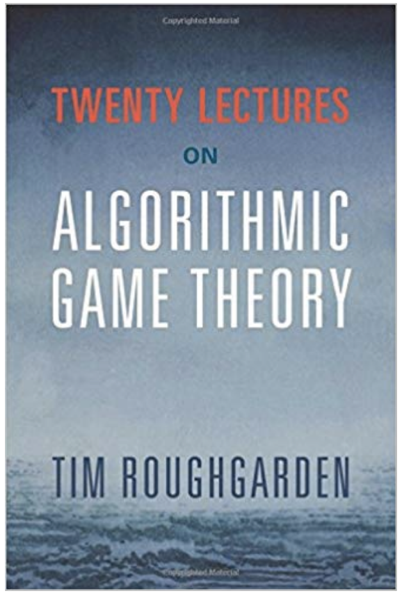
Ζητήματα Στρατηγικής στη Λήψη Αποφάσεων

Γιάννης Καραγιάννης

caragian@ceid.upatras.gr

Σήμερα …

- Ανακοίνωση 2^{ου} σετ ασκήσεων (ύλη των δύο προηγούμενων διαλέξεων και της σημερινής)
- Chapter 5: Revenue-maximizing auctions
- Δημοπρασίες τύπου DSIC που είναι βέλτιστες ως προς τα έσοδα
- Εντελώς διαφορετικός στόχος από τη βελτιστοποίηση του κοινωνικού οφέλους
- Ανάλυση μέσης περίπτωσης



Δημοπρασίες φάσματος/τηλεοπτικών αδειών

- Τι μπορεί να πάει στραβά;
- Μικρότερα έσοδα των αναμενομένων

Βελτιστοποίηση του κοινωνικού οφέλους

- Εμφανίζεται σε πολλές **εφαρμογές**
- Έχει νόημα ακόμα και σε περιπτώσεις που η μεγιστοποίηση των εσόδων φαίνεται να είναι σημαντικότερη (διατήρηση των πελατών **σε σχέση με τους ανταγωνιστές**)
- Παιδαγωγικοί λόγοι: ιδανικές δημοπρασίες και ιδανικοί μηχανισμοί **υπάρχουν πάντα**

Δημοπρασία ενός αντικειμένου με έναν υποψήφιο αγοραστή

- Τι **έσοδα** έχει η δημοπρασία δεύτερης τιμής;
- Τι **άλλες δημοπρασίες** τύπου DSIC υπάρχουν;
- **Posted prices**, προσφορές τύπου take-it-or-leave-it
- Είναι δυνατόν να βελτιστοποιήσουμε τα έσοδα **χωρίς γνώση των πραγματικών αποτιμήσεων**;

- Π.χ., μια σταθερή τιμή 10 θα δουλέψει μια χαρά για αποτιμήσεις μεγαλύτερες του 10 και φρικτά για μικρότερες

Βελτιστοποίηση των εσόδων

- **Ανάλυση μέσης περίπτωσης**
- Περιβάλλον μιας παραμέτρου
- **Ανεξάρτητες κατανομές** $F_1, F_2, \dots, F_n$ με συνεχείς συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_1, f_2, \dots, f_n$, ορισμένες στο $[0, \infty)$
- Ο συμμετέχων i επιλέγει την αποτίμησή του με βάση την κατανομή F_i
- Κρίσιμη υπόθεση: **ο σχεδιασμός του μηχανισμού γνωρίζει τις κατανομές**

- Υπενθύμιση: $F_i(z) = \Pr[v_i \leq z] = \int_0^z f_i(x)\mathrm{d}x$

Δημοπρασία ενός αντικειμένου με έναν υποψήφιο αγοραστή (πάλι)

- Ο αγοραστής έχει γνωστή κατανομή πιθανότητας F
- Δημοπρασία με **σταθερή τιμή r**
- Ποια είναι η **καλύτερη επιλογή του r**;

$$\mathit{Revenue} = \underbrace{r}_{\text{Έσοδα από την πώληση}} \cdot \underbrace{(1 - F(r))}_{\text{Πιθανότητα πώλησης}}$$

- Παράδειγμα: η F είναι ομοιόμορφη κατανομή στο $[0,1]$

Δύο υποψήφιοι αγοραστές

- Με την **ίδια γνωστή ομοιόμορφη κατανομή στο $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$**
- Τι έσοδα έχει η δημοπρασία της δεύτερης τιμής;
- **= μικρότερη αποτίμηση**
- $\mathbb{E}_{x,y\sim F}[\min\{x,y\}] = \int_0^1 \int_0^1 \min\{x,y\} f(y)dy\, f(x)dx$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^x yf(y)dy + \int_x^1 xf(y)dy\right] f(x)dx$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^x ydy + x\int_x^1 dy\right] dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) dx = 1/3$$

Δύο υποψήφιοι αγοραστές

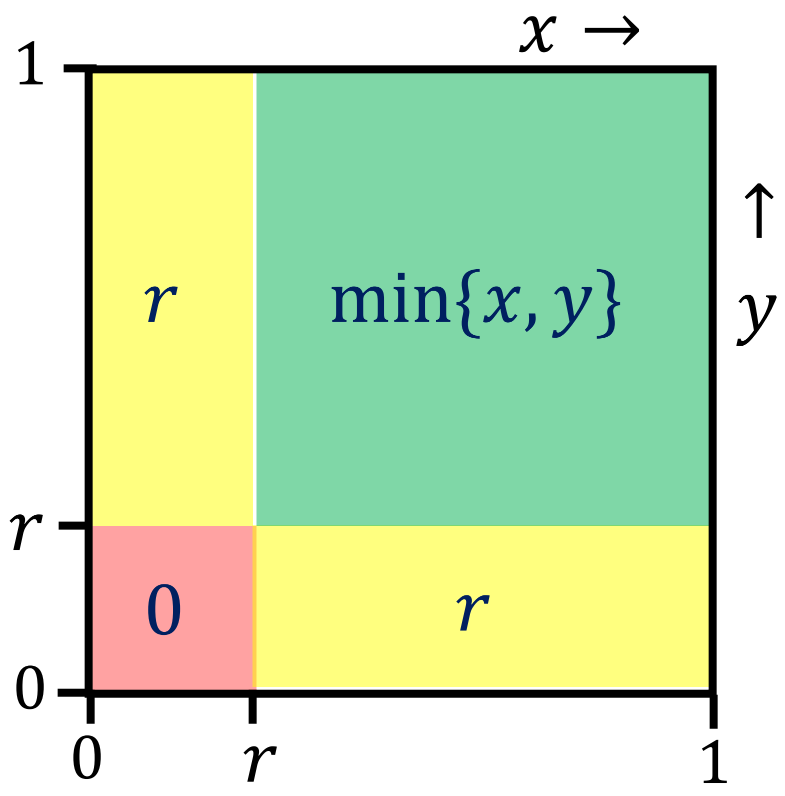
Δημοπρασία δεύτερης τιμής με μαξιλάρι (reserve price)

- Η μεγαλύτερη δήλωση κερδίζει το αντικείμενο αν είναι μεγαλύτερη του μαξιλαριού r
- Πληρώνει το μέγιστο της μικρότερης δήλωσης και του r

- Τι κερδίζουμε; **Καλύτερα έσοδα στις περιπτώσεις πολύ μικρής δεύτερης τιμής**
- Τι χάνουμε; **Το αντικείμενο δεν πωλείται πάντα**

Δύο υποψήφιοι αγοραστές

- **Με την ίδια γνωστή ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1]$**
- **Δημοπρασία δεύτερης τιμής με μαξιλάρι (reserve price)**



$$\mathbb{E}_{x,y\sim F}[\text{revenue}(r)] = 2r^2(1-r) + \int_r^1 \int_r^1 \min\{x, y\}\, dy\, dx$$
$$= \cdots = \frac{1}{3} + r^2 - \frac{4}{3} r^3$$

- Μεγιστοποιείται για $r = 1/2$ στην τιμή **5/12**

Δημοπρασίες με βέλτιστα έσοδα

- **Ανεξάρτητες κατανομές $\boldsymbol{F_1, F_2, \dots, F_n}$** με συνεχείς συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_1, f_2, \dots, f_n$, ορισμένες στο $[0, \infty)$
- Ο συμμετέχων i επιλέγει την αποτίμησή του με βάση την κατανομή F_i
- Επομένως, $\mathbb{E}_{\mathbf{v}\sim\mathbf{F}}[\text{revenue}] = \mathbb{E}_{\mathbf{v}\sim\mathbf{F}}[\sum_{i=1}^{n} p_i(\mathbf{v})]$
- **Εικονικές αποτιμήσεις**:

$$\varphi_i(v_i) = v_i - \frac{1 - F_i(v_i)}{f_i(v_i)}$$

- Π.χ., για την ομοιόμορφη κατανομή, $\varphi_i(z) = 2z - 1$

Δημοπρασίες με βέλτιστα έσοδα

- **Ανεξάρτητες κατανομές $\boldsymbol{F_1, F_2, \ldots, F_n}$** με συνεχείς συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_1, f_2, \ldots, f_n$, ορισμένες στο $[0, \infty)$
- Ο συμμετέχων i επιλέγει την αποτίμησή του με βάση την κατανομή F_i
- Επομένως, $\mathbb{E}_{\mathbf{v}\sim\mathbf{F}}[\text{revenue}] = \mathbb{E}_{\mathbf{v}\sim\mathbf{F}}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i(\mathbf{v})\right]$
- **Εικονικές αποτιμήσεις**:

$$\varphi_i(v_i) = v_i - \boxed{\frac{1 - F_i(v_i)}{f_i(v_i)}}$$

επιθυμητό έσοδο

έκπτωση

- Π.χ., για την ομοιόμορφη κατανομή, $\varphi_i(z) = 2z - 1$

Έσοδα και εικονικές αποτιμήσεις

- Λήμμα: Για κάθε περιβάλλον μιας παραμέτρου με n συμμετέχοντες που έχουν ανεξάρτητες αποτιμήσεις με κατανομές $F_1, F_2, \ldots, F_n$, κάθε μηχανισμό $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ τύπου DSIC, κάθε συμμετέχοντα i και κάθε διάνυσμα αποτιμήσεων των άλλων παικτών $\mathbf{v}_{-i}$, ισχύει
$$\mathbb{E}_{v_i \sim F_i}[p_i(\mathbf{v})] = \mathbb{E}_{v_i \sim F_i}[\varphi_i(v_i) \cdot x_i(\mathbf{v})]$$

- Θεώρημα: **Αναμενόμενα έσοδα = αναμενόμενες εικονικές αποτιμήσεις**

$$\mathbb{E}_{\mathbf{v} \sim \mathbf{F}}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i(\mathbf{v})\right] = \mathbb{E}_{\mathbf{v} \sim \mathbf{F}}\left[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(v_i) \cdot x_i(\mathbf{v})\right]$$

Έσοδα και εικονικές αποτιμήσεις

- Θεώρημα: **Αναμενόμενα έσοδα = αναμενόμενες εικονικές αποτιμήσεις**

$$\mathbb{E}_{\mathbf{v}\sim\mathbf{F}}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i(\mathbf{v})\right] = \mathbb{E}_{\mathbf{v}\sim\mathbf{F}}\left[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(v_i)\cdot x_i(\mathbf{v})\right]$$

- Εφαρμογή όταν έχουμε n συμμετέχοντες με την ίδια ομοιόμορφη κατανομή στο $[0,1]$

$$\mathbb{E}_{\mathbf{v}\sim\mathbf{F}}[\text{revenue}] = \mathbb{E}_{\mathbf{v}\sim\mathbf{F}}\left[\sum_{i=1}^{n}(2v_i - 1)\cdot x_i(\mathbf{v})\right]$$

- Πότε μεγιστοποιείται; **Δημοπρασία δεύτερης τιμής με μαξιλάρι στο 1/2**

Απόδειξη λήμματος

- Λήμμα: … $\mathbb{E}_{v_i \sim F_i}[p_i(\mathbf{v})] = \mathbb{E}_{v_i \sim F_i}[\varphi_i(v_i) \cdot x_i(\mathbf{v})]$
- $\mathbb{E}_{v_i \sim F_i}[p_i(\mathbf{v})] = \int_0^{\infty} p_i(\mathbf{v}) \cdot f_i(v_i) \mathrm{d}v_i = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{v_i} z \cdot x_i' \, (z, \mathbf{v}_{-i}) \mathrm{d}z\right] \cdot f_i(v_i) \mathrm{d}v_i$

$$= \int_0^{\infty} \left[\int_z^{\infty} f_i(v_i) \mathrm{d}v_i\right] z \cdot x_i' \, (z, \mathbf{v}_{-i}) \mathrm{d}z = \int_0^{\infty} (1 - F_i(z)) \, z \cdot x_i' \, (z, \mathbf{v}_{-i}) \mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{\infty} \left[z - \frac{1 - F_i(z)}{f_i(z)}\right] x_i(z, \mathbf{v}_{-i}) f_i(z, \mathbf{v}_{-i}) \mathrm{d}z = \mathbb{E}_{v_i \sim F_i}[\varphi_i(v_i) \cdot x_i(\mathbf{v})]$$

Σχεδιασμός βέλτιστων δημοπρασιών (ως προς τα έσοδα)

- Νέος στόχος: Επίλεξε κανόνα αναθέσεων που μεγιστοποιεί την ποσότητα $\mathbb{E}_{\mathbf{v}\sim\mathbf{F}}[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(v_i) \cdot x_i(\mathbf{v})]$, δηλαδή τον **εικονικό κοινωνικό πλούτο**
- Περιοριζόμαστε σε **ομαλές κατανομές** που έχουν την ιδιότητα ότι η συνάρτηση των εικονικών αποτιμήσεων $\varphi_i(v_i) = v_i - \frac{1-F_i(v_i)}{f_i(v_i)}$ είναι αύξουσα
- Τότε, ο κανόνας που μεγιστοποιεί τη συνολική εικονική αποτίμηση των συμμετεχόντων που κερδίζουν είναι **μονότονος** (προσοχή στις ισοπαλίες)

Η βέλτιστη δημοπρασία

n συμμετέχοντες με ομαλές κατανομές αποτιμήσεων

1. Μετατρέπουμε τις (αληθώς δηλωμένες) αποτιμήσεις v_i σε εικονικές αποτιμήσεις $\varphi_i(v_i)$
2. Διαλέγουμε μια **εφικτή ανάθεση που μεγιστοποιεί τον εικονικό κοινωνικό πλούτο** $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(v_i) \cdot x_i(\mathbf{v})$
3. Χρεώνουμε **πληρωμές με βάση το Λήμμα του Myerson**

Πόσο χρήσιμη είναι αυτή η θεωρία στην πράξη;

- Σημαντική βελτίωση των εσόδων (~20%) της Yahoo! το 2008
- Αλλαγή των reserve prices σε σημαντικά μεγαλύτερες τιμές
- Αν και οι δημοπρασίες που χρησιμοποιεί δεν είναι DSIC

Σύνοψη

- Σχεδιασμός δημοπρασιών/μηχανισμών για τη **βελτιστοποίηση των εσόδων**
- Ανάλυση της **μέσης περίπτωσης**
- Σενάριο με συμμετέχοντες που έχουν τυχαίες αποτιμήσεις με βάση **γνωστές πιθανοτικές κατανομές**
- Βελτιστοποίηση των εσόδων μέσω της **βελτιστοποίησης του εικονικού κοινωνικού πλούτου**