΤΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ



ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΜΟΡΦΗ ΛΠΤ (CLAUSAL FORM OF FOL) (1)

ΒΑΣΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ

- **Ο χειρισμός προτάσεων ΚΛΠΤ για εξαγωγή συμπερασμάτων θα ήταν πολύπλοκος (λόγω των πολλών λογικών συμβόλων) και θα δημιουργούσε προβλήματα απόδοσης.**
- **Η προτασιακή μορφή (clause form) του ΚΛΠΤ είναι μια συντακτικά αρκετά απλούστερη μορφή λογικής, όπου έχουν απαλειφθεί όλα τα λογικά σύμβολα και έχει παραμείνει μόνο η διάζευξη.**
- **Το σημαντικό είναι ότι παρ' ότι η μορφή αυτή από πλευράς πληροφορίας και φυσικότητας είναι υποδεέστερη του ΚΛΠΤ, από πλευράς αποδεικτικών δυνατοτήτων είναι ισοδύναμη.**
- **Επίσης, υπάρχει αυτόματη διαδικασία μετατροπής**

ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΜΟΡΦΗ ΛΠΤ (CLAUSAL FORM OF FOL) (2)

ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

- **στοιχείο (literal):** ένα άτομο (θετικό στοιχείο) ή η άρνηση ενός ατόμου (αρνητικό στοιχείο)
- **πρόταση (clause):** σύνολο στοιχείων που παριστά τη διάζευξή τους

ΤΥΠΟΙ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

- κενή (empty)
- μοναδιαία (unit)
- θετική (positive), αρνητική (negative), μεικτή
- Horn

ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΜΟΡΦΗ ΛΠΤ (CLAUSAL FORM OF FOL) (3)

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΣΕ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΜΟΡΦΗ

1. Απαλοιφή συνεπαγωγών

$(F1 \Rightarrow F2) \rightarrow (\neg F1 \vee F2)$

2. Περιορισμός εμβέλειας αρνήσεων

$\neg(\neg F) \rightarrow F$

$\neg(\forall x)\ F \rightarrow (\exists\ x)\ (\neg F)$

$\neg(\exists\ x)\ F \rightarrow (\forall\ x)\ (\neg F)$

$\neg(F1 \wedge \ldots \wedge Fn) \rightarrow (\neg F1 \vee \ldots \vee \neg Fn)$

$\neg(F1 \vee \ldots \vee Fn) \rightarrow (\neg F1 \wedge \ldots \wedge \neg Fn)$

ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΜΟΡΦΗ ΛΠΤ (CLAUSAL FORM OF FOL) (4)

3. Μετονομασία μεταβλητών με το ίδιο όνομα που δεσμεύονται από διαφορετικούς ποσοδείκτες

4. Μετατροπή σε ΚΜΡ (PNF)

5. Απαλοιφή υπαρξιακών ποσοδεικτών (Skolemisation)
   - σταθερές Skolem
   - συναρτήσεις Skolem

6. Απαλοιφή καθολικών ποσοδεικτών

7. Μετατροπή σ ε ΚΣΜ (CNF)

$(F \vee (F1 \wedge \ldots \wedge Fn)) \rightarrow ((F \vee F1) \wedge \ldots \wedge (F \vee Fn))$

ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΜΟΡΦΗ ΛΠΤ (CLAUSAL FORM OF FOL) (5)

8. Απαλοιφή διασυνδετικών και καταγραφή των παραχθέντων προτάσεων

9. Μετονομασία μεταβλητών (περίπτωση περισσοτέρων της μιας προτάσεων με κοινές μεταβλητές)

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΣΕ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΜΟΡΦΗ-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (1)

Πρόταση ΚΛΠΤ: $(\forall x)\ (a(x) \wedge b(x)) \Rightarrow (\exists\ y)\ d(x, y)$

1. Απαλοιφή συνεπαγωγών

   $(\forall x)\ \neg(a(x) \wedge b(x)) \vee (\exists\ y)\ d(x, y)$

2. Περιορισμός εμβέλειας αρνήσεων

   $(\forall x)\ (\neg a(x) \vee \neg\ b(x)) \vee (\exists\ y)\ d(x, y)$

3. Μετονομασία μεταβλητών (Μη εφαρμόσιμο)
4. Μετατροπή σε ΚΜΡ (PNF)

   $(\forall x)\ (\exists\ y)\ ((\neg a(x) \vee \neg\ b(x)) \vee d(x, y))$

5. Απαλοιφή υπαρξιακών ποσοδεικτών

   $(\forall x)\ ((\neg a(x) \vee \neg\ b(x)) \vee d(x, f(x)))$

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΣΕ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΜΟΡΦΗ-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (2)

6. Απαλοιφή καθολικών ποσοδεικτών

   $((\neg a(x) \vee \neg b(x)) \vee d(x, f(x)))$

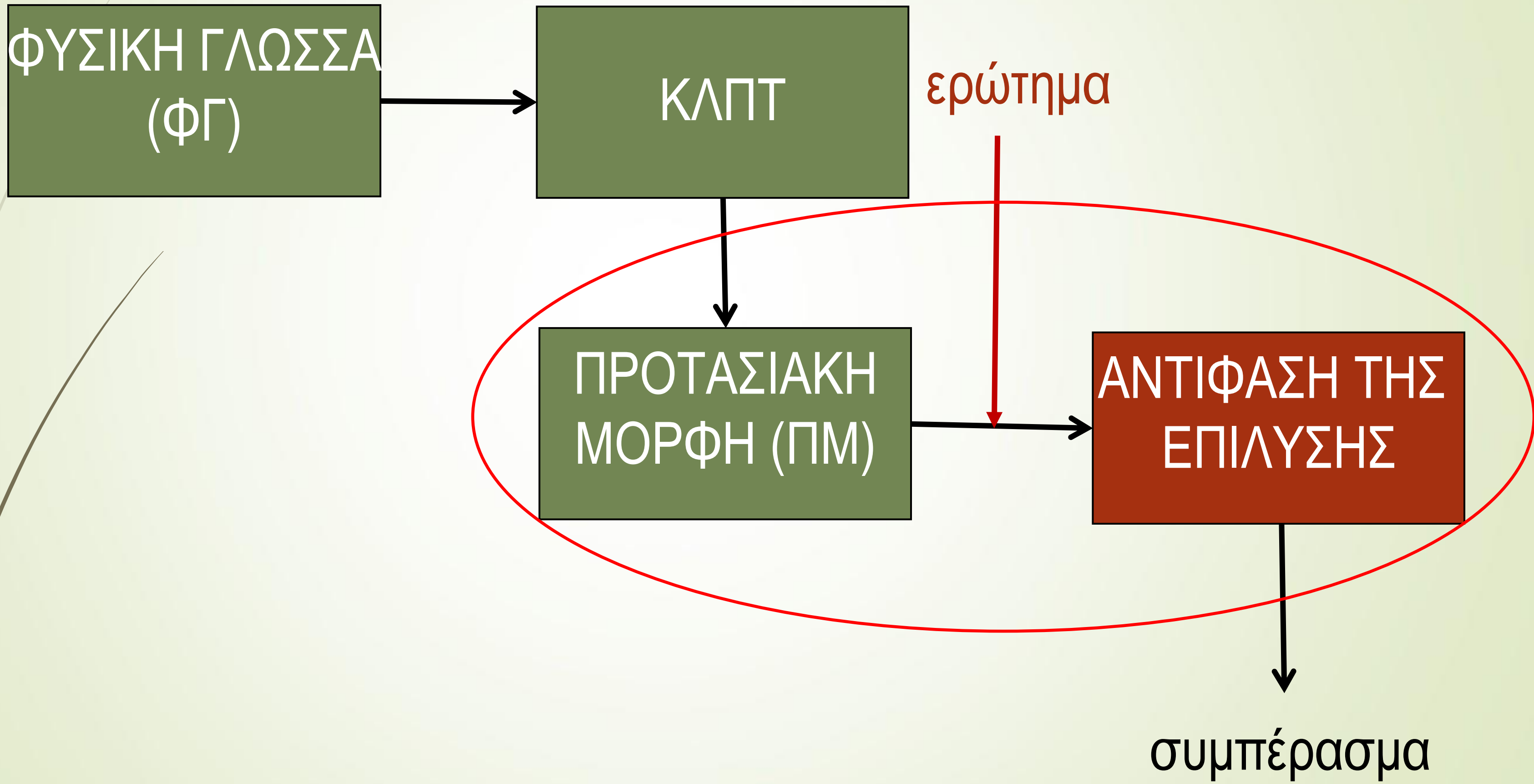
7. Μετατροπή σ ε ΚΣΜ (CNF) (Μη εφαρμόσιμο)

8. Απαλοιφή διασυνδετικών-δημιουργία προτάσεων

   $\varphi \equiv \{\neg a(x), \neg b(x), d(x, f(x))\}$

9. Μετονομασία μεταβλητών (Μη εφαρμόσιμο)

ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΑΥΤΟΜΑΤΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ



ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ (SUBSTITUTION) (1)

ΟΡΙΣΜΟΣ

$\{t_1/v_1, \ldots , t_n/v_n\}$ με $v_i \neq t_i$

όπου $t_1 , \ldots , t_n$ όροι $\rightarrow$ **προσδέσεις**

και $v_1 , \ldots , v_n$ μεταβλητές $\rightarrow$ **δεσμευμένες**

Αν κανένα t_i δεν περιέχει κανένα v_i τότε λέγεται *αντικατάσταση βάσης (ground substitution)*

<u>Εφαρμογή αντικατάστασης</u> (θ) σε έκφραση (Ε):

Εθ (*στιγμιότυπο* της Ε)

ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ (SUBSTITUTION) (2)

Σύνθεση Αντικαταστάσεων

$$\theta = \{t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n\},\ \sigma = \{u_1/y_1, \ldots, u_m/y_m\}$$

$\theta \circ \sigma$ (ή $\theta\sigma$) $= \{t_1\sigma/x_1, \ldots, t_n\sigma/x_n, u_1/y_1, \ldots, u_m/y_m\}$

πλην $t_i\sigma/x_i$ με $t_i\sigma = x_i$

και u_i/y_i με $y_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$

ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ (SUBSTITUTION) (3)

<u>Παράδειγμα</u>

¨Εστω $\theta = \{f(y)/x,\ y/z\}$, $\sigma = \{a/x,\ b/y,\ c/z\}$

Τότε

1. $\theta \circ \sigma = \{f(b)/x,\ b/z,\ \cancel{a/x},\ b/y,\ \cancel{c/z}\}$

2. $\theta \circ \sigma = \{f(b)/x,\ b/z,\ b/y\}$

ΕΝΟΠΟΙΗΣΗ (UNIFICATION) (1)

- Μια αντικατάσταση θ καλείται **ενοποιήτρια** (**unifier**) του συνόλου $\{E_1, \ldots , E_n\}$ αν $E_1\theta = \ldots = E_n\theta$. Το σύνολο καλείται **ενοποιήσιμο** (**unifiable**).
- Μια ενοποιήτρια σ ενός συνόλου καλείται **γενικότερη ενοποιήτρια** (most general unifier-mgu) αν για κάθε άλλη ενοποιήτρια θ του συνόλου υπάρχει μια αντικατάσταση λ τέτοια ώστε $\theta = \sigma \circ \lambda$.
- **Ενοποίηση** (unification) είναι η διαδικασία με την οποία εξετάζουμε αν δύο εκφράσεις μπορούν να γίνουν <u>συντακτικά ταυτόσημες</u> με την εφαρμογή κάποιας αντικατάστασης.

ΕΝΟΠΟΙΗΣΗ (UNIFICATION) (2)

Κανόνες Ενοποίησης Όρων

1.Μια σταθερά ενοποιείται μόνο με μια ίδια σταθερά ή μια μεταβλητή.

2.Μια μεταβλητή ενοποιείται με οποιοδήποτε όρο εκτός αν αυτός είναι συνάρτηση που περιέχει τη μεταβλητή.

3.Μια συνάρτηση ενοποιείται μόνο με μια συνάρτηση με το ίδιο συναρτησιακό σύμβολο και ενοποιήσιμες παραμέτρους.

Κανόνας Ενοποίησης Στοιχείων

Δύο στοιχεία ενοποιούνται αν έχουν την ίδια πολικότητα, το ίδιο κατηγόρημα, ενοποιήσιμους όρους και η αντικατάσταση που προκύπτει δεν έχει συγκρούσεις προσδέσεων ίδιων μεταβλητών.

ΕΝΟΠΟΙΗΣΗ (UNIFICATION) (3)

Παραδείγματα

1. p(a, y, z) , p(x, b, z) ενοποιούνται με γ.ε. σ = {a/x, b/y}
2. q(a, y, z), p(x, b, z) δεν ενοποιούνται διότι p $\neq$ q
3. p(a, y, z), $\neg$p(x, b, z) δεν ενοποιούνται λόγω διαφ. Πολικότητας
4. p(a, y, z) , p(x, f(a), c) ενοποιούνται με γ.ε. σ = {a/x, f(a)/y, c/z}

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ (RESOLUTION PRINCIPLE) (1)

Αρχή της Επίλυσης

- Είναι ένας κανόνας εξαγωγής συμπερασμάτων (ΚΕΣ) που εφαρμόζεται στην προτασιακή μορφή του ΚΛΠΤ.
- Αναφέρεται στην παραγωγή μιας «νέας» πρότασης από δύο υπάρχουσες.
- Επειδή από μόνος του ο κανόνας αυτός δεν εξασφαλίζει πληρότητα, συνοδεύεται συνήθως από ένα απλούστερο κανόνα (ή μετασχηματισμό), την παραγοντοποίηση (factoring).
- Η παραγοντοποίηση επιδρά σε μια πρόταση και την μετασχηματίζει σε μια άλλη, στηριζόμενη στην ενοποίηση στοιχείων της πρότασης.

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ (RESOLUTION PRINCIPLE) (2)

Παράγων (factor): Αν δύο ή περισσότερα στοιχεία μιας πρότασης C έχουν μια γενικότερη ενοποιήτρια γ τότε η Cγ καλείται παράγων της C.

Αρχή της Επίλυσης (ΑΕ): Αν L1, L2 είναι στοιχεία των C1, C2 αντίστοιχα και τα L1, $\neg$L2 έχουν μια γενικότερη ενοποιήτρια σ τότε η (C1σ - L1σ) $\cup$ (C2σ - L2σ) καλείται *δυαδική επιλύουσα (binary resolvent)* των C1, C2.

Επιλύουσα δύο προτάσεων C1, C2 είναι μια από τα παρακάτω:

1. δ.ε. C1 και C2, **2.** δ.ε. C1 και π. C2

3. δ.ε. π.C1 και C2, **4.** δ.ε. π.C1 και π.C2

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ (RESOLUTION PRINCIPLE) (3)

Οι C1, C2 ονομάζονται αριστερός γονέας και δεξιός γονέας αντίστοιχα.

Παράδειγμα

$C1=\{p(x), p(f(y)), r(g(y))\}$, $C2= \{\neg p(f(g(a)), q(b)\}$

Η $C1$ έχει παράγοντα την $C1' = \{p(f(y)), r(g(y))\}$, ενώ η C2 δεν έχει

Οπότε επειδή επιλύονται τα «p(f(y))» και «¬p(f(g(a))» με

$\sigma = \{g(a)/y\}$ παράγεται η επιλύουσα των $C1'$ και $C2$ που είναι η

$C12 = \{r(g(g(a)), q(b))$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ (THEOREM PROVING) (1)

Θεώρημα: Αν $S \cup \{\varphi\}$ είναι ασυνεπές τότε $S \models \neg\varphi$. Άρα αν $S \cup \{\neg\varphi\}$ είναι ασυνεπές τότε $S \models \varphi$, όπου S είναι ένα σύνολο λογικών προτάσεων.

ΑΝΤΙΦΑΣΗ ΕΠΙΛΥΣΗΣ (RESOLUTION REFUTATION)

Η διαδικασία για την απόδειξη ενός θεωρήματος φ από ένα σύνολο αξιωμάτων S (οι προτάσεις στο S σε προτασιακή μορφή)

1. $S' = S \cup \{\neg\varphi\}$ (η $\neg\varphi$ σε προτασιακή μορφή)
2. Εφαρμογή της ΑΕ, παραγωγή επιλύουσας
3. Αν επιλύουσα =κενή πρόταση, σταμάτα (επιτυχία)
4. Ενημέρωση του S' (προσθήκη επιλύουσας)
5. Πήγαινε στο 2

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ (THEOREM PROVING) (2)

Παράδειγμα

S = {$C1$, $C2$} με $C1$ = {p(u), p(v)} , $C2$= {¬p(x), ¬p(y)}

Η $C1$ έχει παράγοντα την $C1'$ = {p(v)}, ενώ η C2 έχει την

$C2'$ = {¬ p(y)}

Οπότε παράγεται η επιλύουσα των $C1'$ και $C2'$ που είναι η

$C12$ = { }

Άρα το S είναι ασυνεπές.

Παρατηρούμε ότι χωρίς την χρήση παραγόντων αυτό δεν μπορεί να αποδειχθεί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (1)

Δίνονται οι παρακάτω προτάσεις ΚΛΠΤ

(α)

(1) works (george, patras) — works(george,patra)

(2) works (paul, rio) — works(paul,rio)

(3) master (george, pluto) — master(george,pluto)

(4) master (paul, boby) — master(paul,boby)

(5) $(\forall x)\ (\forall y)\ (\text{works}\ (x, y) \Rightarrow \text{lives}\ (x, y))$ — $\neg\text{works}(x1,y1) \vee \text{lives}(x1,y1)$

(6) $(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ ((\text{master}\ (x, y) \wedge \text{lives}\ (x, z)) \Rightarrow \text{lives}\ (y, z))$

$\neg\text{master}(x2,y2) \vee \neg\text{lives}(x2,z) \vee \text{lives}(y2,z)$

όπου x, y, z είναι μεταβλητές.

$\neg\text{lives}(x,\text{rio})$

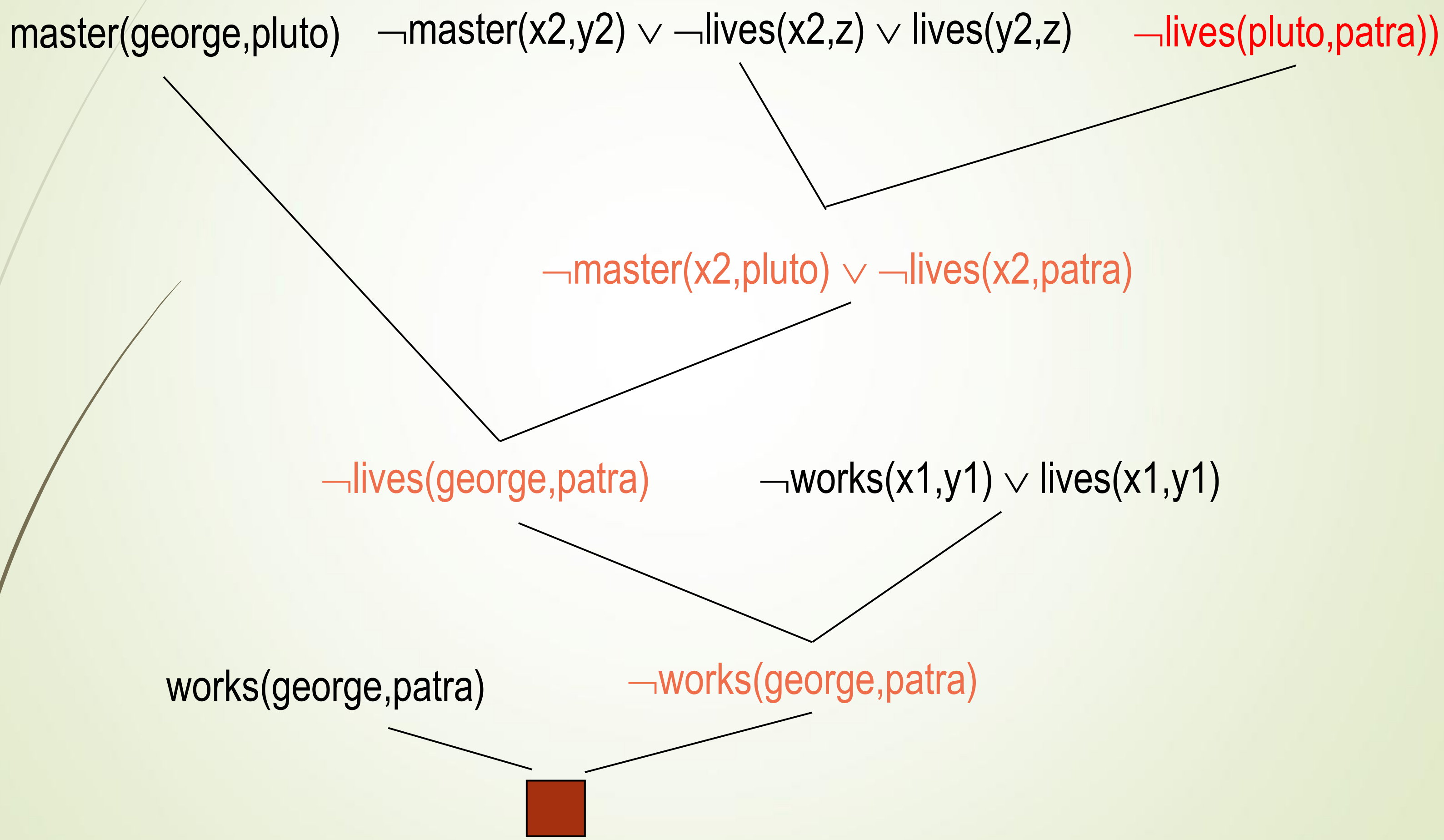
(α) Να μετατραπούν σε προτασιακή μορφή.

(β) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της αντίφασης της επίλυσης, αποδείξτε την πρόταση lives (pluto, patras).

(γ) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της αντίφασης της επίλυσης, βρείτε τις τιμές της μεταβλητής x για τις οποίες αληθεύει η πρόταση $(\exists x)$ lives (x, rio).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (2)

(β)



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ με ισότητα (1)

Παράδειγμα 1:

- Έστω a, b, c τρεις σταθερές, και S το παρακάτω σύνολο προτάσεων κατηγορηματικής λογικής:

$$S = \{ a = b, b = c, \neg(a=c) \}$$

- Προφανώς το S είναι μη-ικανοποιήσιμο. Ωστόσο η επίλυση δεν παράγει το κενό σύνολο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ με ισότητα (2)

Παράδειγμα 2:

Έστω a, b τρεις σταθερές, P κατηγόρημα και S το παρακάτω σύνολο προτάσεων κατηγορηματικής λογικής:

$$S = \{ a = b, P(a), \neg P(b) \}$$

Προφανώς το S είναι μη-ικανοποιήσιμο. Ωστόσο η επίλυση δεν παράγει το κενό σύνολο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ με ισότητα (3)

Για τον σωστό χειρισμό της ισότητας προσθέτουμε στην βάση γνώσης μας τα ακόλουθα αξιώματα:

- E1. $\forall x\,(x = x)$
- E2. $\forall x \forall y\,(x=y \Rightarrow y=x)$
- E3. $\forall x \forall y \forall z\,(x=y \land y=z \Rightarrow x=z)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ με ισότητα (4)

Επίσης, για κάθε συνάρτηση *f* με n μεταβλητές προσθέτουμε το αξίωμα

- E4. $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1=y_1 \wedge \ldots \wedge x_n=y_n \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n))$

και για κάθε κατηγόρημα P με n όρους προσθέτουμε το αξίωμα

- E5. $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1=y_1 \wedge \ldots \wedge x_n=y_n) \Rightarrow P(x_1, \ldots, x_n) \equiv P(y_1, \ldots, y_n))$

Στην συνέχεια η ισότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην επίλυση σαν ένα κοινό κατηγόρημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ με ισότητα (5)

Να αποδειχθεί ότι το σύνολο S = { father-of(John) = Bill, ∀x (married(father-of(x), mother-of(x)), ¬married(Bill, mother-of(John)) } είναι μη-ικανοποίησιμο.

Εισαγωγή αξιωμάτων ισότητας για το κατηγόρημα «married»:

Εισάγεται η πρόταση:

$\forall x1,x2\ \forall y1,y2\ (x1=y1 \wedge x2=y2) \Rightarrow married(x1,x2) \Leftrightarrow married(y1,y2)$

η οποία αναλύεται σε

1. $\forall x1,x2\ \forall y1,y2\ (x1=y1 \wedge x2=y2) \Rightarrow (married(x1,x2) \Rightarrow married(y1,y2))$

και

2. $\forall x1,x2\ \forall y1,y2\ (x1=y1 \wedge x2=y2) \Rightarrow (married(y1,y2) \Rightarrow married(x1,x2))$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ με ισότητα (6)

1. father-of(John) = Bill
2. $\forall x$ (married(father-of(x), mother-of(x))
3. $\neg$married(Bill, mother-of(John))
4. $\forall x\ (x = x)$
5. $\forall x \forall y\ (x=y \ \Rightarrow y=x)$
6. $\forall x \forall y \forall z\ (x=y \wedge y=z \ \Rightarrow x=z)$
7. $\forall x\ \forall y$ (x=y) => (father-of(x) => father-of(y))
8. $\forall x\ \forall y$ (x=y) => (mother-of(x) => mother-of(y))
9. $\forall x1,x2\ \forall y1,y2$ ($x1=y1 \wedge x2=y2$) => (married(x1,x2) => married(y1,y2))
10. $\forall x1,x2\ \forall y1,y2$ ($x1=y1 \wedge x2=y2$) => (married(y1,y2) => married(x1,x2))

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ με ισότητα (7)

Η προτασιακή μορφή της (9) προκύπτει ως εξής (οι καθολικοί ποσοδείκτες αφαιρούνται εξ' αρχής για διευκόλυνση):

1. $(x1=y1 \wedge x2=y2) \Rightarrow (married(x1,x2) \Rightarrow married(y1,y2))$
2. $(x1=y1 \wedge x2=y2) \Rightarrow (\neg married(x1,x2) \vee married(y1,y2))$
3. $\neg (x1=y1 \wedge x2=y2) \vee (\neg married(x1,x2) \vee married(y1,y2))$

και τελικά

$\{\neg (x1=y1)\ ,\ \neg(x2=y2),\ \neg married(x1,x2),\ married(y1,y2)\}$

Παρόμοια γίνεται και για την (10), οπότε προκύπτει:

$\{\neg (x1=y1),\ \neg(x2=y2),\ \neg married(y1,y2),\ married(x1,x2)\}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ με ισότητα (8)

1. {father-of(John) = Bill}
2. { (married(father-of(x), mother-of(x)) }
3. {¬married(Bill, mother-of(John))}
4. {y = y}
5. {¬(z=w), w=z }
6. {¬(r=s), ¬(s=t), r=t }
7. {¬(x1=y1),¬ father-of(x1), father-of(y1)}
8. {¬(x2=y2), ¬ mother-of(x2), mother-of(y2)}
9. {¬(x3=y3), ¬(x4=y4), ¬married(x3,x4), married(y3,y4)}
10. {¬ (x5=y5), ¬(x6=y6), ¬married(y5,y6), married(x5,x6)}

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ με ισότητα (9)

Εφαρμογή της αντίφασης της επίλυσης:

3.{ ¬married(Bill, mother-of(John)) }   9.{ $\neg(x_3=y_3)$, $\neg(x_4=y_4)$, ¬married(x_3,x_4), married(y_3,y_4) }

{Bill/y_3, mother-of(John)/y_4}

11.{ $\neg(x_3=$Bill), ¬(x_4=mother-of(John)), ¬married(x_3,x_4) }   1.{ father-of(John) = Bill }

{father-of(John)/x_4}

12.{ ¬(x_4=mother-of(John)), ¬married(father-of(John), x_4) }   2.{ married(father-of(x), mother-of(x)) }

{John/x, mother-of(x)/x_4 }

13.{ ¬(mother-of(John)=mother-of(John)) }   4.{ y=y }

{ }

ΠΑΡΑΜΟΡΦΟΠΟΙΗΣΗ (PARAMODULATION) - ΚΑΝΟΝΑΣ ΧΕΙΡΙΣΜΟΥ ΙΣΟΤΗΤΑΣ (1)

Αναγκαιότητα

- Η σχέση ισότητας είναι: ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική
- Χρειαζόμαστε επί πλέον K αξιώματα για αναπαράσταση των παραπάνω ιδιοτήτων
- Η εφαρμογή της κλασσικής επίλυσης στο $S \cup K$ είναι μη αποδοτική
- Υπάρχει ανάγκη για συγκεκριμένο κανόνα χειρισμού της ισότητας

ΠΑΡΑΜΟΡΦΟΠΟΙΗΣΗ (PARAMODULATION) - ΚΑΝΟΝΑΣ ΧΕΙΡΙΣΜΟΥ ΙΣΟΤΗΤΑΣ (2)

Παράδειγμα

- C1: P(a), C2: a = b

  Εκμεταλλευόμενοι τα αξιώματα ισότητας → C3 = P(b).

Ορισμός (Αντικατάσταση ισότητας)

Αν μια πρόταση C περιέχει τον όρο t (C[t]) και αν έχουμε τη μοναδιαία πρόταση t = s, τότε παράγεται μια νέα πρόταση αντικαθιστώντας μια εμφάνιση του t με το s (υποδηλώνεται ως C[s])

ΠΑΡΑΜΟΡΦΟΠΟΙΗΣΗ (PARAMODULATION) - ΚΑΝΟΝΑΣ ΧΕΙΡΙΣΜΟΥ ΙΣΟΤΗΤΑΣ (3)

Βασική Παραμορφοποίηση (Ground Paramodulation)

Από C1: $L[t] \vee C1'$ και C2: $t = s \vee C2'$

Εξάγουμε το παραμορφοποίημα (paramodulant):

$L[s] \vee C1' \vee C2'$

<u>Παράδειγμα</u>

Από C1 : $P(a) \vee Q(b)$ και C2 : $a = b \vee R(b)$

Εξάγουμε το παραμορφοποίημα $P(b) \vee Q(b) \vee R(b)$

ΠΑΡΑΜΟΡΦΟΠΟΙΗΣΗ (PARAMODULATION) - ΚΑΝΟΝΑΣ ΧΕΙΡΙΣΜΟΥ ΙΣΟΤΗΤΑΣ (4)

Παραμορφοποίηση Γενικών Προτάσεων (General Paramodulation)

Αντικατάσταση πριν την εφαρμογή παραμορφοποίησης

<u>Παράδειγμα</u>

Από C1 : $P(x) \vee Q(b)$, C2 : $a = b \vee R(b)$,

$\sigma = \{a/x\}$ και C1’: $C1\sigma = P(a) \vee Q(b)$,

Εξάγουμε το παραμορφοποίημα των C1 και C2:

C3’ = $P(b) \vee Q(b) \vee R(b)$

ΠΑΡΑΜΟΡΦΟΠΟΙΗΣΗ (PARAMODULATION) - ΚΑΝΟΝΑΣ ΧΕΙΡΙΣΜΟΥ ΙΣΟΤΗΤΑΣ (5)

Ορισμός

Αν C1: L[t] $\vee$ C1’, C2: r = s $\vee$ C2’ και C1 και C2 δεν έχουν κοινές μεταβλητές, και σ είναι η γενικότερη ενοποιήτρια των t και r, μπορούμε να εξάγουμε το *δυαδικό παραμορφοποίημα*:

C12: Lσ[sσ] $\vee$ C1’σ $\vee$ C2’σ

όπου Lσ[sσ] προκύπτει αντικαθιστώντας μια εμφάνιση του tσ στην Lσ με το sσ.

- Η C12 καλείται *δυαδικό παραμορφοποίημα* των C1 και C2
- Τα L και r = s είναι τα στοιχεία που παραμορφοποιήθηκαν
- Η διαδικασία καλείται παραμορφοποίηση από τη C2 στην C1.

ΠΑΡΑΜΟΡΦΟΠΟΙΗΣΗ (PARAMODULATION) - ΚΑΝΟΝΑΣ ΧΕΙΡΙΣΜΟΥ ΙΣΟΤΗΤΑΣ (6)

Παράδειγμα-1

C1: $P(g(f(x))) \vee Q(x)$ και C2: $f(g(b)) = a \vee R(g(c))$

Εφαρμογή Παραμορφοποίησης

- t: $f(x)$, L[t]: $P(g(f(x)))$
- r: $f(g(b))$, r = s : $f(g(b)) = a$
- $\sigma = \{g(b)/x\}$
- $C12 = P(g(a)) \vee Q(g(b)) \vee R(g(c))$

ΠΑΡΑΜΟΡΦΟΠΟΙΗΣΗ (PARAMODULATION) - ΚΑΝΟΝΑΣ ΧΕΙΡΙΣΜΟΥ ΙΣΟΤΗΤΑΣ (6)

Παράδειγμα-2

C1: $P(f(x,a), y) \vee R(y)$ και C2: $f(c,a) = g(b) \vee R(g(b))$

Εφαρμογή Παραμορφοποίησης (τρία παραμορφοποιήματα)

- $P(g(b),y) \vee R(y) \vee R(g(b))$
- $P(f(x,a), g(b)) \vee R(f(c,a)) \vee R(g(b))$
- $P(f(x,a), f(c,a)) \vee R(g(b))$

ΠΑΡΑΜΟΡΦΟΠΟΙΗΣΗ (PARAMODULATION) - ΚΑΝΟΝΑΣ ΧΕΙΡΙΣΜΟΥ ΙΣΟΤΗΤΑΣ (6)

Παραμορφοποίημα (paramodulant) δύο προτάσεων C1, C2 είναι ένα από τα παρακάτω:

1. δ.π. C1 και C2, **2.** δ.π. C1 και π. C2

3. δ.π. π.C1 και C2, **4.** δ.π. π.C1 και π.C2

(δ.π.: δυαδικό παραμορφοποίημα)

ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ TABLEAUX (1)

- Η μέθοδος Tableaux είναι μια διαδικασία με την οποία εξετάζουμε αν (αποδεικνύουμε ότι) ένα σύνολο λογικών προτάσεων είναι ασυνεπές (inconsistent).
- Προχωρά βήμα-βήμα διασπώντας σύνθετες λογικές προτάσεις σε απλούστερες, κάνοντας έτσι απλούστερο τον έλεγχο ασυνεπειών.
- Η διαδικασία της απόδειξης απεικονίζεται ως ένα tableaux, δηλ. ένα δυαδικό δέντρο, οι κόμβοι του οποίου ονοματίζονται με λογικούς τύπους (formulas).

ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ TABLEAUX (2)

- Ξεκινάμε τοποθετώντας τις λογικές προτάσεις και την άρνηση της προς απόδειξη πρότασης στη ρίζα του δέντρου.
- Εφαρμόζουμε κανόνες διάσπασης (decomposition rules) ή κανόνες επέκτασης (expansion rules) των (σύνθετων) λογικών προτάσεων σε απλούστερες, δημιουργώντας έτσι (νέα) κλαδιά και (νέους) κόμβους στο δέντρο.
- Κλαδιά που περιέχουν αντιφάσεις (contradictions/clashes), κλείνονται και οι αντίστοιχοι κόμβοι δεν αναπτύσσονται περαιτέρω.
- Αν δεν υπάρχει ανοικτό κλαδί, τότε σημαίνει ότι η απόδειξη είναι επιτυχής.

ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ TABLEAUX-PROPOSITIONAL LOGIC (1)

- Υπάρχουν δύο τύποι σύνθετων λογικών προτάσεων, οι *συζευκτικές προτάσεις* (conjunctive sentences), που ονομάζονται <u>προτάσεις-α</u>, και οι *διαζευκτικές προτάσεις* (disjunctive sentences), που ονομάζονται <u>προτάσεις-β</u>.
- Αντίστοιχα υπάρχουν <u>κανόνες-α</u> και <u>κανόνες-β</u> για την διάσπαση των προτάσεων:

Κανόνες-α			**Κανόνες-β**		
α	α1	α2	β	β1	β2
$P \wedge Q$	P	Q	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$
$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$P \vee Q$	P	Q
$\neg(P \Rightarrow Q)$	P	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	Q
$\neg(P \Leftarrow Q)$	$\neg P$	Q	$P \Leftarrow Q$	P	$\neg Q$

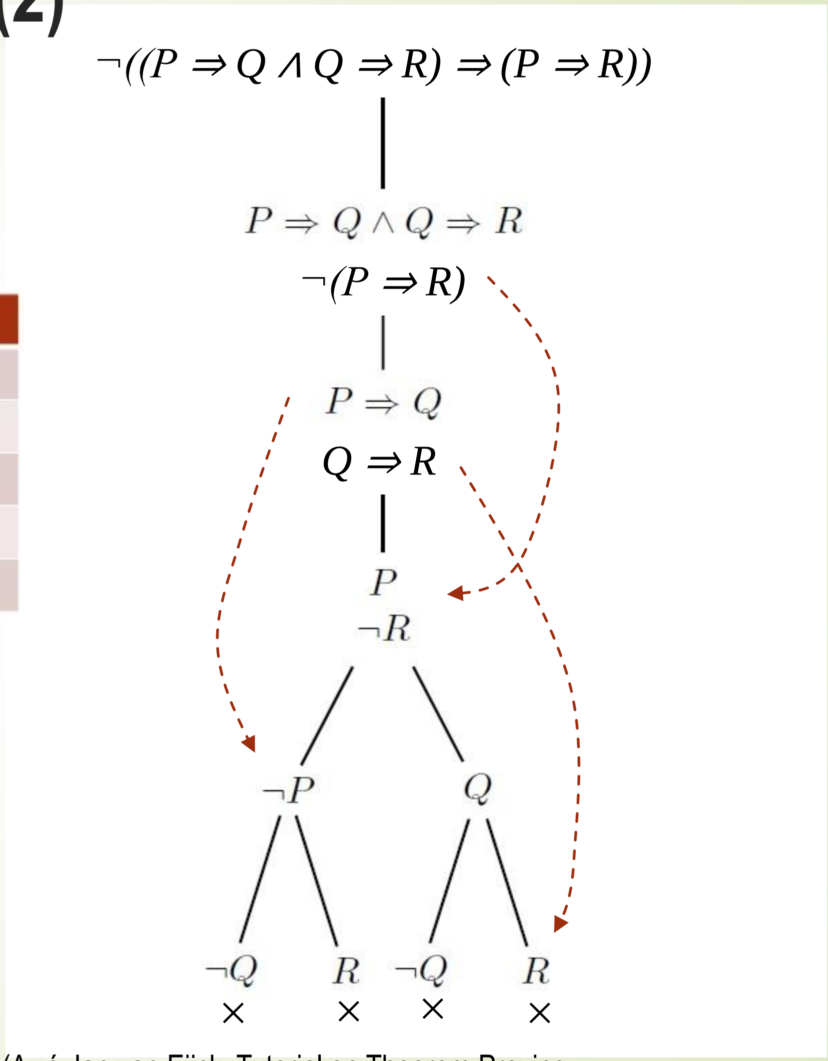
Επεκτείνονται και για προτάσεις με περισσότερα στοιχεία.

ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ TABLEAUX-PROPOSITIONAL LOGIC (2)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ-1

Κανόνες-α			Κανόνες-β		
α	α1	α2	β	β1	β2
$P \wedge Q$	P	Q	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$
$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$P \vee Q$	P	Q
$\neg(P \Rightarrow Q)$	P	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	Q
$\neg(P \Leftarrow Q)$	$\neg P$	Q	$P \Leftarrow Q$	P	$\neg Q$

Αφού όλα τα φύλλα έχουν σύγκρουση (ασυνέπεια), άρα η πρόταση στη ρίζα είναι ασυνεπής.



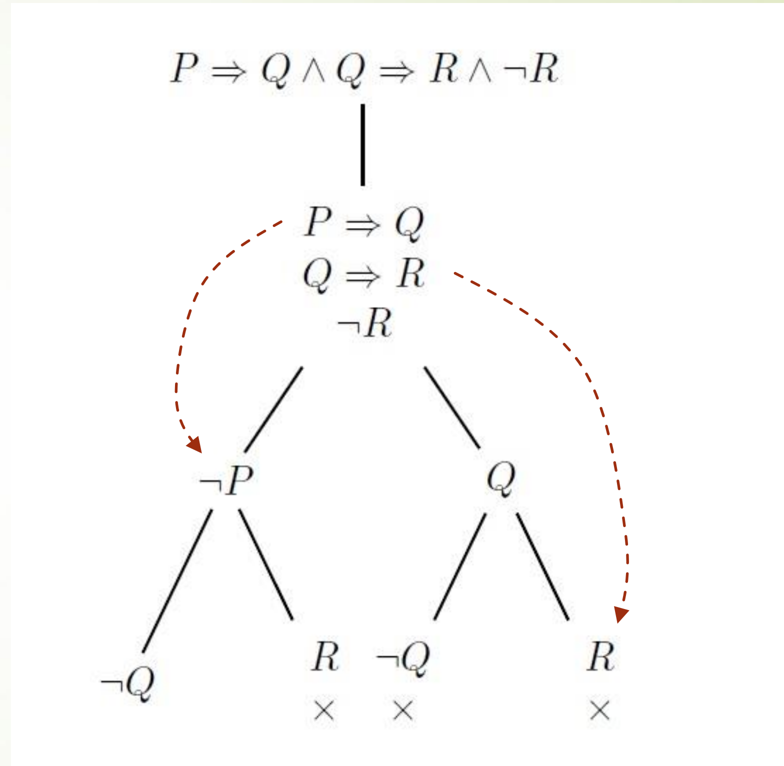
(Από Jan van Eijck, Tutorial on Theorem Proving-Με διορθώσεις)

ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ TABLEAUX-PROPOSITIONAL LOGIC (3)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ-2

Κανόνες-α			Κανόνες-β		
α	α1	α2	β	β1	β2
$P \wedge Q$	P	Q	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$
$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$P \vee Q$	P	Q
$\neg(P \Rightarrow Q)$	P	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	Q
$\neg(P \Leftarrow Q)$	$\neg P$	Q	$P \Leftarrow Q$	P	$\neg Q$

Αφού υπάρχει φύλλο χωρίς σύγκρουση (ασυνέπεια), άρα η πρόταση στη ρίζα είναι συνεπής.



(Από Jan van Eijck, Tutorial on Theorem Proving)

ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ TABLEAUX-PREDICATE LOGIC (1)

- Υπεισέρχονται δύο **επί πλέον** τύποι σύνθετων λογικών προτάσεων, οι *καθολικές* (universall), που χρησιμοποιούν καθολικό ποσοδείκτη (∀) και ονομάζονται <u>προτάσεις-γ</u>, και οι *υπαρξιακές* (existential), που χρησιμοποιούν υπαρξιακό ποσοδείκτη (∃) και ονομάζονται <u>προτάσεις-δ</u>.
- Αντίστοιχα υπάρχουν <u>κανόνες-γ</u> και <u>κανόνες-δ</u> για την διάσπαση των προτάσεων:

Κανόνες-γ		Κανόνες-δ	
γ	γ1(t)	δ	δ1(c)
$\forall x F$	$F[t/x]$	$\exists x F$	$F[c/x]$
$\neg(\exists x F)$	$\neg F[t/x]$	$\neg(\forall x F)$	$\neg F[c/x]$

t: οποιοσδήποτε όρος βάσης (ground term)
c: σταθερά που δεν υπάρχει στον κλάδο

F[t/x] σημαίνει αντικατάσταση της x με τον t στην F.

ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ TABLEAUX-PREDICATE LOGIC (2)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ-3

$$\neg[\forall x(p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow (\forall x\, p(x) \rightarrow \forall x\, q(x))]$$

$$\forall x(p(x) \rightarrow q(x)), \neg(\forall x\, p(x) \rightarrow \forall x\, q(x))$$

$$\forall x(p(x) \rightarrow q(x)), \forall x\, p(x), \neg\forall x\, q(x)$$

$$\forall x(p(x) \rightarrow q(x)), \forall x\, p(x), \neg q(a)$$

$$\forall x(p(x) \rightarrow q(x)), p(a), \neg q(a)$$

$$p(a) \rightarrow q(a), p(a), \neg q(a)$$

$$\neg p(a), p(a), \neg q(a) \qquad q(a), p(a), \neg q(a)$$

$$\times \qquad\qquad \times$$

Η ΛΟΓΙΚΗ ΕΙΝΑΙ ΜΟΝΟΤΟΝΗ

$$S \models \varphi \Rightarrow (S \cup y) \models \varphi$$

Υποθέτουμε ότι έχουμε τα αξιώματα (βάση γνώσης: ΒΓ):

(∀x) (πουλί(x) ⇒ πετά(x))
πουλί(τουΐτι)

Τα μετατρέπουμε σε ΠΜ:

{¬πουλί(x) ∨ πετά(x)} (1)
{πουλί(τουίτι)} (2)

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι: πετά(τουΐτι)

Θα το κάνουμε με βάση την αντίφαση της επίλυσης.

Παίρνουμε την άρνησή της : ¬πετά(τουΐτι)

την μετατρέπουμε σε ΠΜ: {¬πετά(τουΐτι)}

ΜΟΝΟΤΟΝΙΚΟΤΗΤΑ-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ (2)

Οπότε η ΒΓ γίνεται:

{¬πουλί(x) ∨ πετά(x)} (1)
{πουλί(τουίτι)} (2)
{¬πετά(τουίτι)} (3)

Επιλύουμε τις (1) και (2) και προκύπτει:

{πετά(τουίτι)} (4)
με σ = {τουίτι/x}

Επιλύουμε τις (3) και (4) και προκύπτει:

{ } (κενή πρόταση)

Επομένως η ΒΓ μας έγινε ασυνεπής με την εισαγωγή της ¬πετά(τουίτι) άρα η πετά(τουίτι) είναι αληθής: συνεπάγεται λογικά από τη ΒΓ.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΚΟΤΗΤΑ-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ (3)

Πληροφορούμεθα όμως ότι ο Τουΐτι είναι πιγκουΐνος και ότι οι πιγκουΐνοι, ενώ είναι πουλιά, δεν πετούν. Οπότε αποτυπώνουμε τη νέα γνώση με τις λογικές εκφράσεις στα δεξιά.

(∀x) (πιγκουίνος(x) ⇒ πουλί(x))
(∀x) (πιγκουίνος(x) ⇒ ¬πετά(x))
πιγκουίνος(τουίτυ)

Τις μετατρέπουμε σε προτασιακή μορφή και τις εισάγουμε στη ΒΓ:

{¬πουλί(x) ∨ πετά(x)} (1)
{πουλί(τουίτι)} (2)
{¬πιγκουίνος(y) ∨ πουλί(y)} (3)
{¬πιγκουίνος(z) ∨ ¬πετά(z)} (4)
{πιγκουίνος(τουίτυ)} (5)

ΜΟΝΟΤΟΝΙΚΟΤΗΤΑ-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ (4)

Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε πάλι ότι: πετά(τουΐτι)

Διαπιστώνουμε ότι πάλι αποδεικνύεται μέσω των ίδιων προτάσεων.

Έστω ότι τώρα θέλουμε να αποδείξουμε ότι: $\neg$πετά(τουΐτι)

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι και αυτό αποδεικνύεται μέσω των νέων προτάσεων που εισήχθησαν στη ΒΓ.

Αυτό σημαίνει ότι νέα γνώση που συγκρούεται με παλαιότερη δεν μπορεί να την ακυρώσει.