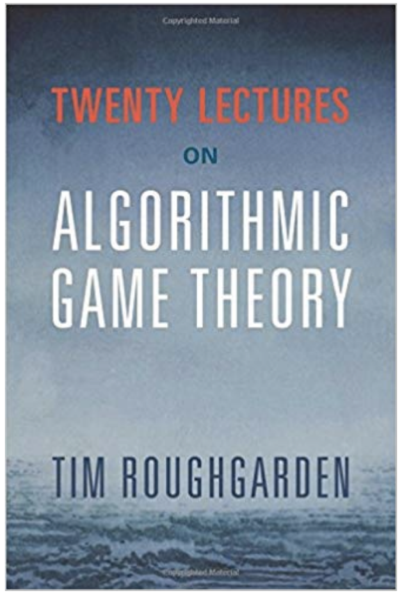
Ζητήματα Στρατηγικής στη Λήψη Αποφάσεων

Γιάννης Καραγιάννης

caragian@ceid.upatras.gr

Σήμερα ...

- Chapter 6: Simple near-optimal auctions
- Ανισότητα του προφήτη
- Θεώρημα των Bulow & Klemperer



Δημοπρασίες με βέλτιστα έσοδα

- Κάπως **πολύπλοκες**
- Απαιτούν **λεπτομερή πληροφορία για τις κατανομές** των αποτιμήσεων
- Δε μοιάζουν με τα formats που χρησιμοποιούνται **στην πράξη**

Δημοπρασίες με βέλτιστα έσοδα

- Γενικά, για περιβάλλοντα μιας παραμέτρου, ο **κανόνας ανάθεσης** είναι:

$$\mathbf{x}(\mathbf{v}) = \operatorname*{argmax}_{X} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(v_i) \cdot x_i(\mathbf{v})$$

για κάθε προφίλ $\mathbf{v}$, όπου

$$\varphi_i(v_i) = v_i - \frac{1 - F_i(v_i)}{f_i(v_i)}$$

είναι η **εικονική αποτίμηση** για την κατανομή F_i.

Δημοπρασίες ενός αντικειμένου

- Υποψήφιοι αγοραστές με ανεξάρτητες αποτιμήσεις από την **ίδια κατανομή *F***
- Βέλτιστη ως προς τα έσοδα: **δημοπρασία δεύτερης τιμής με μαξιλάρι** στην τιμή $\varphi^{-1}(0)$
- Βασικό χαρακτηριστικό: **απλότητα**
- … που **χάνεται** αν έχουμε διαφορετικές κατανομές για τους υποψήφιους αγοραστές
- Π.χ., μπορεί το αντικείμενο να μην το κερδίσει ο υποψήφιος αγοραστής με τη μεγαλύτερη προσφορά

Ανισότητα του προφήτη

Prophet inequality

- Παιχνίδι σε $\boldsymbol{n}$ **στάδια,** στο στάδιο n, μας προσφέρεται ένα μη αρνητικό **βραβείο** $\boldsymbol{\pi_i}$ από μια πιθανοτική κατανομή G_i
- Οι κατανομές $G_1, G_2, \ldots, G_n$ είναι **ανεξάρτητες** και **γνωστές**
- Όταν δούμε το βραβείο π_i, μπορούμε **είτε να αποδεχθούμε** το βραβείο και να λήξουμε το παιχνίδι είτε **να το απορρίψουμε** και να συνεχίσουμε
- **Ρίσκο** να αποδεχθούμε ένα λογικό βραβείο νωρίς και να χάσουμε ένα μεγαλύτερο αργότερα
- Η ανισότητα του προφήτη μας παρέχει μια **απλή στρατηγική** που **λειτουργεί πολύ καλά**!

Ανισότητα του προφήτη

- **Κατώφλι t**
- Διάλεξε το πρώτο βραβείο που υπερβαίνει το κατώφλι

- Προφανώς, αυτή η στρατηγική **δεν είναι βέλτιστη** (γιατί;)

- Υπάρχει κατώφλι τέτοιο ώστε το μέσο κέρδος της στρατηγικής κατωφλίου να είναι **τουλάχιστον** $\frac{1}{2}\underbrace{\mathbb{E}_{\pi\sim\mathrm{G}}[\max_i \pi_i]}_{\text{κέρδος προφήτη}}$

Απόδειξης της ανισότητας του προφήτη

- Συμβολισμοί: $z^+ = \max\{0, z\}$, $q(t)$:= πιθανότητα να μην αποδεχθούμε κανένα βραβείο
- Καθώς το t αυξάνεται, το ρίσκο $q(t)$ μεγαλώνει και η μέση τιμή από ένα βραβείο που αποδεχόμαστε αυξάνει

$$\mathbb{E}_{\pi\sim \mathrm{G}}[\text{κέρδος της στρατηγικής με κατώφλι } t]$$
$$= \underbrace{(1-q(t))}_{\substack{\text{Πιθανότητα}\\ \text{να υπερβούμε}\\ \text{το κατώφλι}}}t + \underbrace{\text{μέσο επιπλέον κέρδος}}_{\text{ας το προσεγγίσουμε}}$$

Απόδειξης της ανισότητας του προφήτη

$\mathbb{E}_{\pi\sim \mathrm{G}}$[κέρδος της στρατηγικής με κατώφλι t]
$= \ (1-q(t))t \ +$ μέσο επιπλέον κέρδος

Απόδειξης της ανισότητας του προφήτη

$\mathbb{E}_{\pi\sim\mathrm{G}}[\text{κέρδος της στρατηγικής με κατώφλι } t]$

$= \ (1-q(t))t \ + \text{μέσο επιπλέον κέρδος}$

$\geq \left(1-q(t)\right)t + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_{\pi}\left[\pi_i - t \middle| \pi_i \geq t, \pi_j < t, j \neq i\right] \Pr[\pi_i \geq t, \pi_j < t, j \neq i]$

Απόδειξης της ανισότητας του προφήτη

ανεξαρτησία

$\mathbb{E}_{\pi\sim\mathrm{G}}$[κέρδος της στρατηγικής με κατώφλι t]

$= \ (1-q(t))t\ $ + μέσο επιπλέον κέρδος

$\geq \big(1-q(t)\big)t+\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_{\pi}\big[\pi_i-t\big|\pi_i\geq t,\pi_j<t,j\neq i\big]\Pr[\pi_i\geq t,\pi_j<t,j\neq i]$

Απόδειξης της ανισότητας του προφήτη

ανεξαρτησία

$\mathbb{E}_{\pi\sim \mathrm{G}}$[κέρδος της στρατηγικής με κατώφλι t]

$= (1-q(t))t$ + μέσο επιπλέον κέρδος

$\geq \left(1-q(t)\right)t + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_\pi\left[\pi_i - t \middle| \pi_i \geq t, \pi_j < t, j \neq i\right] \Pr[\pi_i \geq t, \pi_j < t, j \neq i]$

$= \left(1-q(t)\right)t + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_\pi[\pi_i - t|\pi_i \geq t] \cdot \Pr[\pi_i \geq t] \cdot \Pr[\pi_j < t, j \neq i]$

Απόδειξης της ανισότητας του προφήτη

$$\mathbb{E}_{\pi\sim G}[\text{κέρδος της στρατηγικής με κατώφλι } t]$$

$$= (1-q(t))t + \text{μέσο επιπλέον κέρδος}$$

ανεξαρτησία

$$\geq \left(1-q(t)\right)t + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_{\pi}\left[\pi_i - t \middle| \pi_i \geq t, \pi_j < t, j \neq i\right]\Pr[\pi_i \geq t, \pi_j < t, j \neq i]$$

$$= \left(1-q(t)\right)t + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}_{\pi}[\pi_i - t|\pi_i \geq t] \cdot \Pr[\pi_i \geq t]}_{\mathbb{E}_{\pi}[(\pi_i - t)^{+}]} \cdot \underbrace{\Pr[\pi_j < t, j \neq i]}_{\geq q(t)}$$

Απόδειξης της ανισότητας του προφήτη

ανεξαρτησία

$$\mathbb{E}_{\pi\sim G}[\text{κέρδος της στρατηγικής με κατώφλι } t]$$

$$= \ (1-q(t))t \ + \text{μέσο επιπλέον κέρδος}$$

$$\geq \big(1-q(t)\big)t + \textstyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_{\pi}\big[\pi_i - t \big| \pi_i \geq t, \pi_j < t, j \neq i\big] \Pr[\pi_i \geq t, \pi_j < t, j \neq i]$$

$$= \big(1-q(t)\big)t + \textstyle\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}_{\pi}[\pi_i - t | \pi_i \geq t] \cdot \Pr[\pi_i \geq t]}_{\mathbb{E}_{\pi}[(\pi_i - t)^+]} \cdot \underbrace{\Pr[\pi_j < t, j \neq i]}_{\geq q(t)}$$

$$\geq \big(1-q(t)\big)t + q(t) \textstyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_{\pi}[(\pi_i - t)^+]$$

Απόδειξης της ανισότητας του προφήτη

$\mathbb{E}_{\pi\sim\mathrm{G}}$[κέρδος της στρατηγικής με κατώφλι t]

$$\geq \big(1-q(t)\big)t + q(t)\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_{\pi}[(\pi_i - t)^+]$$

$$\mathbb{E}_{\pi\sim\mathrm{G}}[\max_i \pi_i] = \mathbb{E}_{\pi}[t + \max_i(\pi_i - t)] \leq t + \mathbb{E}_{\pi}[\max_i(\pi_i - t)^+]$$

$$\leq t + \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_{\pi}[(\pi_i - t)^+]$$

Θέτοντας $q(t) = 1/2$, καταλήγουμε στο ζητούμενο

Απλή δημοπρασία ενός αντικειμένου

- Ιδέα: **χρήση κατωφλίου στις εικονικές αποτιμήσεις**
- Κανόνας αναθέσεων:

1. Διάλεξε κατώφλι t ώστε $\Pr[\max_i \varphi_i(v_i)^+ \geq t] = 1/2$
2. Δώσε το αντικείμενο στον υποψήφιο αγοραστή με $\varphi_i(v_i) \geq t$ και τη μεγαλύτερη δήλωση

- Από ανισότητα του προφήτη,

$$\mathbb{E}_{\mathbf{v}\sim\mathbf{F}}\Big[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(v_i) \cdot x_i(\mathbf{v})\Big] \geq \frac{1}{2} \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbf{v}\sim\mathbf{F}}\big[\max_i \varphi_i(v_i)^+\big]}_{\text{βέλτιστα έσοδα}}$$

Δημοπρασίες για άγνωστες κατανομές

- Τι μπορούμε να κάνουμε **αν δεν έχουμε πληροφορία** για τις κατανομές αποτιμήσεων των υποψήφιων αγοραστών;
- **Prior-independent auctions**
- Θεώρημα των Bulow & Klemperer
- Η **αύξηση του ανταγωνισμού** είναι σημαντικότερη από το βέλτιστο σχεδιασμό δημοπρασιών
- Σύγκριση των εσόδων της **βέλτιστης δημοπρασίας με n υποψήφιους αγοραστές** με μια **δημοπρασία δεύτερης τιμής με $n+1$ υποψήφιους αγοραστές** με αποτιμήσεις από την ίδια κατανομή F

Απόδειξη Θεωρήματος των Bulow & Klemperer

- Η δημοπρασία με $n+1$ υποψήφιους αγοραστές δίνει το πολύ όσα έσοδα δίνει η επόμενη **τεχνητή δημοπρασία**

1. Προσομοίωσε τη βέλτιστη δημοπρασία με n υποψήφιους αγοραστές
2. Αν το αντικείμενο δεν ανατεθεί στο βήμα 1, ανάθεσέ το στον υποψήφιο αγοραστή $n+1$

Βασικό χαρακτηριστικό: **πάντα αναθέτει το αντικείμενο**

Μεταξύ όλων των δημοπρασιών που πάντα αναθέτουν το αντικείμενο καλύτερη είναι η **δημοπρασία δεύτερης τιμής**

Γιατί; Μεγιστοποιεί την ποσότητα $\mathbb{E}_{\mathrm{v}\sim\mathrm{F}}[\sum_{i=1}^{n+1} \varphi_i(v_i) \cdot x_i(\mathrm{v})]$ υπό τον περιορισμό ότι $\sum_{i=1}^{n+1} x_i(\mathrm{v}) = 1$

Σύνοψη

- Σχεδιασμός απλών δημοπρασιών/μηχανισμών για τη **βελτιστοποίηση των εσόδων**
- Χρήση της **ανισότητας του προφήτη**
- Βελτιστοποίηση των εσόδων για **άγνωστη κατανομή αποτιμήσεων**
- **Θεώρημα των Bulow & Klemperer**