Μαθηματικά ΙΙ

Σημειώσεις
(σε εξέλιξη)

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών & Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πατρών

Χειμώνας–Άνοιξη 2017

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Πραγματικές Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

1.1 Εισαγωγικά

Ο όγκος V ενός στερεού ορθού κυκλικού κυλίνδρου με ακτίνα βάσης r και ύψος h δίνεται από τη σχέση

$$V = \pi r^2 h,$$

κατά συνέπεια ο όγκος είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών r και h με τιμές στους πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή $V = V(r,h)$ με $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Στη περίπτωση αυτή λέμε ότι η V είναι μια πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών. Αν η f είναι μια πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών σε αναλογία με τη μία διάσταση ($y = f(x)$) μπορούμε να γράφουμε $z = f(x,y)$. Έτσι, για παράδειγμα, έχουμε τη συνάρτηση $z = f(x,y) = x^2 + y^2$.

Ο χώρος $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένος με ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων ανά δύο κάθετων μεταξύ τους, ο καθένας από τους οποίους είναι μια αναπαράσταση της πραγματικής ευθείας, με κοινό σημείο τομής, το οποίο για πρακτικούς λόυς ορίζουμε να είναι το $(0,0,0)$, θα το λέμε **καρτεσιανό τριδιάστατο χώρο**. Έτσι κάθε τριάδα πραγματικών αριθμών (a,b,c) αντιστοιχίζεται σε ένα μοναδικό σημείο του $\mathbb{R}^3$. Αν P είναι είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}^3$ και x, y, z είναι αντίστοιχα οι προβολές του P στον x-άξονα τον y-άξονα και τον z-άξονα την τριάδα (x,y,z) θα λέμε **καρτεσιανές συντεταγμένες** του σημείου P. Ο προσανατολισμός των αξόνων υπακούει στον "κανόνα του δεξιού χεριού" δηλαδή καθώς το δεξί χέρι στέφεται από τον θετικό x-άξονα προς τον θετικό y-άξονα ο αντίχειρας δείχνει τον θετικό z-άξονα.

Οι άξονες ανά δύο ορίζουν επίπεδα. Το xy-επίπεδο περιγράφεται και σαν $z = 0$, αφού τα σημεία του επιπέδου αυτού είναι όλες οι τριάδες $(x,y,0)$, με $x, y \in \mathbb{R}$. Επίσης η εξίσωση $z = 3$ περιγράφει το επίπεδο το οποίο είναι παράλληλο στο xy και τέμνει τον z-αξονα στο $z = 3$. Όμοια το $x = 4$ είναι επίπεδο παράλληλο στο yz-επίπεδο, ή $x = 0$, το οποίο τέμνει τον x-άξονα στο $x = 4$.

Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών ορίζεται κατά τρόπο ανάλογο με αυτόν της μιας μεταβλητής.

Παράδειγμα 1.1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$.

Η f ορίζεται για (x,y) με $y \geq x^2$, άρα $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x\}$. Αφού $\sqrt{t} \geq 0$ για κάθε $t \geq 0$, έπεται ότι το πεδίο τιμών της f είναι $R(f) = [0, +\infty)$.

Η παραβολή $y = x^2$ χωρίζει το επίπεδο σε δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα με κοινό φυσικό σύνορο την καμπύλη $y = x^2$. Το ένα σύνολο αποτελείται από τα σημεία (x, y) με $y < x^2$ και το άλλο από τα (x, y) με $y > x^2$. Το $D(f)$ αποτελείται από τα σημεία του γραφήματος της παραβολής και από εκείνα των οποίων η y-συντεταγμένη είναι "πάνω" από το γράφημα της $y = x^2$.

Γενικεύοντας μπορούμε να έχουμε πραγματικές συναρτήσεις τριών μεταβλητών $u = f(x, y, z)$, ή γενικότερα n μεταβλητών, $n \in \mathbb{N}$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, όπου $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

1.2 Βασικά στοιχεία

Θυμίζουμε ότι αν $P(x_1, y_1)$ και $Q(x_2, y_2)$ είναι δύο σημεία στο $\mathbb{R}^2$ η απόσταση $d(P, Q)$ μεταξύ τους δίνεται από τη σχέση

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Ορισμός 1.1. Έστω $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ και $r > 0$ το σύνολο

$$D(a, r) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} < r\}.$$

το λέμε **ανοικτό δίσκο** κέντρου a και ακτίνας r. Στη συνέχεια όταν αναφερόμαστε σε δίσκο θα εννοούμε ανοικτό δίσκο.

Ορισμός 1.2. Έστω R ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

(1) Ένα σημείο $(x_0, y_0) \in R$ λέγεται **εσωτερικό σημείο** του R αν υπάρχει δίσκος D κέντρου (x_0, y_0) με $D \subseteq R$. Ισοδύναμα υπάρχει $r > 0$ ώστε αν $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$, τότε $(x, y) \in R$.

(2) Ένα σημείο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ λέγεται **συνοριακό σημείο** του R αν κάθε δίσκος D κέντρου (x_0, y_0) τέμνει τόσο το R όσο και το συμπλήρωμά του R^c.

Ορισμός 1.3. Έστω R ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

(1) Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του R λέγεται **εσωτερικό** του R.

(2) Το σύνολο των συνοριακών σημείων του R λέγεται **σύνορο** του R.

(3) Το σύνολο R λέγεται **ανοικτό** αν όλα του τα σημεία είναι εσωτερικά.

(4) Το R λέγεται **κλειστό** αν περιέχει όλα τα συνοριακά του σημεία.

Άσκηση 1.1. Έστω $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ και $r > 0$ και ας θεωρήσουμε το δίσκο $D(a, r)$.

(α΄) Δείξτε ότι το $D(a, r)$ είναι ανοικτό σύνολο.

(β΄) Δείξτε ότι το σύνορο του $D(a, r)$ είναι η περιφέρεια κέντρου a και ακτίνας r.

(γ΄) Δείξτε ότι το σύνολο $D(a, r) \cup \{(a_1 - r, 0), (a_1 + r, 0)\}$ δεν είναι ούτε ανοικτό ούτε κλειστό.

(δ΄) Δείξτε ότι το σύνολο

$$D[a, r] := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} \leq r\}$$

είναι κλειστό σύνολο.

(ε΄) Δείξτε ότι το συμπλήρωμα του $D(a, r)$ είναι κλειστό σύνολο.

Ορισμός 1.4. Έστω $R \subset \mathbb{R}^2$. Το R θα λέγεται φραγμένο αν υπάρχει δίσκος D ώστε $R \subset D$. Ένα σύνολο που δεν είναι φραγμένο λέγεται μη φραγμένο.

Για παράδειγμα η λωρίδα $R = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, -1 \leq y \leq 1\}$ δεν είναι φραγμένο (γιατί;).

1.2.1 Απόσταση στο χώρο

Αν $P = (x_1, y_1, z_1)$ και $Q = (x_2, y_2, z_2)$ είναι δύο σημεία του $\mathbb{R}^3$ η απόσταση μεταξύ των σημείων P και Q, την οποία συμβολίζουμε με $d(P, Q)$, είναι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα P και Q, επομένως από το σχετικό ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) και (x_2, y_2, z_1) προκύπτει ότι

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \tag{1.1}$$

Μια άμεση συνέπεια του αποτελέσματος αυτού είναι ότι αν το (x, y, z) είναι σημείο της σφαίρας κέντρου (a, b, c) και ακτίνας $r \geq 0$, τότε

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2. \tag{1.2}$$

Έτσι η (1.2) είναι η **εξίσωση της σφαίρας** με κέντρο το (a, b, c) και ακτίνα r.

Ορισμός 1.5. Έστω $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ και $r > 0$ το σύνολο

$$B(a, r) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2} < r\}.$$

το λέμε **ανοικτή μπάλα** κέντρου a και ακτίνας r. Στη συνέχεια όταν αναφερόμαστε σε μπάλα θα εννοούμε ανοικτή μπάλα.

Με χρήση της μπάλας, αντί για δίσκο, μπορούμε να ορίσουμε τα ανοικτά σύνολα, τα κλειστά σύνολα, τα φραγμένα σύνολα καθώς και και το σύνορο συνόλου στο $\mathbb{R}^3$.

1.2.2 Γραφικές παραστάσεις

Έστω ότι η f είναι μια πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών.

Το **γράφημα** της f είναι το σύνολο

$$G(f) = \{(x, y, z) : (x, y) \in D(f),\ z = f(x, y)\} = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D(f)\},$$

κατά συνέπεια το γράφημα μιας συνάρτησης είναι ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$. Τη γραφική παράσταση της f λέμε (καταχρηστικά) **επιφάνεια** $z = f(x, y)$.

Εάν $z = f(x, y)$ και c είναι μια σταθερά (στο πεδίο τιμών της f) το σύνολο των σημείων (x, y) του επιπέδου για τα οποία $f(x, y) = c$ λέγεται **ισοσταθμική καμπύλη** ή **καμπύλη στάθμης** της f. Για παράδειγμα αν $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2$ η ισοσταθμική καμπύλη $f(x, y) = 6$ είναι η έλλειψη

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$$

και γενικότερα οι ισοσταθμικές καμπύλες της f είναι ελλείψεις. Οι ισοσταθμικές καμπύλες βοηθούν στο να κατανοήσουμε τη συμπεριφορά του γραφήματος της συνάρτησης. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα οι καμπύλες $f(x, y) = c$ είναι ομόκεντρες ελλείψεις οι οποίες καθώς το c αυξάνει απομακρύνονται, από το κέντρο, την αρχή των αξόνων στο xy-επίπεδο, παραμένοντας σχηματικά όμοιες, και καλύπτουν ολόκληρο το επίπεδο.

Εάν $z = f(x, y)$ και c είναι μια σταθερά (στο πεδίο τιμών της f) την τομή του επιπέδου $z = c$ με την επιφάνεια $z = f(x, y)$ τη λέμε **ισοϋψή καμπύλη** $f(x, y) = c$. Η ισοϋψης καμπύλη δεν πρέπει να συγχαίεται με την ισοσταμική καμπύλη, η οποία κείται στο xy-επίπεδο, ενώ η ισοϋψής περιέχεται στο επίπεδο $z = c$. Έτσι για την $z = f(x, y)$ μπορούμε να περιγράψουμε την ισοσταθμική και ισοϋψή καμπύλη $f(x, y) = c$ ως εξής

$$\text{ισοσταθμική καμπύλη } f(x, y) = c : \{(x, y) : f(x, y) = c\}$$
$$\text{ισοϋψής καμπύλη } f(x, y) = c : \{(x, y, c) : f(x, y) = c\}$$

Γενικεύοντας σε περισσότερες διαστάσεις λέμε ότι η γραφική παράσταση της $u = f(x, y, z)$ είναι μια επιφάνεια στο $\mathbb{R}^4$ και της $x_{n+1} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ είναι μια επιφάνεια στο $\mathbb{R}^{n+1}$. Αν $u = f(x, y, z)$ την $f(x, y, z) = c$ τη λέμε **ισοσταθμική επιφάνεια**, έτσι αν, για παράδειγμα $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ και $c \geq 0$ οι ισοσταθμική επιφάνεια $f(x, y, z) = c$ είναι η σφαίρα κέντρου $(0, 0, 0)$ και ακτίνας c.

1.2.3 Κύλινδροι

Ας θεωρήσουμε την περιφέρεια $x^2 + y^2 = 4$. Το σύνολο όλων των ευθειών του $\mathbb{R}^3$ κατά μήκος της περιφέρειας, οι οποίες είναι παράλληλες στον z-άξονα αποτελούν μια επιφάνεια, ένα κύλινδρο.

Θα λέμε κύλινδρο κάθε επιφάνεια η οποία παράγεται από όλες τις ευθείες οι οποίες είναι παράλληλες σε κάποια ευθεία, την **γενέτειρα**, και διατρέχουν μια καμπύλη. Την καμπύλη αυτή θα τη λέμε **βασική καμπύλη** ή **οδηγό** του κυλίνδρου. Πολλές φορές λέμε ο κύλινδρος $y = f(x)$, ή $F(x, y) = 0$ δίχως να αναφέρουμε την γενέτειρα ευθεία. Σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε ότι η ευθεία αυτή είναι ο z-άξονας, η γενικότερα ο άξονας της μεταβλητής η οποία δεν εμφανίζεται στην εξίσωση. Για παράδειγμα ο κύλινδρος $z^2 + 2y^2 = 4$ έχει οδηγό την έλλειψη $z^2/4 + y^2/2 = 1$, και για τον λόγο αυτό λέγεται ελλειπτικός κύλινδρος, και οι ευθείες που τον παράγουν είναι παράλληλες στον x-άξονα. Τον κύλινδρο αυτόν μπορούμε να τον περιγράψουμε και σαν

$$C = \{(x, y, z) : x \in \mathbb{R}, z^2 + 2y^2 = 4\}.$$

Άσκηση 1.2. Αν η τομή κυλίνδρου με το xy-επίπεδο είναι η περιφέρεια $x^2 + y^2 = 4$ και με το επίπεδο $z = 4$ είναι η περιφέρεια $x^2 + (y - 4)^2 = 4$, να βρεθεί μια γενέτειρα και ένας οδηγός του κυλίνδρου. Επιπλέον σχεδιάστε τον κύλινδρο.

1.3 Επιφάνειες δεύτερου βαθμού

Μια επιφάνεια δεύτερου βαθμού είναι η γραφική παράσταση μιας εξίσωσης δεύτερου βαθμού ως προς x, y, και z. Η γενική μορφή μιας τέτοιας εξίσωσης είναι

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0, \tag{1.3}$$

όπου οι A, B, C, κλπ. είναι σταθερές. Κατά συνέπεια οι επιφάνειες αυτές είναι τα ανάλογα των ελλείψεων, των παραβολών και των υπερβολών στις τρεις διαστάσεις. Για παράδειγμα αν $A = B = C \neq 0$, $D = E = F = H = I = 0$, η εξίσωση γίνεται

$$x^2 + y^2 + z^2 = -\frac{J}{A}$$

η οποία είναι η εξίσωση σφαίρας αν οι $AJ \leq 0$ (βλέπε (1.2)). Από τις επιφάνειες αυτές θα δούμε μόνο κάποιες απλές και χαρακτηριστικές περιπτώσεις, που θα αποτελούν και τα πρότυπα αυτού του τύπου των επιφανειών στη συνέχεια της παρουσίασής μας.

Ελλειψοειδή

Ας θεωρήσουμε την επιφάνεια που περιγράφεται από την εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{1.4}$$

Οι τομές της επιφάνειας αυτής με τα επίπεδα $z = 0$, $y = 0$, και $x = 0$ είναι αντίστοιχα οι ελλείψεις

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Είναι επομένως λογικό, και αυτό κάνουμε, να ονομάζουμε την επιφάνεια αυτή **ελλειψοειδές**. Από την εξίσωση παρατηρούμε ότι το ελλειψοειδές (1.4) είναι εγγεγραμένο στο παραλληλεπίπεδο $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $|z| \leq c$.

Παράδειγμα 1.2. Να περιγραφεί η επιφάνεια που παράγεται από μια πλήρη περιστροφή της έλλειψης

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a > 0, \quad b > 0$$

γύρω από τον y-άξονα.

Η ζητούμενη επιφάνεια είναι αυτή που παράγεται αν η γραφική παράσταση της

$$y = f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \qquad -a \leq x \leq a$$

περιστραφεί κατά γωνία 2π γύρω από τον y-άξονα. Έτσι για $x \in [-a, a]$ το σημείο $(x, f(x))$ διαγράφει κύκλο κέντρου $(x, 0, 0)$ και ακτίνας $f(x)$ στο επίπεδο που είναι παράλληλο στο yz-επίπεδο στη θέση $x = x$. Κάθε σημείο (x, y, z) αυτής της περιφέρειας είναι της μορφής

$$x = x, \quad y = f(x)\cos\theta, \quad z = f(x)\sin\theta$$

για κάποιο $\theta \in [0, 2\pi]$, κατά συνέπεια είναι

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{(f(x))^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = 1.$$

Η επιφάνεια που παράγεται κατ΄ αυτόν τον τρόπο είναι το ελλειψοειδές

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

και λέγεται ελλειψοειδές εκ περιστροφής.

Παραβολοειδή

Ας θεωρήσουμε την επιφάνεια που περιγράφεται από την εξίσωση

$$z = ax^2 + by^2, \qquad ab > 0. \tag{1.5}$$

Οι τομές της επιφάνειας αυτής με τα επίπεδα $y = 0$, και $x = 0$ είναι αντίστοιχα οι παραβολές

$$z = ax^2, \qquad z = by^2$$

και για τον λόγο αυτό η επιφάνεια (1.5) λέγεται **παραβολοειδές**. Παρατηρούμε ότι η (1.5) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \qquad a > 0, \quad b > 0, \quad c \neq 0, \tag{1.6}$$

για διαφορετικά a και b από αυτά της (1.5). Παρατηρούμε επίσης ότι για $|z_0| < |c|$ η τομή της επιφάνειας με το επίπεδο $z = z_0$ είναι η έλλειψη (ισοϋψής καμπύλη $z = z_0$)

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \qquad a_1 = \frac{a\sqrt{|z_0|}}{\sqrt{|c|}}, \quad b_1 = \frac{b\sqrt{|z_0|}}{\sqrt{|c|}}.$$

Η επιφάνεια λέγεται ελλειπτικό παραβολοειδές. Αν $a = b$ η επιφάνεια είναι κυκλικό παραβολοειδές, ή παραβολοειδές εκ περιστροφής.

Άσκηση 1.3. Περιγράψτε την επιφάνεια $z = x^2 + y^2$ σαν επιφάνεια που παράγεται από την περιστροφή επίπεδης καμπύλης ως προς κατάλληλο άξονα.

Κώνοι

Η επιφάνεια

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \qquad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0 \tag{1.7}$$

τέμνει το xz-επίπεδο και το yz-επίπεδο στις ευθείες

$$z = \frac{c}{a}x, \qquad \text{και} \qquad z = \frac{c}{b}y$$

αντίστοιχα. Τέμνει επίσης το επίπεδο $z = z_0$ κατά μήκος της έλλειψης

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \qquad a_1 = \frac{az_0}{c}, \quad b_1 = \frac{bz_0}{c}$$

στο $z = z_0$. Η επιφάνεια αυτή λέγεται **ελλειπτικός κώνος**, και είναι το χαρακτηριστικό παράδειγμα κώνου. Αν $a = b$ ο κώνος είναι κυκλικός, και είναι επιφάνεια εκ περιστροφής.

Άσκηση 1.4. Περιγράψτε την επιφάνεια $z^2 = x^2 + y^2$ σαν επιφάνεια που παράγεται από την περιστροφή επίπεδης καμπύλης ως προς κατάλληλο άξονα.

Σημειώνουμε ότι η (1.8) μπορεί να γραφεί και σαν

$$z = \pm c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}. \tag{1.8}$$

Μονόχωνα υπερβολοειδή

Για την επιφάνεια με εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \tag{1.9}$$

παρατηρούμε ότι η τομή της με το επίπεδο $z = z_0$ είναι η έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2},$$

ενώ η τομή της με το xz-επίπεδο, ή το yz-επίπεδο είναι, αντίστοιχα, οι υπερβολές

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad\qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Η επιφάνεια αυτή λέγεται **μονόχωνο υπερβολοειδές**

Δίχωνα υπερβολοειδή

Για την επιφάνεια

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \tag{1.10}$$

παρατηρούμε ότι $|z| \geq c$. Η τομή της επιφάνειας με το επίπεδο $z = z_0$, με $|z_0| \geq c$ είναι η έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2} - 1,$$

ενώ η τομή της με το xz-επίπεδο, ή το yz-επίπεδο είναι, αντίστοιχα, οι υπερβολές

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad\qquad -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Η επιφάνεια αυτή λέγεται **δίχωνο υπερβολοειδές**.

Υπερβολικά παραβολοειδή

Ας θεωρήσουμε την επιφάνεια που περιγράφεται από την εξίσωση

$$z = ax^2 + by^2, \qquad ab < 0. \tag{1.11}$$

Οι τομές της επιφάνειας αυτής με τα επίπεδα $y = 0$, και $x = 0$ είναι αντίστοιχα οι παραβολές

$$z = ax^2, \qquad\qquad z = by^2.$$

Η τομή της επιφάνειας με το επίπεδο $z = z_0$ είναι η υπερβολή

$$z_0 = ax^2 + by^2$$

αφού $ab < 0$, ενώ οι τομές της με τα κατακόρυφα επίπεδα $x = x_0$, ή $y = y_0$ είναι αντίστοιχα οι παραβολές

$$z = ax_0^2 + by^2, \qquad\qquad z = ax^2 + by_0^2.$$

Η επιφάνεια αυτή λέγεται **υπερβολικό παραβολοειδές**. Η εξίσωση (1.11) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \qquad a > 0, \quad b > 0, \quad c \neq 0. \tag{1.12}$$

Μια χαρακτηριστική ιδιότητα της επιφάνειας αυτής είναι η μορφή της επιφάνειας γύρω από το σημείο $(0, 0, 0)$. Βλέπουμε, για παράδειγμα αν $c > 0$, ότι στο xz-επίπεδο η παραβολή – τομή

$$z = c\frac{x^2}{a^2}$$

έχει ελάχιστο στο $x = 0$, $z = 0$, ενώ στο yz-επίπεδο η παραβολή – τομή

$$z = -c\frac{y^2}{b^2}$$

έχει μέγιστο στο $y = 0$, $z = 0$. Έτσι η επιφάνεια γύρω από το $(0, 0, 0)$ μοιάζει με σέλλα (saddle).

1.4 Όρια

Ορισμός 1.6. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $z = f(x, y)$ έχει όριο L καθώς το (x, y) τείνει στο (x_0, y_0) αν για δοσμένο $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $(x, y) \in D(f)$ με

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

έπεται ότι

$$|f(x, y) - L| < \epsilon.$$

Εάν αυτό συμβαίνει γράφουμε

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

Παράδειγμα 1.3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x,y) = xy + 1$. Δείξτε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = x_0y_0 + 1.$$

Το πεδίο ορισμού της f είναι το επίπεδο $\mathbb{R}^2$. Έστω $\epsilon > 0$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε

$$\text{αν} \quad 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta, \quad \text{τότε} \quad |f(x,y) - (x_0y_0+1)| < \epsilon.$$

Αν $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < 1$, επειδή $|s| = \sqrt{s^2} \leq \sqrt{s^2+t^2}$, θα είναι

$$|x - x_0| < 1 \Rightarrow x_0 - 1 < x < x_0 + 1 \Rightarrow |x| < |x_0| + 1 \tag{1.13}$$

(γιατί;). Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
|f(x,y) - (x_0y_0+1)| &= |xy - x_0y_0| \\
&= |xy - xy_0 + xy_0 - x_0y_0| \\
&\leq |x(y-y_0)| + |y_0(x-x_0)| \\
&= |x||y-y_0| + |y_0||x-x_0| \\
&\leq |x|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} + |y_0|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \\
&= (|x| + |y_0|)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \\
&\leq (|x_0| + |y_0| + 1)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα είναι συνέπεια της (1.13) αν $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < 1$. Παίρνοντας

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{|x_0| + |y_0| + 1}\right\}$$

και αν $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$ η (1.13) ισχύει, οπότε από την τελευταία ανισότητα παίρνουμε

$$\begin{aligned}
|f(x,y) - (x_0y_0+1)| &\leq (|x_0| + |y_0| + 1)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \\
&< (|x_0| + |y_0| + 1)\delta \\
&\leq (|x_0| + |y_0| + 1)\frac{\epsilon}{|x_0| + |y_0| + 1} \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο.

Θεώρημα 1.1. *Εάν*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L, \qquad \text{και} \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M,$$

όπου L και M είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε

(1) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \big(f(x,y) \pm g(x,y)\big) = L \pm M.$

(2) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \big(f(x,y)g(x,y)\big) = LM.$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$, *εφόσον* $M \neq 0$.

(4) *Επιπλέον αν* m *και* n *είναι ακέραιοι αριθμοί και η* $\big(f(x,y)\big)^{m/n}$ *ορίζεται σε κάποιο δίσκο γύρω από το* (x_0, y_0), *τότε*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \big(f(x,y)\big)^{m/n} = L^{m/n}.$$

Παράδειγμα 1.4. Να υπολογισθούν τα όρια

(α΄) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy - 1}{x^2 y + 2xy - y^3}$ (β΄) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \sqrt{x^2 + 2y^2}$ (γ΄) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$.

(α΄) Το όριο του παρονομαστή είναι διάφορο του 0, κατά συνέπεια από το Θεώρημα 1.1 (3) έπεται ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy - 1}{x^2 y + 2xy - 2y^3} = \frac{\lim_{(x,y)\to(0,1)}(x - xy - 1)}{\lim_{(x,y)\to(0,1)}(x^2 y + 2xy - 2y^3)} = \frac{0 - 0\cdot 1 - 1}{0^2\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot 1 - 2\cdot 1^3} = \frac{1}{2}.$$

(β΄) Η έκφραση στη ρίζα είναι παντού στο $\mathbb{R}^2$ μη αρνητική, επομένως από το Θεώρημα 1.1 (4) έπεται ότι

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \sqrt{x^2 + 2y^2} = \sqrt{\lim_{(x,y)\to(1,-1)} (x^2 + 2y^2)} = \sqrt{1 + 2(-1)^2} = \sqrt{3}.$$

(γ΄) Το κλάσμα ορίζεται για $x \geq 0$ και $y \geq 0$ και το όριο του παρονομαστή είναι ίσο με 0, επομένως το αποτέλεσμα (3) του Θεωρήματος 1.1 δεν εφαρμόζεται. Παρατηρούμε όμως ότι για $(x, y) \neq (0, 0)$ έχουμε

$$\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{x(x - y)}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{x(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = x(\sqrt{x} - \sqrt{y})$$

κατά συνέπεια

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0(0 - 0) = 0.$$

Άσκηση 1.5 (Μοναδικότητα του ορίου). Δείξτε ότι αν το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

υπάρχει, τότε είναι μοναδικό.

Παρατήρηση 1.1. Η ύπαρξη του ορίου μιας συνάρτησης καθώς το (x, y) τείνει στο (x_0, y_0), άρα και η μοναδικότητα, εξασφαλίζουν ότι το όριο είναι ανεξάρτητο του δρόμου που ακολουθεί το τυχαίο (x, y) να προσεγγίσει το (x_0, y_0). Έτσι αν προσεγγίζοντας το (x_0, y_0) κατά μήκος διαφορετικών καμπυλών που το περιέχουν καταλήγουμε σε διαφορετικές οριακές τιμές για τη συνάρτηση, τότε το όριο δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 1.5. Εξετάστε αν το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

υπάρχει.

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση που το (x, y) τείνει στο $(0, 0)$ κατά μήκος της ευθείας $y = mx$, τότε έχουμε

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{2mx^2}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{2mx^2}{(1 + m^2)x^2} = \frac{2m}{1 + m^2}.$$

Παρατηρουμε ότι για διαφορετικές τιμές του m οι οριακές τιμές είναι διαφορετικές, για παράδειγμα για $m = 1$ το αποτέλεσμα είναι 1, ενώ για $m = -1$ το αποτέλεσμα είναι -1. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το όριο δεν υπάρχει.

Άσκηση 1.6. Εξετάστε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

Παράδειγμα 1.6. Δείξτε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Παρατηρούμε ότι για $(x, y) \neq (0, 0)$ έχουμε

$$0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2},$$

οπότε το αποτέλεσμα έπεται, μέσω της παρεμβολής, από το γεγονός ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0.$$

1.5 Συνέχεια

Ορισμός 1.7. Έστω ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε κάποιο σύνολο γύρω από το σημείο (x_0, y_0). Η f λέγεται **συνεχής** στο (x_0, y_0) αν

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Για να είναι δηλαδή η f συνεχής στο (x_0, y_0) πρέπει να ισχύουν τα εξής:

(1) $f(x_0, y_0)$ υπάρχει

(2) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ υπάρχει, και

(3) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα σύνολο R λέγεται συνεχής στο R αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του R. Αν η f δεν είναι συνεχής στο (x_0, y_0) θα λέμε ότι η f είναι **ασυνεχής** στο (x_0, y_0), ή ότι το (x_0, y_0) είναι **σημείο ασυνέχειας** της f.

Παράδειγμα 1.7. Η $f(x, y) = xy + 1$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$, βλέπε Παράδειγμα 1.3.

Θεώρημα 1.2. *Εάν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο σημείο (x_0, y_0), τότε οι*

$$\lambda f(x, y) + \mu g(x, y), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \qquad f(x, y)g(x, y), \qquad \frac{f(x, y)}{g(x, y)}, \quad g(x_0, y_0) \neq 0$$

είναι συνεχείς στο (x_0, y_0).

Παράδειγμα 1.8. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} & x \neq y, \\ 2x^{3/2} & x = y, \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$.

Η συνάρτηση ορίζεται για $x \geq 0$ και $y \geq 0$ και για $x \neq y$ είναι συνεχής σαν πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον αν $x \neq y$

$$f(x,y) = \frac{x(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = x(\sqrt{x}+\sqrt{y}),$$

οπότε

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,x_0)\\ x\neq y}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,x_0)\\ x\neq y}} x(\sqrt{x}+\sqrt{y}) = 2x_0\sqrt{x_0} = 2x_0^{3/2} = f(x_0,x_0).$$

Επειδή η $f(x,x) = 2x^{3/2}$ είναι συνεχής έπεται ότι καθώς (x,y)

Παράδειγμα 1.9. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) \neq (0,0), \end{cases}$$

είναι συνεχής παντού στο $\mathbb{R}^2$ εκτός από το $(0,0)$.

Στο Παράδειγμα 1.5 δείξαμε ότι το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

δεν υπάρχει, κατά συνέπεια η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$. Για $(x,y)\neq(0,0)$ η συνάρτηση είναι συνεχής σαν πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Άσκηση 1.7. Η συνάρτηση

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

ορίζεται και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Εξετάστε αν μπορεί να οριστεί στο $(0,0)$ ώστε η επέκτασή της να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$.

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι

   (α΄) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$ (β΄) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0.$

2. Δείξτε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

Κεφάλαιο 2

Παράγωγοι

2.1 Μερικές παράγωγοι

Αν $f(x,y)$ είναι μια πραγματική συνάρτηση η συνήθης παράγωγος ως προς τη μία μεταβλητή, εφόσον αυτή υπάρχει, θεωρώντας την άλλη μεταβλητή σταθερή λέγεται **μερική παράγωγος** ως προς τη μεταβλητή αυτή. Τις μερικές παραγώγους της f συμβολίζουμε με

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{ή} \quad f_x \quad \text{μερική παράγωγος ως προς } x, \text{ και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{ή} \quad f_y \quad \text{μερική παράγωγος ως προς } y.$$

Έτσι αν οι μερικές παράγωγοι της f στο (x_0,y_0) υπάρχουν τότε

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} \tag{2.1}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = f_y(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}. \tag{2.2}$$

Ορισμός 2.1. Αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε κάποιο ανοικτό σύνολο U και $(x_0,y_0)\in U$ θα λέμε ότι η μερική παράγωγος της f ως προς x στο (x_0,y_0) υπάρχει και ειναι το όριο στην (2.1) εφόσον το όριο αυτό υπάρχει, είναι δηλαδή πραγματικός αριθμός. Όμοια θα λέμε ότι η μερική παράγωγος της f ως προς y στο (x_0,y_0) υπάρχει και είναι το όριο στην (2.2) εφόσον το όριο αυτό υπάρχει, είναι δηλαδή πραγματικός αριθμός.

Παράδειγμα 2.1. Αν

$$f(x,y) = 3xy + \sin\left(\frac{x}{y}\right)$$

τότε για κάθε (x,y) με $y\neq 0$ έχουμε

$$f_x(x,y) = 3y + \frac{1}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right), \qquad \text{και} \qquad f_y(x,y) = 3x - \frac{x}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

Θυμίζουμε ότι αν η f είναι μια συνάρτηση μιας μεταβλητής και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 τότε η f είναι συνεχής στο x_0. Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει ότι το ανάλογο αποτέλεσμα δεν ισχύει στις περισσότερες μεταβλητές, δηλαδή η ύπαρξη και μόνο των μερικών παραγώγων σε σημείο δεν εξασφαλίζει την συνέχεια στο σημείο.

Παράδειγμα 2.2. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}.$$

Στο Παράδειγμα 1.9 δείξαμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$. Δείχνουμε ωστόσο ότι οι μερικές παράγωγοι $f_x(0,0)$ και $f_y(0,0)$ υπάρχουν.

Πράγματι

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$
$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Σημειώνουμε ότι για $(x,y) \neq (0,0)$ είναι

$$f_x(x,y) = \frac{y(x^2+y^2)-xy2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2y+y^3-2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2},$$

και από συμμετρία

$$f_y(x,y) = \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Γεωμετρική σημασία της μερικής Παραγώγου

Ας υποθέσουμε ότι για τη συνάρτηση $z = f(x,y)$ υπάρχει η μερική παράγωγος $f_x(x_0,y_0)$. Όλα τα σημεία του τριδιάστατου χώρου με $y = y_0$ αποτελούν ένα επίπεδο, έστω $\Pi(y = y_0)$ το οποίο είναι παράλληλο στο xz-επίπεδο. Ο περιορισμός του γραφήματος της f στο επίπεδο αυτό, ισοδύναμα η τομή της γραφικής παράστασης της $z = f(x,y)$ με το επίπεδο είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής $z = h(x) = f(x,y_0)$. Επιπλέον

$$h'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{h(x_0+h)-h(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = f_x(x_0,y_0).$$

Κατά συνέπεια η τιμή $f_x(x_0,y_0)$ είναι η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο (x_0,y_0,z_0) του γραφήματος της $z = f(x,y)$ στο επίπεδο $y = y_0$.

Ανάλογη είναι και η σημασία για την μερική παράγωγο $f_y(x_0,y_0)$. Έτσι αν σε κάποιο σημείο (x_0,y_0) οι μερικές παράγωγοι $f_x(x_0,y_0)$ και $f_y(x_0,y_0)$ υπάρχουν τότε οι δύο εφαπτόμενες ευθείες στο σημείο (x_0,y_0,z_0), όπου $z_0 = f(x_0,y_0)$, οι οποίες περιέχονται αντίστοιχα στα, κάθετα μεταξύ τους, επίπεδα $y = y_0$ και $x = x_0$ ορίζουν τη θέση ενός εφαπτόμενου επιπέδου στη γραφική παράσταση της $z = f(x,y)$ στο σημείο (x_0,y_0,z_0).

Παράγωγοι υψηλότερης τάξης

Αν για τη συνάρτηση f υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι f_x και f_y σε κάποιο σημείο (x_0, y_0), ή σε κάποιο ανοικτό σύνολο U και οι μερικές παράγωγοι των f_x και f_y επίσης υπάρχουν στο (x_0, y_0), ή στο U τότε γράφουμε

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = f_{xy},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = f_{yx}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y} = f_{yy}.$$

Τις παραπάνω παραγώγους λέμε **μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης**, ενώ τις f_x και f_y λέμε **μερικές παραγώγους πρώτης τάξης**.

Γενικά $f_{xy} \neq f_{yx}$. Ισχύει όμως το

Θεώρημα 2.1 (Θεώρημα των μεικτών παραγώγων του Clairaut). *Αν η f ορίζεται σ΄ ένα ανοικτό σύνολο U και οι μερικές παράγωγοι f_{xy} και f_{yx} είναι συνεχείς στο U, τότε για κάθε $(x_0, y_0) \in U$ είναι*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Άσκηση 2.1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Δείξτε ότι

(α΄) $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

(β΄) Για $(x,y) \neq (0,0)$

$$f_x(x,y) = \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} + y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad f_y(x,y) = -\frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} + x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

(γ΄) $f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 0$.

(δ΄) $f_{xy}(0,0) = -1$ και $f_{yx}(0,0) = 1$.

Με ανάλογο τρόπο ορίζουμε τις μερικές παραγώγους υψηλότερης τάξης, για παράδειγμα

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\Big) = f_{yxx}, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\Big) = f_{yxy}, \qquad \ldots$$

Παράδειγμα 2.3. Δείξτε ότι η $u(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$, $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ ικανοποιεί την **εξίσωση του Laplace**

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \qquad \text{στο } \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}.$$

Παρατηρούμε ότι για $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ είναι

$$u_x = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}2x = -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

και

$$\begin{aligned} u_{xx} &= -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + \frac{3}{2}x(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}2x \\ &= -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}. \end{aligned}$$

Έτσι από συμμετρία της u ως προς x, y, z παίρνουμε

$$\begin{aligned} u_{xx}+u_{yy}+u_{zz} &= -\frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\ &= -\frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Η εξίσωση του laplace είναι παράδειγμα μιας διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους, είναι όπως λέμε μια **μερική διαφορική εξίσωση**. Στο παράδειγμα δείξαμε ότι η $u = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ είναι μια λύση της εξίσωσης, είναι δηλαδή μια συνάρτηση η οποία ικανοποιεί την εξίσωση, στο $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Η $u = ax+by+cz$, με a, b, c πραγματικές σταθερές, είναι προφανώς (γιατί;) μια άλλη λύση της στο $\mathbb{R}^3$.

2.1.1 Μερική παράγωγος πεπλεγμένης συνάρτησης

Ας υποθέσουμε ότι μια εξίσωση $F(x,y,z) = 0$ ορίζει το z σαν συνάρτηση των δύο ανεξάρτητων μεταβλητών x και y. Όπως και στην περίπτωση της μιας μεταβλητής μπορούμε να βρούμε τις μερικές πραγώγους της z παραγωγίζοντας την εξίσωση ως προς τη μεταβλητή που μας ενδιαφέρει και παίρνοντας υπόψη ότι η μεταβλητή z είναι συνάρτηση.

Παράδειγμα 2.4. Να βρεθεί η z_x από την εξίσωση $yz - \log z = x + y$.

Υποθέτοντας ότι $z = f(x,y)$ και ότι η z_x υπάρχει παραγωγίζοντας την εξίσωση παίρνουμε

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{yz-1}.$$

2.2 Διαφορισιμότητα

Από τον ορισμό της παραγώγου στη μία μεταβλητή προκύπτει ότι αν η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι διαφορίσιμη στο x_0 η μεταβολή $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ καθώς το x μεταβάλλεται από το x_0 στο $x_0 + \Delta x$ είναι

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \epsilon\Delta x,$$

όπου $\epsilon \to 0$ καθώς $\Delta x \to 0$. Γενικεύοντας το αποτέλεσμα αυτό στις δύο, ή περισσότερες διαστάσεις έχουμε

Ορισμός 2.2. Αν η $z = f(x,y)$ είναι ορισμένη σ′ ένα ανοικτό σύνολο U και $(x_0,y_0) \in U$ θα λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** ή **διαφορίσιμη** στο (x_0,y_0) αν οι μερικές παράγωγοι $f_x(x_0,y_0)$ και $f_y(x_0,y_0)$ υπάρχουν και η μεταβολή Δz των τιμών της f από το (x_0,y_0) στο $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ ικανοποιεί μια σχέση της μορφής

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y, \tag{2.3}$$

όπου $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ καθώς $\Delta x, \Delta y \to 0$. Θα λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο U αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του U.

Ο έλεγχος για το αν μια συνάρτηση είναι διαφορίσιμη με χρήση του ορισμού δεν είναι πάντα εύκολος. Το θεώρημα, ωστόσο, που ακολουθεί εξασφαλίζει τη διαφορισιμότητα μιας συνάρτησης, αποτελεί δηλαδή μια ικανή συνθήκη για για να είναι μια συνάρτηση διαφορίσιμη.

Θεώρημα 2.2. *Αν οι μερικές παράγωγοι f_x και f_y μιας συνάρτησης f υπάρχουν και είναι συνεχείς σ΄ ένα ανοικτό σύνολο U, τότε η f είναι διαφορίσιμη στο U.*

Ορισμός 2.3. Αν οι μερικές παράγωγοι f_x και f_y είναι συνεχείς σ΄ ένα ανοικτό σύνολο U θα λέμε ότι η f είναι **συνεχώς διαφορίσιμη** στο U.

Παράδειγμα 2.5. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x, y) = 3x^2 + 2xy$ είναι διαφορίσιμη.

Πρώτος τρόπος: Με τον ορισμό.

Βρίσκουμε τις πρώτες μερικές παραγώγους της f

$$f_x(x, y) = 6x + 2y \qquad \text{και} \qquad f_y(x, y) = 2x$$

και υπολογίζουμε τη μεταβολή της f καθώς το x μεταβάλλεται από το (x, y) στο $(x + \Delta x, y + \Delta y)$

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) &= 3(x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x)(y + \Delta y) - 3x^2 - 2xy \\ &= 3x^2 + 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 2xy + 2x\,\Delta y + 2y\,\Delta x + 2\,\Delta x\,\Delta y - 3x^2 - 2xy \\ &= (6x + 2y)\,\Delta x + 2x\,\Delta y + 3(\Delta x)^2 + 2\,\Delta x\,\Delta y \\ &= f_x(x, y)\,\Delta x + f_y(x, y)\,\Delta y + 3(\Delta x)^2 + 2\,\Delta x\,\Delta y \end{aligned}$$

οπότε επιλέγοντας $\epsilon_1 = 3\Delta x$ και $\epsilon_2 = 2\Delta x$ έχουμε

$$\Delta z = f_x(x, y)\,\Delta x + f_y(x, y)\,\Delta y + \epsilon_1\,\Delta x + \epsilon_2\,\Delta y$$

όπου $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ καθώς $\Delta x, \Delta y \to 0$, κατά συνέπεια η f είναι διαφορίσιμη σε κάθε (x, y).

Δεύτερος τρόπος: Με χρήση του Θεωρήματος 2.2 .

Οι πρώτες μερικές παράγωγοι $f_x(x, y) = 6x + 2y$ και $f_y(x, y) = 2x$ είναι συνεχείς κατά συνέπεια η f είναι διαφορίσιμη.

Στο Παράδειγμα 2.2 είδαμε ότι η ύπαρξη των πρώτων μερικών παραγώγων συνάρτησης σε κάποιο σημείο δεν συνεπάγεται την συνέχεια της συνάρτησης στο σημείο αυτό. Ισχύει όμως το

Θεώρημα 2.3. *Αν μια συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο (x_0, y_0) τότε είναι συνεχής στο (x_0, y_0).*

Παρατήρηση 2.1. Ας υποθέσουμε ότι για τη συνάρτηση $z = f(x, y)$ οι τρίτης τάξης μερικές παράγωγοι υπάρχουν και είναι συνεχείς σ΄ ένα ανοικτό σύνολο U. Τότε από το Θεώρημα 2.2 έπεται ότι οι δεύτερης τάξης μερικές παράγωγοι είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις, άρα συνεχείς κατά συνέπεια οι μικτές μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης είναι ίσες, έτσι $f_{xy} = f_{yx}$ στο U. Παίρνοντας στη συνέχεια τις μερικές παραγώγους ως προς x και ως προς y έχουμε

$$f_{xyx} = f_{yxx} \qquad \text{και} \qquad f_{xyy} = f_{yxy}.$$

Για τις συναρτήσεις f_x και f_y οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης υπάρχουν και είναι συνεχείς, από την υπόθεση, κατά συνέπεια παίρνοντας τις μικτές παραγώγους προκύπτει ότι

$$f_{xxy} = f_{xyx} \qquad \text{και} \qquad f_{yxy} = f_{yyx}.$$

Έτσι από τις δύο σχέσεις, τελικά, παίρνουμε

$$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx} \qquad \text{και} \qquad f_{yyx} = f_{yxy} = f_{xyy},$$

κατά συνέπεια κάθε μερική παράγωγος τρίτης τάξης είναι ανεξάρτητη της σειράς παραγώγισης. Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύεται, χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία, και για τις μερικές παραγώγους υψηλότερης τάξης.

Παραγώγιση σύνθετων συναρτήσεων

Θεώρημα 2.4 (Ο κανόνας της αλυσίδας I). *Έστω ότι η $z = f(x, y)$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση σ' ένα ανοικτό σύνολο U.*

(1) *Εάν $x = g(t)$, $y = h(t)$ και οι g και h είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις του t, τότε η z είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς t και*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

(2) *Εάν $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$ και οι μερικές παράγωγοι g_r, g_s, h_r και h_s υπάρχουν, τότε*

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial r} \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial s}.$$

Θεώρημα 2.5 (Ο κανόνας της αλυσίδας II). *Έστω ότι η $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση σ' ένα ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Εάν $x_1 = g_1(r_1, r_2, \ldots, r_m)$, $x_2 = g_2(r_1, r_2, \ldots, r_m)$, ..., $x_n = g_n(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ και οι μερικές παράγωγοι $\partial g_i/\partial r_j$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$ υπάρχουν, τότε*

$$\frac{\partial u}{\partial r_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial r_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial r_k} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial r_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Στην ειδική περίπτωση όπου οι μεταβλητές x_i είναι συναρτήσεις μιας μόνο μεταβλητής, έστω t, με $x_i = g_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ και οι g_i είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις του t, τότε η u είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του t και

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

Παράδειγμα 2.6. Εάν $z = f(x^2 y)$, όπου η f είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση μιας μεταβλητής, δείξτε ότι

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{2.4}$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας, Θεώρημα 2.5 για $n = 1$ και $m = 2$ γράφοντας $z = f(s)$ και $s = g(x, y) = x^2y$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{df}{ds}\frac{\partial s}{\partial x} = f'(s)g_x(x,y) = f'(x^2y)2xy\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{df}{ds}\frac{\partial s}{\partial y} = f'(s)g_y(x,y) = f'(x^2y)x^2.\end{aligned}$$

Έτσι αντικαθιστώντας στο αριστερό μέλος της (2.4) βρίσκουμε

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2yf'(x^2y) - 2x^2yf'(x^2y) = 0$$

που είναι ό,τι θέλουμε να δείξουμε.

Όπως στο Παράδειγμα 2.3 η σχέση (2.4) είναι μια μερική διαφορική εξίσωση και η $z = f(x^2y)$, για κάθε διαφορίσιμη f, είναι λύση της εξίσωσης.

Παρατήρηση 2.2. Ο κανόνας της αλυσίδας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δώσει μια συστηματική περιγραφή στη διαδικασία πεπλεγμένης παραγώγισης. Ας δούμε τα σχετικά αποτελέσματα στη μία και στις δύο διαστάσεις.

I. Έστω ότι η $F(x, y)$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση και ας υποθέσουμε ότι η εξίσωση $F(x, y) = 0$ ορίζει την y σαν συνάρτηση του x, $y = f(x)$, όπου η f είναι παραγωγίσιμη. Από τον κανόνα της αλυσίδας, παραγωγίζοντας την εξίσωση $F(x, y) = 0$ παίρνουμε

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

αφού $dx/dx = 1$. Υποθέτοντας ότι $\partial F/\partial y \neq 0$ από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}. \tag{2.5}$$

Οι συνθήκες κάτω από τις οποίες ισχύουν τα παραπάνω περιγράφονται στο **Θεώρημα της πεπεπλεγμένης συνάρτησης**.[1]

II. Έστω ότι η $F(x, y, z)$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση και ας υποθέσουμε ότι η εξίσωση $F(x, y, z) = 0$ ορίζει την z σαν συνάρτηση των x και y, $z = f(x, y)$. Εάν οι f_x και f_y υπάρχουν, από τον κανόνα της αλυσίδας, παραγωγίζοντας την εξίσωση $F(x, y, z) = 0$ ως προς x και ως προς y παίρνουμε

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Επειδή

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial y}{\partial y} = 1$$

το παραπάνω σύστημα γίνεται

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

[1] **Το Θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης I.** *Εάν η F ορίζεται σ' ένα ανοικτό σύνολο U το οποίο περιέχει το σημείο (x_0, y_0), $F(x_0, y_0) = 0$, οι μερικές παράγωγοι F_x και F_y υπάρχουν και είναι συνεχείς στο U και $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, τότε η εξίσωση $F(x, y) = 0$ ορίζει την y σαν συνάρτηση του x σε μια περιοχή γύρω από το (x_0, y_0) και η παράγωγος της συνάρτησης αυτής δινεται από την (2.5).*

απ΄ όπου, αν $\partial F/\partial z \neq 0$ έπεται ότι

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}. \tag{2.6}$$

Οι συνθήκες κάτω από τις οποίες ιχύουν τα παραπάνω περιγράφονται στο **Θεώρημα της πεπεπλεγμένης συνάρτησης** .[2]

Άσκηση 2.2. Ξανακοιτάξτε το Παράδειγμα 2.4 υπό το πρίσμα του Θεωρήματος της πεπλεγμένης συνάρτησης.

2.3 Βασικά θεωρήματα

Θεώρημα 2.6 (Θεώρημα μέσης τιμής). *Έστω ότι η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι συνεχής σ΄ ένα κλειστό ορθογώνιο R, και οι πρώτες μερικές παράγωγοι f_x και f_y υπάρχουν στο ανοικτό ορθογώνιο. Αν (x_0, y_0) και $(x_0 + h, y_0 + k)$ ανήκουν στο ανοικτό ορθογώνιο τότε υπάρχει $\theta \in (0, 1)$ ώστε*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = hf_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + kf_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \tag{2.7}$$

Σημείωση 2.1 (Συμβολισμός). Για λόγους κομψότητας, ευχρηστίας και οικονομίας είνα χρήσιμο να εισάγουμε νέο συμβολισμό. Στη μία μεταβλητή για τις παραγώγους $f'(x)$, $f''(x)$ $f'''(x)$ κλπ της $f(x)$ γράφουμε

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x), \qquad \frac{d^2}{dx^2}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = f''(x), \qquad \frac{d^3}{dx^3}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right) = f'''(x), \qquad \ldots$$

Αν ορίσουμε το σύμβολο (ή σύνθεση)

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n := \frac{d^n}{dx^n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

τότε θα έχουμε

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) = \frac{d^n}{dx^n}f(x) = f^{(n)}(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Αν τώρα η f είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών, $f(x, y)$, η έκφραση d/dx στα παραπάνω μπορεί να αντικατασταθεί με $\partial/\partial x$, ή $\partial/\partial y$. Γενικεύοντας αν a και b είναι σταθερές μπορούμε να έχουμε

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x, y) = af_x(x, y) + bf_y(x, y).$$

Επιπλέον, αφενός

$$\begin{aligned}\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x, y) &= \left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x, y)\\ &= \left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)(af_x(x, y) + bf_y(x, y))\\ &= a^2 f_{xx}(x, y) + abf_{yx}(x, y) + baf_{xy}(x, y) + b^2 f_{yy}(x, y)\end{aligned}$$

[2]**Το Θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης II.** *Εάν η F ορίζεται σ΄ ένα ανοικτό σύνολο U το οποίο περιέχει το σημείο (x_0, y_0, z_0), $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ οι μερικές παράγωγοι F_x, F_y, και F_z υπάρχουν και είναι συνεχείς στο U και $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, τότε η εξίσωση $F(x, y, z) = 0$ ορίζει την z σαν συνάρτηση των x και y σε μια περιοχή γύρω από το (x_0, y_0, z_0) και οι μερικές παράγωγοιπαράγωγος της συνάρτησης αυτής δινονται από τις (2.6).*

και αφετέρου

$$\begin{aligned}\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y) &= \left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)\\ &= \left(a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+ab\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+ba\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}+b^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(x,y)\\ &= a^2 f_{xx}(x,y)+abf_{yx}(x,y)+baf_{xy}(x,y)+b^2f_{yy}(x,y).\end{aligned}$$

Υποθέτοντας λοιπόν ότι $f_{xy} = f_{yx}$ έχουμε ότι

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y) := \left(a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2ab\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+b^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(x,y).$$

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε για $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y) := \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\frac{\partial^{n-k}}{\partial x^{n-k}}\frac{\partial^k}{\partial x^k}f(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\frac{\partial^n}{\partial x^{n-k}\partial y^k}f(x,y) \tag{2.8}$$

υποθέτοντας ότι η συνάρτηση $f(x,y)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους όλων των τάξεων, κατά συνέπεια η τιμή των μικτών παραγώγων δεν εξαρτάται από την σειρά παραγώγισης.

Σύμφωνα με την (2.8) το αποτέλεσμα του Θεωρήματος της μέσης τιμής μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0+\theta h, y_0+\theta k), \qquad 0<\theta<1. \tag{2.9}$$

Θεώρημα 2.7 (Θεώρημα μέσης τιμής του Taylor). *Έστω ότι οι μερικές παράγωγοι της $f(x,y)$ μέχρι τάξης $n+1$ υπάρχουν και είναι συνεχείς σ' ένα ανοικτό ορθογώνιο R. Αν (x_0,y_0) και (x_0+h, y_0+k) ανήκουν στο ανοικτό ορθογώνιο, τότε υπάρχει $\theta \in (0,1)$ ώστε*

$$\begin{aligned}f(x_0+h,y_0+k) = f(x_0,y_0)&+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots\\ &+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)+R_n(x_0,y_0)\end{aligned} \tag{2.10}$$

όπου το υπόλοιπο R_n δίνεται από τη σχέση

$$R_n(x_0,y_0) = \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k). \tag{2.11}$$

Παρατήρηση 2.3. Τόσο στο Θεώρημα μέσης τιμής όσο και στο Θεώρημα Taylor παίρνουμε συνήθως $h = \Delta x = x - x_0$ και $k = \Delta y = y - y_0$. Έτσι το δεξί μέλος της (2.10) είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n ως προς $x - x_0$ και $y - y_0$, το οποίο λέμε **πολυώνυμο Taylor** βαθμού n, συν το υπόλοιπο.

Εάν οι μερικές παράγωγοι όλων των τάθεων της f υπάρχουν και το υπόλοιπο R_n τείνει στο 0 καθώς $n \to \infty$ για όλα τα (x,y) σε κάποια περιοχή γύρω από το (x_0,y_0), τότε η $f(x,y)$ αναπτύσσεται σε μια σειρά δυνάμεων των $x - x_0$ και $y - y_0$ και η περιοχή που η σειρά συγκλίνει λέγεται **περιοχή σύγκλισης**. Όπως και στη περίπτωση της μιας μεταβλητής η δυναμοσειρά αυτή λέγεται **σειρά Taylor** στις δύο μεταβλητές.

2.3.1 Γραμμικοποίηση

Αν η συνάρτηση $z = f(x, y)$ είναι διαφορίσιμη σ' ένα ανοικτό σύνολο γύρω από το (x_0, y_0), τότε για (x, y) κοντά στο (x_0, y_0), δηλαδή για $\Delta x = x - x_0$ και $\Delta y = y - y_0$ μικρά, τότε είτε από τον ορισμό της διαφορισιμότητας είτε από το Θεώρημα μεσης τιμής του Taylor έπεται ότι

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \epsilon$$

για (x, y) κοντά στο (x_0, y_0), όπου ϵ είναι μια μικρή ποσότητα.

Ορισμός 2.4. Η γραμμική συνάρτηση

$$L(x, y) := f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{2.12}$$

λέγεται **γραμμικοποίηση** της f στο (x_0, y_0).

Έτσι για (x, y) κοντά στο (x_0, y_0) έχουμε ότι $f(x, y) \approx L(x, y)$, δηλαδή οι τιμές $f(x, y)$ προσεγγίζονται από αυτές της $L(x, y)$. Τη προσέγγιση αυτή λέμε **γραμμική προσέγγιση** της f στο (x_0, y_0). Αργότερα θα δείξουμε ότι η εξίσωση

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{2.13}$$

με $z_0 = f(x_0, y_0)$ είναι η εξίσωση του **εφαπτόμενου επιπέδου** της επιφάνειας $z = f(x, y)$ στο σημείο (x_0, y_0, z_0).

2.3.2 Το Διαφορικό και προσεγγίσεις

Έστω $z = f(x, y)$ και έστω $\Delta x = dx$ και $\Delta y = dy$ να είναι μεταβολές στις ανεξάρτητες μεταβλητές x και y αντιστοιχα. Τότε η μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής είναι

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta f.$$

Εάν η f είναι διαφορίσιμη σ' ένα ανοικτό σύνολο U, τότε

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y = \Delta f,$$

όπου $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ καθώς $\Delta x, \Delta y \to 0$. Η έκφραση

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy, \qquad \text{ή} \qquad df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

λέγεται **ολικό διαφορικό** ή **διαφορικό** της του z, ή της f αντίστοιχα. Γενικά $\Delta z \neq dz$. Άν όμως οι $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ είναι μικρές ποσότητες τότε το dz είναι μια προσέγγιση του Δz. Τα dx και dy λέγονται **διαφορικά** των ανεξάρτητων μεταβλητών x και y και δεν είναι απαραίτητο να είναι μικρές ποσότητες.

Παράδειγμα 2.7. Εξετάστε αν η έκφραση

$$(2xe^y + 1)\, dx + x^2 e^y\, dy$$

είναι ολικό διαφορικό.

Για να είναι ολικό διαφορικό θα πρέπει να υπάρχει συνάρτηση $f(x,y)$ ώστε $df = (2xe^y + 1)\,dx + x^2e^y\,dy$, θα πρέπει δηλαδή να υπάρχει f ώστε

$$f_x(x,y) = 2xe^y + 1 \qquad \text{και} \qquad f_y(x,y) = x^2e^y.$$

Θέλουμε λοιπόν να ανακτήσουμε την f, αν αυτή υπάρχει, από τις μερικές παραγώγους της. Έτσι παίρνουμε

$$f(x,y) = \int f_x(x,y)\,dx = \int (2xe^y + 1)\,dx = x^2e^y + x + c(y),$$

όπου η $c(y)$ είναι η σταθερά της ολοκλήρωσης η οποία μπορεί να εξαρτάται από τη μεταβλητή y, είναι δηλαδή συνάρτηση της y. Τώρα θα πρέπει $f_y(x,y) = x^2e^y$, ισοδύναμα

$$x^2e^y + c'(y) = x^2e^y \Rightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = c,$$

όπου το c είναι μια σταθερά. Έτσι $f(x,y) = x^2e^y + x + c$ και η δοσμένη έκφραση είναι ολικό διαφορικό κάθε τέτοιας f.

Προσεγγίσεις

Αν η $z = f(x,y)$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση, γεγονός που εξασφαλίζεται αν οι μερικές παράγωγοι f_x και f_y είναι συνεχείς, τότε

$$\Delta z - dz = \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y \to 0$$

καθώς $\Delta x, \Delta y \to 0$, κατά συνέπεια $\Delta z \approx dz$, ισοδύναμα

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + dz \tag{2.14}$$

για μικρές μεταβολές στις ανεξάρτητες μεταβλητές x και y. Την σχέση (2.14) μπορούμε να τη δούμε σαν ενα τρόπο που επιτρέπει την προσέγγιση της $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$ από αυτήν της $f(x,y)$. Στη περίπτωση αυτή το dz παρέχει το προσεγγιστικό σφάλμα στην προσέγγιση.

Παράδειγμα 2.8. Εάν $z = f(x,y) = x^2y - 3y$ να υπολογισθούν οι ποσότητες

(α′) Δz και dz.

(β′) Δz και dz αν $x = 4$, $y = 3$, $\Delta x = -0.01$, $\Delta y = 0.02$.

(γ′) Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικά την τιμή $f(5.12, 6.85)$;

(α′) Από τον ορισμό της μεταβολής Δz έχουμε

$$\begin{aligned}
\Delta z &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)\\
&= [(x+\Delta x)^2(y+\Delta y) - 3(y+\Delta y)] - [x^2y - 3y]\\
&= [x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2](y+\Delta y) - 3(y+\Delta y) - x^2y + 3y\\
&= 2xy\,\Delta x + (x^2-3)\,\Delta y + (\Delta x)^2y + 2\,\Delta x\,\Delta y + (\Delta x)^2\,\Delta y
\end{aligned}$$

απ′ όπου έπεται ότι

$$dz = 2xy\,dx + (x^2-3)\,dy.$$

Διαφορετικά υπολογίζουμε

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 2xy\,dx + (x^2-3)\,dy.$$

(β΄) Υπολογίζουμε

$$\Delta z = f(4 - 0.01, 3 + 0.02) - f(4, 3) = \cdots = 0.018702$$

και

$$dz = 2(4)(3)(-0,01) + (4^2 - 3)(0.02) = \cdots = 0.02.$$

(γ΄) Οι μερικές παράγωγοι $f_x(x, y) = 2xy$ και $f_y(x, y) = x^2 - 3$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^2$ συνεπώς για μικρές μεταβολές στις ανεξάρτητες μεταβλητές $\Delta x = dx$ και $\Delta y = dy$ η (2.14) μας επιτρέπει να υπολογίσουμε προσεγγιστικά την ακριβή τιμή. Θέλουμε την $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ όταν $x + \Delta x = 5.12$ και $y + \Delta y = 6.85$, έτσι παίρνουμε

$$x = 5, \qquad \Delta x = 0.12, \qquad y = 7, \qquad \Delta y = -0.15$$

οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για την προσέγγιση την (2.14). Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} z &= f(5, 7) = 5^2 7 - (3)(7) = 154 \\ dz &= 2xy\,dx + (x^2 - 3)\,dy = 2(5)(7)(0.12) + (5^2 - 3)(-0.15) = \cdots = 5.1. \end{aligned}$$

Έτσι από την (2.14) έπεται

$$f(5.12, 6.85) \approx 154 + 5.1 = 159.1.$$

Σημειώνουμε ότι η ακριβής τιμή είναι

$$f(5.12, 6.85) = \cdots = 159.01864.$$

Παράδειγμα 2.9. Εάν η ακτίνα βάσης ενός ορθού κυκλικού κώνου ειναι 10 cm και το ύψος είναι 25 cm με πιθανό σφάλμα στη μέτρηση 0.1 cm σε κάθε μεταβλητή, να εκτιμηθεί το μέγιστο σφάλμα στον υπολογισμό του όγκου του κώνου.

Ο όγκος ορθού κυκλικού κώνου με αντίνα βάσης r και ύψος h είναι

$$V = V(r, h) = \frac{\pi}{3} r^2 h.$$

Από την (2.14) βλέπουμε ότι για μικρές αποκλίσεις από το πραγματικό μέγεθος των μεταβλητών r και h η ποσότητα dV δίνει μια εκτίμηση του σφάλματος. Έτσι βρίσκουμε

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh = \frac{2\pi}{3} rh\,dr + \frac{\pi}{3} r^2\,dh,$$

απ΄ όπου για $|\Delta r| \leq 0.1$ και $|\Delta h| \leq 0.1$, παίρνοντας $dr = 0.1$ και $dh = 0.1$ υπολογίζουμε, για $r = 10$ και $h = 25$,

$$dV = \frac{500\pi}{3}(0.1) + \frac{100\pi}{3}(0.1) = 20\pi \approx 63.$$

Έτσι μια εκτίμηση του σφάλματος στον υπολογισμό του όγκου είναι 63 cm^3. Σημειώνουμε ότι το σφάλμα αυτό είναι της τάξης του 2.4% αφού ο όγκος V είναι $2500\,\pi/3$.

2.4 Μέγιστα και ελάχιστα

Ορισμός 2.5. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει **απόλυτο μέγιστο** στο σημείο (x_0, y_0) του πεδίου ορισμού της $D(f)$ αν $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ για κάθε $(x, y) \in D(f)$. Ο αριθμός $f(x_0, y_0)$ λέγεται **μέγιστη τιμή** της f. Όμοια θα λέμε ότι η f έχει **απόλυτο ελάχιστο** στο σημείο (x_0, y_0) του πεδίου ορισμού της $D(f)$ αν $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ για κάθε $(x, y) \in D(f)$ και ο αριθμός $f(x_0, y_0)$ θα λέγεται **ελάχιστη τιμή** της f.

Ορισμός 2.6. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει **τοπικό μέγιστο** στο σημείο (x_0, y_0) του πεδίου ορισμού της $D(f)$ αν υπάρχει ανοιχτός δίσκος D με κέντρο το (x_0, y_0) και $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ για κάθε $(x, y) \in D$. Όμοια θα λέμε ότι η f έχει **τοπικό ελάχιστο** στο σημείο (x_0, y_0) του πεδίου ορισμού της $D(f)$ αν υπάρχει ανοιχτός δίσκος D με κέντρο το (x_0, y_0) και $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ για κάθε $(x, y) \in D$. Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f λέγονται **τοπικά ακρότατα** της f.

Θεώρημα 2.8. *Εάν η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο στο (x_0, y_0) και οι πρώτες μερικές παράγωγοι υπάρχουν στο (x_0, y_0), τότε $f_x(x_0, y_0) = 0$ και $f_y(x_0, y_0) = 0$.*

Ορισμός 2.7. Ένα σημείο (x_0, y_0) στο πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f στο οποίο $f_x(x_0, y_0) = 0$ και $f_y(x_0, y_0) = 0$, ή όπου τουλάχιστον μία απο τις f_x και f_y δεν υπάρχει λέγεται **κρίσιμο σημείο** της f.

Θεώρημα 2.9 (Κριτήριο της δεύτερης παραγώγου). *Έστω ότι οι δεύτερης τάξης μερικές παράγωγοι μιας συνάρτησης f είναι συνεχείς σε κάποιο ανοιχτό δίσκο με κέντρο το (x_0, y_0), και έστω ότι $f_x(x_0, y_0) = 0$ και $f_y(x_0, y_0) = 0$. Έστω*

$$H = H(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 \tag{2.15}$$

(1) *Εάν $H > 0$ και $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο (x_0, y_0).*

(2) *Εάν $H > 0$ και $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο (x_0, y_0).*

(3) *Εάν $H < 0$ το $f(x_0, y_0)$ δεν είναι ούτε τοπικό μέγιστο, ούτε τοπικό ελάχιστο.*

(4) *Εάν $H = 0$ το κριτήριο δεν δίνει κάποια πληροφορία. Το $f(x_0, y_0)$ μπορεί να είναι τοπικό μέγιστο, ή τοπικό ελάχιστο, ή τίποτα από τα δύο.*

Σημειώνουμε ότι

- Η έκφραση $H = f_{xx} f_{yy} - [f_{xy}]^2$ λέγεται Εσσιανή (Hessian) της f και μπορεί να γραφεί σε μορφή **ορίζου-**

σας[3]

$$H = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - [f_{xy}]^2.$$

- Το σημείο (x_0, y_0) στην περίπτωση (3) λέγεται **σαγματικό σημείο** (saddle point). Στη περίπτωση αυτή το $f(x_0, y_0)$ είναι τοπικό μέγιστο για την $f(x, y_0)$ ή $f(x_0, y)$ και τοπικό ελάχιστο για την $f(x_0, y)$ ή $f(x, y_0)$ αντίστοιχα.

Παράδειγμα 2.10. Ένα τετραγωνικό κουτί (σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου) ανοιχτό στο επάνω μέρος θέλουμε να έχει όγκο 32 κυβικά μέτρα. Ποιές πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ώστε το εμβαδόν επιφανείας του να είναι το ελάχιστο δυνατό;

Αν x, y και z είναι οι ακμές του, τότε ο όγκος V και το εμβαδόν επιφανείας S είναι

$$\begin{aligned} V &= xyz = 32 \\ S &= xy + 2xz + 2yz. \end{aligned}$$

Από την πρώτη εξίσωση βρίσκουμε $z = 32/(xy)$, και αντικαθιστώντας στη δεύτερη εξίσωση βρίσκουμε

$$S = S(x, y) = xy + (2x + 2y)\frac{32}{xy} = xy + \frac{64}{x} + \frac{64}{y}.$$

Το πεδίο ορισμού (γενικά) της S είναι το $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Διαμορφώνοντας το σύστημα $S_x = S_y = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} S_x &= y - \frac{64}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 y = 64 \\ S_y &= x - \frac{64}{y^2} = 0 \Rightarrow xy^2 = 64 \end{aligned}$$

αφού $x \neq 0$ και $y \neq 0$. Επιλύοντας βρίσκουμε

$$x = y \qquad \text{και} \qquad x^3 = 64, \qquad \text{άρα} \qquad x = y = 4 \qquad \text{και} \qquad z = 2.$$

Επιπλέον

$$S_{xx} = \frac{128}{x^3}, \qquad S_{xy} = 1, \qquad S_{yy} = \frac{128}{y^3}$$

οπότε στο κρίσιμο σημείο $(4, 4)$ είναι

$$H(4, 4) = S_{xx}(4, 4)S_{yy}(4, 4) - S_{xy}^2(4, 4) = (2)(2) - 1 = 3 > 0 \qquad \text{και} \qquad S_{xx}(4, 4) = 2 > 0$$

κατά συνέπεια στο $(4, 4)$ η S έχει τοπικό ελάχιστο. Το $(0, 0)$ δεν είναι κρίσιμο σημείο γιατί η S δεν ορίζεται σ΄ αυτό, κατά συνέπεια στο $(4, 4)$ η S παίρνει την ελάχιστη τιμή της. Έτσι οι ζητούμενες διαστάσεις είναι $x = 4$, $y = 4$, και $z = 2$.

[3] Εάν A είναι ένα 2×2 μητρώο η ορίζουσα (determinant) του A ορίζεται να είναι το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του A μείον το γινόμενο των στοιχείων της δευτερεύουσας διαγωνίου. Την ορίζουσα του A συμβολίζουμε με $\det A$, ή $|A|$, έτσι αν

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \quad \det A = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} := \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Σημειώστε ότι αν $A = [a_{ij}]$, γράφουμε $\det A = |a_{ij}|$ και όχι $|[a_{ij}]|$. Για ορίζουσες θα μιλήσουμε σε επόμενο κεφάλαιο.

Παράδειγμα 2.11. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα ακρότατα της $f(x,y) = y^2 - x^2$.

Επιλύουμε το σύστημα $f_x = f_y = 0$. Βρίσκουμε

$$f_x = -2x \qquad \text{και} \qquad f_y = 2y,$$

κατά συνέπεια το μόνο κρίσιμο σημείο είναι το $(0,0)$. Επίσης $f_{xx} = -2$, $f_{xy} = 0$ και $f_{yy} = 2$, κατά συνέπεια

$$H(0,0) = f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}^2(0,0) = (-2)(2) - 0 = -4.$$

Άρα στο $(0,0)$ η f δεν έχει ούτε τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο. Το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο. Πράγματι η

$$f_1(x) = f(x,0) = -x^2$$

έχει ολικό μέγιστο στο $x = 0$, ενώ η

$$f_2(y) = f(0,y) = y^2$$

έχει ολικό ελάχιστο στο $y = 0$.

Απόλυτο μέγιστο και απόλυτο ελάχιστο

Στις δύο ή και περισσότερες μεταβλητές και όσον αφορά στη μέγιστη και ελάχιστη τιμή συνάρτησης ισχύει το ανάλογο αποτέλεσμα με αυτό στη μία μεταβλητή.

Θεώρημα 2.10. *Εάν η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σ΄ ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο $R \subset \mathbb{R}^2$, τότε υπάρχουν σημεία $(x_1, y_1) \in R$ και $(x_2, y_2) \in R$ ώστε*

$$f(x_1, y_1) \leq f(x,y) \leq f(x_2, y_2),$$

για όλα τα σημεία $(x,y) \in R$.

Έτσι αν θέλουμε να βρούμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης f ορισμένης και συνεχούς σε κλειστό και φραγμένο σύνολο R, τότε ακολουθούμε τη διαδικασία

1. Βρίσκουμε τις τιμές της f σε όλα τα κρίσιμα σημεία στο εσωτερικό του R.
2. Βρίσκουμε τις ακρότατες τιμές της f στο σύνορο του R.
3. Η μέγιστη των τιμών από τα βήματα 1. και 2. είναι το απόλυτο μέγιστο της f. Η ελάχιστη των τιμών από τα βήματα 1. και 2. είναι το απόλυτο ελάχιστο της f.

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-(x^2/4t)}, \qquad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$$

ικανοποιεί την **εξίσωση της θερμότητας**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Κεφάλαιο 3

Πολλαπλά Ολοκληρώματα

3.1 Διπλά ολοκληρώματα

Έστω f μια φραγμένη συνάρτηση σε κάποιο ορθογώνιο $R = [a, b] \times [c, d]$. Θεωρούμε τις διαμερίσεις P_x και P_y

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d$$

των διαστημάτων $[a, b]$ και $[c, d]$ αντίστοιχα. Το $P = P_x \times P_y$ το λέμε διαμέριση του R. Παρατηρούμε ότι τα ορθογώνια $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, με $i = 1, 2, \ldots, m$ και $j = 1, 2, \ldots, n$ αποτελούν μια διαμέριση του R σε υποορθογώνια. Αν θέσουμε $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ και $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, τότε το $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$ είναι το εμβαδόν του R_{ij}. Επιλέγοντας $(\xi_i, \zeta_j) \in R_{ij}$ διαμορφώνουμε το (διπλό) άθροισμα

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \zeta_j)\, \Delta A_{ij} \tag{3.1}$$

και θέτουμε

$$\|P\| = \max_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2}.$$

Εάν καθώς το πλήθος των σημείων m και n στην κάθε διαμέριση αυξάνει απεριόριστα ώστε $\|P\| \to 0$, το αντίστοιχο όριο

$$\lim_{m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \zeta_j)\, \Delta A_{ij}$$

υπάρχει το συμβολίζουμε με

$$\iint_R f(x, y)\, dA,$$

δηλαδή

$$\lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \zeta_j)\, \Delta A_{ij} = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \zeta_j)\, \Delta A_{ij} = \iint_R f(x, y)\, dA$$

και το λέμε **διπλό ολοκλήρωμα Riemann**, ή απλά **διπλό ολοκλήρωμα** της f στο ορθογώνιο R.

Ορισμός 3.1. Αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη και φραγμένη σε κάποιο ορθογώνιο R για την οποία το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_R f(x,y)\,dA$ υπάρχει θα λέγεται **ολοκληρώσιμη κατά Riemmann**, ή απλά **ολοκληρώσιμη** στο R. Το άθροισμα στην (3.1) λέγεται **άθροισμα Riemann** της f για την διαμέριση P του R.

Παρατήρηση 3.1. Μια άμεση συνέπεια του ορισμού του ολοκληρώματος είναι ότι εάν $f(x,y)=k$ σε κάποιο ορθογώνιο $R=[a,b]\times[c,d]$, όπου k είναι μια σταθερά, τότε

$$\iint_R f(x,y)\,dA = k(b-a)(d-c) = kA(R),$$

αφού για κάθε διαμέριση του $[a,b]\times[c,d]$ το αντίστοιχο άθροισμα Riemann ισούται με $k(b-a)(d-c)=A(R)$, όπου με $A(R)$ συμβολίζουμε το εμβαδόν του R.

Θεώρημα 3.1. *Έστω ότι η f είναι μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη σ΄ ένα ορθογώνιο R.*

(1) *Εάν η f είναι συνεχής στο R, τότε είναι ολοκληρώσιμη στο R.*

(2) *Εάν η f είναι φραγμένη στο R και είναι συνεχής εκτός από τα σημεία που ανήκουν στην ένωση πεπερασμένου πλήθους γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων $y=\phi(x)$, ή/και $x=\psi(y)$ τα οποία περιέχονται στο R, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο R.*

Παρατήρηση 3.2. Αν η f είναι συνεχής στο $R=[a,b]\times[c,d]$ και $f(x,y)\geq 0$ στο R, τότε ο όρος $f(\xi_i,\zeta_j)\,\Delta A_{ij}$ εκφράζει τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με βάση το ορθογώνιο R_{ij} και ύψος $f(\xi_i,\zeta_j)$. Κατά συνέπεια κάθε άθροισμα Riemann της f είναι το άθροισμα όγκων διαδοχικών παραλληλεπιπέδων το "άθροισμα" των οποίων, καθώς τα μήκη της βάσης Δx_i και Δy_j τείνουν στο 0, προσεγγίζει όλο και περισσότερο τον όγκο του στερεού που βρίσκεται στο εσωτερικό του παραλληλεπιπέδου $R\times\mathbb{R}$ και μεταξύ του γραφήματος της f και του xy-επιπέδου. Το στερεό αυτό θα το περιγράφουμε σαν το στερεό που βρίσκεται πάνω από το R και κάτω από το γράφημα της f. Έτσι, κατ΄ αναλογία με το απλό ολοκλήρωμα, το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_R f(x,y)\,dA$ εκφράζει τον όγκο του στερεού που βρίσκεται πάνω από το R και κάτω από το γράφημα της f. Ο ισχυρισμός αυτός αποδεικνύεται.

Θεώρημα 3.2. *Αν η f είναι συνεχής στο $R=[a,b]\times[c,d]$ και $f(x,y)\geq 0$ στο R, τότε ο όγκος V του στερεού που βρίσκεται πάνω από το R και κάτω από το γράφημα της f ισούται με το διπλό ολοκλήρωμα της f στο R, δηλαδή*

$$V = \iint_R f(x,y)\,dA.$$

Παρατήρηση 3.3. Σύμφωνα με το περιεχόμενο της Παρατήρησης 3.2 και το Θεώρημα 3.2, αν $f(x,y)\geq 0$ η ποσότητα $f(x,y)\,dA$ εκφράζει "στοιχειώδη όγκο", dV, τον όγκο δηλαδή του "στοιχειώδους παραλληλεπιπέδου" με μήκη ακμών dx, dy, και $f(x,y)$, έτσι

$$dV = f(x,y)\,dA = f(x,y)\,dx\,dy = f(x,y)\,dy\,dx,$$

όπου το dA εκφράζει το "στοιχειώδες εμβαδόν" βάσης.

Ιδιότητες του ολοκληρώματος

Θεώρημα 3.3. *Έστω ότι οι f και g είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο ορθογώνιο R.*

(1) *Για κάθε ζευγάρι πραγματικών αριθμών λ και μ η $\lambda f + \mu g$ είναι ολοκληρώσιμη στο R και*

$$\iint_R [\lambda f(x,y) + \mu g(x,y)]\, dA = \lambda \iint_R f(x,y)\, dA + \mu \iint_R g(x,y)\, dA.$$

(2) *Εάν $f(x,y) \le g(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in R$, τότε*

$$\iint_R f(x,y)\, dA \le \iint_R g(x,y)\, dA.$$

(3)

$$\left| \iint_R f(x,y)\, dA \right| \le \iint_R |f(x,y)|\, dA.$$

(4) *Εάν $R = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_n$ όπου τα R_k είναι ορθογώνια ανά δύο ξένα μεταξύ τους, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε R_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, και*

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \sum_{k=1}^{n} \iint_{R_k} f(x,y)\, dA.$$

3.1.1 Διαδοχικά ολοκληρώματα

Έστω $z = f(x,y)$ μια συνάρτηση συνεχής στο $R = [a,b] \times [c,d]$, και ας υποθέσουμε ότι $f(x,y) \ge 0$ στο R. Αν Σ είναι το στερεό πάνω από το R και κάτω από την επιφάνεια $z = f(x,y)$, τότε ο όγκος του στερεού $V = V(\Sigma)$ είναι

$$V = \iint_R f(x,y)\, dA. \tag{3.2}$$

Για $x \in [a,b]$ σταθερό, το ολοκλήρωμα

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\, dy \tag{3.3}$$

εκφράζει το εμβαδόν της διατομής του στερεού στο x. Τότε σύμφωνα με την αρχή του Cavalieri ό όγκος του Σ είναι

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy \right] dx. \tag{3.4}$$

Όμοια για $y \in [c,d]$ σταθερό, το ολοκλήρωμα

$$A(y) = \int_a^b f(x,y)\, dx \tag{3.5}$$

εκφράζει το εμβαδόν της διατομής του στερεού στο y. Τότε πάλι από την αρχή του Cavalieri έπεται ότι

$$V = \int_c^d A(y)\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\, dx \right] dy. \tag{3.6}$$

Έτσι από τις (3.2), (3.4) και (3.6) συμπεραίνουμε ότι

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\, dx \right] dy. \tag{3.7}$$

Τα ολοκληρώματα στην (3.7) λέγονται **διαδοχικά ολοκληρώματα**. Μπορούμε καταργώντας τις αγκύλες να γράψουμε απλά

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx \qquad \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

και εννοούμε ότι στην μεν σχέση στα αριστερά η ολοκλήρωση γίνεται πρώτα ως προς y και το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης ολοκληρώνεται στη συνέχεια ως προς x, ενώ στη σχέση στα δεξιά η ολοκλήρωση γίνεται πρώτα ως προς x και το αποτέλεσμα ολοκληρώνεται στη συνέχεια ως προς y. Έτσι το διπλό ολοκλήρωμα (3.2) υπολογίζεται με διαδοχική ολοκλήρωση.

Για γενική συνάρτηση f έχουμε το

Θεώρημα 3.4 (Fubini). *Εάν η συνάρτηση $z = f(x,y)$ είναι συνεχής στο $R = [a,b] \times [c,d]$, τότε*

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy. \tag{3.8}$$

Παρατήρηση 3.4. Τα ολοκληρώματα στην (3.8) είναι διαδοχικά ολοκληρώματα, κατά συνέπεια το Θεώρημα του Fubini μας λέει ότι η τιμή του ολοκληρώματος είναι ανεξάρτητη από τη σειρά ολοκλήρωσης των διαδοχικών ολοκληρωμάτων.

Παράδειγμα 3.1. Αν $R = [0,1] \times [1,2]$ υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iint_R (x^2 y + 3y)\,dA.$$

Η $f(x,y) = x^2 y + 3y$ είναι συνεχής, επομένως από το Θεώρημα του Fubini έχουμε

$$\begin{aligned}
\iint_R (x^2 y + 3y)\,dA &= \int_0^1 \int_1^2 (x^2 y + 3y)\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \left[\int_1^2 (x^2 y + 3y)\,dy \right] dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{x^2 y^2}{2} + \frac{3y^2}{2} \right]_{y=1}^2 dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{3x^2}{2} + \frac{9}{2} \right) dx = \left[\frac{x^3}{2} + \frac{9x}{2} \right]_0^1 = 5.
\end{aligned}$$

Θα μπορούσαμε να πάρουμε

$$\begin{aligned}
\iint_R (x^2 y + 3y)\,dA &= \int_1^2 \int_0^1 (x^2 y + 3y)\,dx\,dy \\
&= \int_1^2 \left[\int_0^1 (x^2 y + 3y)\,dx \right] dy \\
&= \int_1^2 \left[\frac{x^3 y}{3} + 3xy \right]_{x=0}^1 dy \\
&= \int_1^2 \left(\frac{y}{3} + 3y \right) dy = \left[\frac{y^2}{6} + \frac{3y^2}{2} \right]_1^2 = 5.
\end{aligned}$$

Άσκηση 3.1. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα
$$\iint_R y\sin(xy)\,dA,$$
όπου $R = [1,2]\times[0,\pi]$, πρώτα ολοκληρώνοντας ως προς x και μετά ως προς y, και κατόπιν ολοκληρώνοντας πρώτα ως προς y και μετά ως προς x.

Άσκηση 3.2. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[c,d]$, δείξτε ότι
$$\iint_R f(x)g(y)\,dx\,dy = \Big[\int_a^b f(x)\,dx\Big]\Big[\int_c^d g(y)\,dy\Big],$$
όπου $R = [a,b]\times[c,d]$.

Θεώρημα 3.5 (Fubini II). *Έστω ότι η f είναι μια φραγμένη συνάρτηση στο $R = [a,b]\times[c,d]$ τέτοια ώστε το σύνολο των σημείων ασυνεχείας της αποτελεί την ένωση πεπερασμένου πλήθους γραφημάτων συναρτήσεων τα οποία περιέχονται στο R. Εάν για κάθε $x \in [a,b]$ το ολοκλήρωμα*
$$I(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$
υπάρχει, τότε και το $\int_a^b I(x)\,dx$ υπάρχει και μάλιστα
$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \iint_R f(x,y)\,dA.$$
Όμοια εάν για κάθε $y \in [c,d]$ το ολοκλήρωμα
$$J(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$
υπάρχει, τότε και το $\int_c^d J(y)\,dy$ υπάρχει και μάλιστα
$$\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f(x,y)\,dA.$$

3.1.2 Το ολοκλήρωμα σε γενικότερα χωρία

Θέτουμε το ερώτημα κατά πόσον μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα συνάρτησης ορισμένης σε γενικότερο, και όχι κατ΄ ανάγκη ορθογώνιο, χωρίο. Προς αυτή τη κατεύθυνση θεωρούμε μια ειδική κατηγορία χωρίων του xy-επιπέδου. Ας υποθέσουμε ότι το D είναι ένα φραγμένο χωρίο και το σύνορό του είναι ένωση πεπερασμένου πλήθους γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων $y = \phi(x)$ ή/και $x = \psi(y)$. Τότε αφενός το D περιέχεται σε κάποιο ορθογώνιο R, και αφετέρου αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο D, τότε η συνάρτηση
$$\tilde f(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y)\in D,\\ 0 & (x,y)\in R\setminus D,\end{cases} \tag{3.9}$$
σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1 είναι ολοκληρώσιμη στο R, κατά συνέπεια το ολοκλήρωμα
$$\iint_R \tilde f(x,y)\,dA$$

ορίζεται. Επειδή οι f και $\tilde{f}$ ταυτίζονται στο D και $\tilde{f} = 0$ εκτός του D είναι λογικό να ορίσουμε

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R \tilde{f}(x,y)\,dA. \tag{3.10}$$

Στη συνέχεια δείχνουμε πώς η (3.10) επιτρέπει για ειδικού τύπου χωρία τον υπολογισμό του ολοκληρώματος.

Ας υποθέσουμε ότι οι $y = \phi_1(x)$ και $y = \phi_2(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα $[a,b]$ και ότι $\phi_1(x) \le \phi_2(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Θεωρούμε στη συνέχεια το χωρίο

$$D = \{(x,y) : a \le x \le b, \text{ και } \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}.$$

Έστω ότι η f είναι συνεχής στο D και έστω $\tilde{f}$ να είναι όπως στην (3.9). Εάν $c < \min\{\phi_1(x) : a \le x \le b\}$ και $d > \max\{\phi_2(x) : a \le x \le b\}$, τότε $D \subseteq [a,b] \times [c,d] = R$, και

$$\begin{aligned}\iint_R \tilde{f}(x,y)\,dA &= \int_a^b \int_c^d \tilde{f}(x,y)\,dy\,dx \\ &= \int_a^b \Big[\int_c^{\phi_1(x)} 0\,dy + \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy + \int_{\phi_2(x)}^d 0\,dy\Big]\,dx \\ &= \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι $x = \psi_1(y)$ και $x = \psi_2(y)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα $[c,d]$ και ότι $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$ για κάθε $y \in [c,d]$. Θεωρούμε στη συνέχεια το χωρίο

$$D = \{(x,y) : c \le y \le d, \text{ και } \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}.$$

Έστω ότι η f είναι συνεχής στο D και έστω $\tilde{f}$ να είναι όπως στην (3.9). Εάν $a < \min\{\psi_1(y) : c \le y \le d\}$ και $b > \max\{\psi_2(y) : c \le y \le d\}$, τότε $D \subseteq [a,b] \times [c,d] = R$, και

$$\begin{aligned}\iint_R \tilde{f}(x,y)\,dA &= \int_c^d \int_a^b \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int_c^d \Big[\int_a^{\psi_1(x)} 0\,dx + \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,dx + \int_{\psi_2(x)}^b 0\,dx\Big]\,dy \\ &= \int_c^d \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,dx\,dy.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Ορισμός 3.2. Έστω D ένα φραγμένο χωρίο στο επίπεδο.

(1) Θα λέμε ότι το D είναι **χωρίο τύπου I** εάν

$$D = \{(x,y) : a \le x \le b, \text{ και } \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\},$$

όπου οι $y = \phi_1(x)$ και $y = \phi_2(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα $[a,b]$ και ότι $\phi_1(x) \le \phi_2(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$.

(2) Θα λέμε ότι το D είναι **χωρίο τύπου II** εάν

$$D = \{(x,y) : c \le y \le d, \text{ και } \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\},$$

όπου οι $x = \psi_1(y)$ και $x = \psi_2(y)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα $[c,d]$ και ότι $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$ για κάθε $y \in [c,d]$.

(3) Θα λέμε ότι το D είναι **χωρίο τύπου III** εάν είναι ταυτόχρονα χωρίο τύπου I και II.

(4) Ένα χωρίο τυπου I, ή II, ή III θα λέγεται **στοιχειώδες χωρίο**.

Δείξαμε λοιπόν ότι

Θεώρημα 3.6. *Έστω ότι η f είναι συνεχής στο στοιχειώδες χωρίο D.*

(1) *Εάν το D είναι τύπου I, $D = \{(x, y) : a \le x \le b,\ \text{και}\ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}$, τότε*

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

(2) *Εάν το D είναι τύπου II, $D = \{(x, y) : c \le y \le d,\ \text{και}\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$, τότε*

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Παρατήρηση 3.5. Εάν το D είναι στοιχειώδες χωρίο, έστω $D = \{(x, y) : a \le x \le b,\ \text{και}\ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}$, τότε για $f = 1$ έχουμε

$$\iint_D dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy\, dx = \int_a^b [\phi_2(x) - \phi_1(x)]\, dx = A(D),$$

όπου $A(D)$ είναι το εμβαδόν του D, όπως λογικά περιμένουμε.

Παράδειγμα 3.2. Έστω D το χωρίο στο επίπεδο το οποίο φράσσεται μεταξύ των καμπυλών $y = x^2$ και $y = \sqrt{8x}$.

(α΄) Να δειχτεί ότι το D είναι στοιχειώδες χωρίο.

(β΄) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_D x^2 y\, dA.$$

(α΄) Βρίσκουμε τα σημεία τομής των δύο καμπυλών. Έτσι λύνουμε την εξίσωση

$$x^2 = \sqrt{8x}, \quad x \ge 0 \Leftrightarrow x^4 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad x = 2.$$

Έτσι το φραγμένο χωρίο μεταξύ των $y = x^2$ και $y = \sqrt{8x}$ είναι αυτό για το οποίο $x \in [0, 2]$. Στο διάστημα αυτό είναι $x^2 \le \sqrt{8x}$, άρα μπορούμε να γράψουμε

$$D = \{(x, y) : 0 \le x \le 2 \text{ και } x^2 \le y \le \sqrt{8x}\},$$

κατά συνέπεια το D είναι χωρίο τύπου I, άρα είναι στοιχειώδες.

(β΄) Έτσι υπολογίζουμε

$$\iint_D x^2 y\, dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{\sqrt{8x}} x^2 y\, dy\, dx = \int_0^2 \frac{x^2 y^2}{2}\Bigg]_{y=x^2}^{\sqrt{8x}} dx = \int_0^2 \left(4x^3 - \frac{x^6}{2}\right) dx = \left[x^4 - \frac{x^7}{14}\right]_0^2 = \frac{48}{7}.$$

Παρατήρηση 3.6. Όσον αφορά στο χωρίο D του Παραδείγματος 3.2 οι ρόλοι των x και y στην περιγραφή του D μπορούν να εναλαγχθούν, βλέπε σχήμα. Κατ΄ αρχήν έχουμε τις αντιστοιχίες

$$y = x^2 \leftrightarrow x = \sqrt{y}, \qquad \text{και} \qquad y = \sqrt{8x} \leftrightarrow x = \frac{y^2}{8}.$$

Τα σημεία τομής των δύο καμπυλών είναι τα $(0,0)$ και $(2,4)$ και για $y \in [0,4]$ παρατηρούμε ότι $y^2/8 \le \sqrt{y}$, κατά συνέπεια μπορούμε να γράψουμε

$$D = \{(x,y) : 0 \le y \le 4 \text{ και } y^2/8 \le x \le \sqrt{y}\},$$

δηλαδή το D είναι και χωρίο τύπου II. Για το υπολογισμό του ολοκληρώματος έχουμε

$$\iint_D x^2 y\, dA = \int_0^4 \int_{y^2/8}^{\sqrt{y}} x^2 y\, dx\, dy = \int_0^4 \frac{x^3 y}{3}\Big]_{x=y^2/8}^{\sqrt{y}} dy = \int_0^4 \left(\frac{y^{5/2}}{3} - \frac{y^7}{3(8^3)}\right) dy = \left[\frac{2y^{7/2}}{(3)(7)} - \frac{y^8}{3(8^4)}\right]_0^4 = \frac{48}{7}.$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι

$$\iint_D x^2 y\, dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{\sqrt{8x}} x^2 y\, dy\, dx = \int_0^4 \int_{y^2/8}^{\sqrt{y}} x^2 y\, dx\, dy$$

Γενικεύοντας το αποτέλεσμα αυτό εχουμε το

Πόρισμα 3.1 (Αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης). *Εάν το D είναι χωρίο τύπου III και*

$$D \ni (x,y) : \begin{array}{l} a \le x \le b, \text{ και } \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x) \\ c \le y \le d, \text{ και } \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) \end{array}$$

τότε

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\, dx\, dy,$$

για κάθε συνάρτηση συνεχή στο D.

3.1.3 Αλλαγή μεταβλητών για διπλά ολοκληρώματα

Όπως στην περίπτωση της μιας μεταβλητής έτσι και στις δύο, ή και περισσότερες, ο υπολογισμός ενός ολοκοκληρώματος είναι ευκολώτερος χρησιμοποιώντας μεταβλητές διαφορετικές των αρχικών. Θυμίζουμε ότι στη μία μεταβλητή το σχετικό αποτέλεσμα εκφράζεται με τη σχέση

$$\int_a^b f(x(s))x'(s)\, ds = \int_{x(a)}^{x(b)} f(x)\, dx,$$

όπου η απεικόνιση $s \to x(s)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη. Θέλοντας να γενικεύσουμε τη σχέση αυτή σε περισσότερες διαστάσεις προσπαθούμε να καταλάβουμε, αν μη τι άλλο, τη "φιλοσοφία" που υπάρχει πίσω από την ισότητα των δύο ολοκληρωμάτων. Βλέπουμε λοιπόν ότι το $s \in [a,b] = I'$ απεικονίζεται μέσω της x στο $x(s) \in x(I') = I$. Αν υποθέσουμε ότι $f \ge 0$, το κάθε ολοκλήρωμα εκφράζει εμβαδόν. Αν το dA είναι το στοιχειώδες εμβαδόν, τότε στο μεν $x \in I$ είναι $dA = f(x)\, dx$, στο δε $x(s)$ με $s \in I'$ (εκπεφρασμένο δηλαδή ως προς τη μεταβλητή s) είναι $dA = f(x(s))x'(s)\, ds$.

Πολικές συντεταγμένες

Αν $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, θέτοντας $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ υπάρχει μοναδικό $\theta \in [0, 2\pi)$ το οποίο ορίζει την θέση του (x, y) στην περιφέρεια κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας r. Από το σχετικό ορθογώνιο τρίγωνο βρίσκουμε

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta, \qquad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \tag{3.13}$$

Οι συντεταγμένες (r, θ) λέγονται **πολικές συντεταγμένες**. Έτσι κάθε σημείο P μπορεί να εκφραστεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) και σε πολικές (r, θ). Παρατηρούμε ότι

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2$$

κατά συνέπεια

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{3.14}$$

Η (3.14) εκράζει την **πολική ακτίνα** σαν συνάρτηση των x και y, όπως η (3.13) εκφράζει το x και το y σαν συναρτήσεις των r και θ. Όμοια βλέπουμε ότι

$$\frac{y}{x} = \tan\theta$$

για $x \neq 0$.

Άσκηση 3.3. Δείξτε ότι η **πολική γωνία** θ σαν συνάρτηση των x και y δίνεται από τη σχέση

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) & x > 0 \quad y \geq 0, \\ \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi & x < 0, \\ \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) + 2\pi & x > 0 \quad y < 0, \end{cases} \tag{3.15}$$

όπου $-\pi/2 < \tan^{-1}(y/x) < \pi/2$. Αν $x = 0$, τότε $\theta = \pi/2$ αν $y > 0$ και $\theta = 3\pi/2$ αν $y < 0$. Αν $x = y = 0$ η πολική γωνία δεν ορίζεται.

Έστω ότι το $D' = \{(r, \theta) : \dots\}$ είναι ένα στοιχειώδες χωρίο το οποίο μετασχηματίζεται μέσω των $x(r, \theta)$, $y(r, \theta)$ στο $D = \{(x, y) : \dots\}$. Το στοιχειώδες εμβαδόν στο D στο (x, y) είναι $dA = dx\,dy$. Θέλοντας να εκφράσουμε το dA σε πολικές συντεταγμένες καλύπτουμε το D με ένα **πολικό πλέγμα**, δηλαδή με μια δέσμη πολικών ευθειών και ένα σύνολο κυκλικών τόξων, ομόκεντρων κύκλων με κέντρο την αρχή των αξόνων. Το πλέγμα αυτό δίνει μια διαμέριση του D αποτελούμενη από τμήματα κυκλικού τομέα γωνίας $\theta_j - \theta_{j-1}$ και μεταξύ των ακτίνων r_{i-1} και r_i. Αν συμβολίσουμε με ΔA_{ij} το εμβαδόν του αντίστοιχου τμήματος αυτού και θέσουμε $\Delta\theta_j$, και $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$, θα έχουμε[1]

$$\begin{aligned} \Delta A_{ij} &= \frac{1}{2} r_i^2\,\Delta\theta_j - \frac{1}{2} r_{i-1}^2\,\Delta\theta_j \\ &= \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})\Delta r_i\,\Delta\theta_j \\ &= r_i^*\,\Delta r_i\,\Delta\theta_j, \end{aligned}$$

[1] Το εμβαδόν A κυκλικού κυκλικού τομέα ακτίνας r και γωνίας θ είναι $A = r^2\theta/2$.

όπου $r_i^* = (r_i + r_{i-1})/2$. Έτσι το σχετικό άθροισμα Riemann, για μια συνάρτηση f συνεχή στο D θα είναι

$$\sum_j \sum_i f(x(r_i^*, \theta_j^*), y(r_i^*, \theta_j^*))\, \Delta A_{ij} = \sum_j \sum_i f(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \sin\theta_j^*)\, r_i^*\, \Delta r_i\, \Delta\theta_j.$$

Κατά συνέπεια περνώντας στο όριο συμπεραίνουμε[2] ότι

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

κατά συνέπεια

$$dA = r\, dr\, d\theta.$$

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα που επιβεβαιώνει ό,τι είπαμε.

Παράδειγμα 3.3. Να βρεθεί το εμβαδόν δίσκου ακτίνας R.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο δίσκος έχει κέντρο στο $(0,0)$. Η εξίσωση του κύκλου που αποτελεί το σύνορο του δίσκου είναι $x^2 + y^2 = R^2$. Έτσι ο δίσκος, έστω D, μπορεί να γραφεί σαν χωρίο τύπου I

$$D = \{(x,y) : -R \le x \le R,\ -\sqrt{R^2 - x^2} \le y \le \sqrt{R^2 - x^2}\}.$$

Έτσι έχουμε

$$A(D) = \iint_D dA = \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy\, dx = \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2}\, dx = \cdots = \pi R^2,$$

χρησιμοποιώντας κατάλληλες αντικαταστάσεις. Ο δίσκος D περιέχει όλα τα σημεία των οποίων η απόσταση από την αρχή των αξόνων είναι το πολύ R, έτσι σε πολικές συντεταγμένες έχουμε

$$D' = \{(r,\theta) : 0 \le r \le R,\ 0 \le \theta < 2\pi\},$$

επομένως

$$A(D) = \iint_{D'} dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} r\, d\theta\, dr = \int_0^R r\Big(\int_0^{2\pi} d\theta\Big) dr = 2\pi \int_0^R r\, dr = 2\pi \frac{r^2}{2}\Big]_0^R = \pi R^2.$$

Βλέπουμε ότι το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι ευκολώτερο να υπολογισθεί.

Παράδειγμα 3.4. Δείχνουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ συγκλίνει. Πράγματι επειδή $e^{-x^2} < e^{-x}$, για $x > 1$, έχουμε

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \int_0^1 e^{-x^2}\, dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \le A + \int_1^{+\infty} e^{-x}\, dx = A + [-e^{-x}]_1^{+\infty} = A + \frac{1}{e},$$

όπου $A = \int_0^1 e^{-x^2}\, dx$. Κατά συνέπεια, από συμμετρία, και το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ συγκλίνει. Έστω $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$, τότε

$$I^2 = \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\Big)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy\Big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \lim_{L\to+\infty} \int_{-L}^{L} \int_{-L}^{L} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

[2] Ο ισχυρισμός μπορεί να αποδειχθεί αυστηρά.

επειδή το διπλό ολοκλήρωμα υπάρχει. Αν με $D(0,R)$ συμβολίσουμε τον δίσκο κέντρου 0 και ακτίνας R θα έχουμε

$$\iint_{D(0,L)} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \le \int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \le \iint_{D(0,\sqrt{2}L)} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

κατά συνέπεια μπορούμε στο όριο αντί για τετραγωνικές περιοχές να πάρουμε κυκλικές, έτσι

$$I^2 = \lim_{R\to+\infty}\iint_{D(0,R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \lim_{R\to+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = 2\pi\lim_{R\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^R = \pi\lim_{R\to+\infty}\left(1-\frac{1}{e^{R^2}}\right) = \pi.$$

Έτσι τελικά είναι

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Το αποτέλεσμα που αφορά σε πολικές συντεταγμένες είναι ειδική περίπτωση ενός γενικού αποτελέσματος.

Το γενικό Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών

Στο επίπεδο το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{aligned} x &= g(u,v)\\ y &= h(u,v)\end{aligned}$$

όπου g και h είναι συναρτήσεις, ορίζουν ένα μετασχηματισμό $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ με τη σχέση

$$T(u,v) = (g(u,v), h(u,v)) = (x,y) \tag{3.16}$$

ο οποίος με τη σειρά του ορίζει μια αντιστοιχία μεταξύ σημείων του uv-επιπέδου και του xy-επιπέδου.

Ορισμός 3.3. Υποθέτοντας ότι οι μερικές παράγωγοι των g και h στην (3.16) υπάρχουν ορίζουμε την έκφραση

$$J_T := \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} := \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial h}{\partial u} & \dfrac{\partial h}{\partial v}\end{vmatrix} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial h}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial u}. \tag{3.17}$$

Την $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ ονομάζουμε **Ιακωβιανή ορίζουσα** (Jacobian determinant), ή απλά **Ιακωβιανή** των x και y, ως προς τις u και v. Την ορίζουσα αυτή τη λέμε και Ιακωβιανή του μετασχηματισμού T, όπου και ο συμβολισμός J_T.

Ορισμός 3.4. Θα λέμε ότι ο μετασχηματισμός T στην (3.16) είναι C^1 αν οι g και h είναι συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις, έχουν δηλαδή συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους.

Θεώρημα 3.7. *Έστω ότι τα D' και D είναι στοιχειώδη χωρία στα uv και xy επίπεδα αντίστοιχα. Έστω ότι η απεικόνιση $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ είναι ένας C^1 μετασχηματισμός του D' επί του D ο οποίος είναι επιπλέον ένα προς ένα εκτός ίσως από σημεία του συνόρου του D. Τότε για κάθε συνάρτηση f ολοκληρώσιμη στο D ισχύει*

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v))\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv,$$

όπου $|\partial(x, y)/\partial(u, v)|$ είναι η απόλυτη τιμή της Ιακωβιανής.

Παρατήρηση 3.7. Συνέπεια του Θεωρήματος 3.7 είναι ότι

$$dA = dx\,dy = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv$$

και στην περίπτωση των πολικών συντεταγμένων βρίσκουμε

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r,$$

οπότε

$$dA = r\,dr\,d\theta.$$

Βλέπουμε ότι για $r = 0$ η Ιακωβιανή είναι ίση με μηδέν, αλλα το γεγονός αυτό δεν εμποδίζει από το να εφαρμόζεται το Θεώρημα 3.7.

Παράδειγμα 3.5. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_R (x + y)\,dA$$

όπου R είναι το παραλληλόγραμμο το οποίο φράσσεται από τις ευθείες $x + y = -1$, $x + y = 3$, $2x - y = 0$ και $2x - y = 4$.

Θέτοντας

$$u = x + y \qquad v = 2x - y$$

βλέπουμε ότι $-1 \le u \le 3$ και $0 \le v \le 4$, κατά συνέπεια $R' = [-1, 3] \times [0, 4]$. Επιπλέον λύνοντας ως προς x και y βρίσκουμε

$$x = \frac{u + v}{3} \qquad y = \frac{2u - v}{3}.$$

Έτσι

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \begin{vmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{9} - \frac{2}{9} = -\frac{1}{3},$$

επομένως

$$\iint_R (x + y)\,dA = \int_{-1}^{3}\int_0^4 u\left|-\frac{1}{3}\right| dv\,du = \frac{1}{3}\left(\int_{-1}^{3} u\,du\right)\left(\int_0^4 dv\right) = \frac{16}{3}.$$

Άσκηση 3.4. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{1 + x + 2y}}$$

όπου $D = [0, 1] \times [0, 1]$ χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $x = u$ $y = v/2$. Ποιό είναι το D';

Άσκηση 3.5. Έστω D το χωρίο που φράσσεται από τις ευθείες $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$. Δείξτε ότι

$$\iint_D \cos\left(\frac{x - y}{x + y}\right) dx\,dy = \frac{\sin 1}{2}.$$

3.2 Τριπλά ολοκληρώματα

Έστω f μια φραγμένη συνάρτηση σε κάποιο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $B = [a,b]\times[c,d]\times[p,q]$. Θεωρούμε τις διαμερίσεις P_x, P_y και P_z

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{l-1} < x_l = b, \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d, \quad p = z_0 < z_1 < \cdots < z_{n-1} < z_n = q$$

των διαστημάτων $[a,b]$, $[c,d]$ και $[p,q]$ αντίστοιχα. Το $P = P_x \times P_y \times P_z$ το λέμε διαμέριση του B. Παρατηρούμε ότι τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα $B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$, με $i = 1, 2, \ldots, l$, $j = 1, 2, \ldots, m$ και $k = 1, 2, \ldots, n$ αποτελούν μια διαμέριση του B σε υποπαραλληλεπίπεδα. Αν θέσουμε $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, l$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, και $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ $k = 1, 2, \ldots, n$ τότε το $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \, \Delta y_j \, \Delta z_k$ είναι ο όγκος του B_{ijk}. Επιλέγοντας $(\xi_i, \zeta_j, \eta_k) \in B_{ijk}$ διαμορφώνουμε το (τριπλό) άθροισμα

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_i, \zeta_j, \eta_k) \, \Delta V_{ijk} \tag{3.18}$$

και θέτουμε

$$\|P\| = \max_{\substack{i=1,2,\ldots,l \\ j=1,2,\ldots,m \\ k=1,2,\ldots,n}} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2 + (\Delta z_k)^2}.$$

Εάν καθώς το πλήθος των σημείων l, m και n στην κάθε διαμέριση αυξάνει απεριόριστα ώστε $\|P\| \to 0$, το αντίστοιχο όριο

$$\lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_i, \zeta_j, \eta_k) \, \Delta V_{ijk}$$

υπάρχει, το συμβολίζουμε με

$$\iiint_B f(x,y,z) \, dV,$$

δηλαδή

$$\lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_i, \zeta_j, \eta_k) \, \Delta V_{ijk} = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_i, \zeta_j, \eta_k) \, \Delta V_{ijk} = \iiint_B f(x,y,z) \, dV$$

και το λέμε **τριπλό ολοκλήρωμα Riemann**, ή απλά **τριπλό ολοκλήρωμα** της f στο ορθογώνιο R.

Ορισμός 3.5. Αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη και φραγμένη σε κάποιο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο B για την οποία το τριπλό ολοκλήρωμα $\iiint_B f(x,y,z)\,dV$ υπάρχει θα λέγεται **ολοκληρώσιμη κατά Riemann**, ή απλά **ολοκληρώσιμη** στο B. Το άθροισμα στην (3.18) λέγεται **άθροισμα Riemann** της f για την διαμέριση P του B.

Παρατήρηση 3.8. Μια άμεση συνέπεια του ορισμού του ολοκληρώματος είναι ότι εάν $f(x,y,z) = k$ σε κάποιο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $B = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$, όπου k είναι μια σταθερά, τότε

$$\iiint_B f(x,y) \, dV = k(b-a)(d-c)(q-p) = kV(B),$$

αφού για κάθε διαμέριση του B το αντίστοιχο άθροισμα Riemann ισούται με $k(b-a)(d-c)(q-p) = V(B)$, όπου με $V(B)$ συμβολίζουμε το όγκο του B.

Θεώρημα 3.8. *Έστω ότι η f είναι μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη σ΄ ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο B.*

(1) *Εάν η f είναι συνεχής στο B, τότε είναι ολοκληρώσιμη στο B.*

(2) *Εάν η f είναι φραγμένη στο B και είναι συνεχής εκτός ίσως από τα σημεία που ανήκουν στην ένωση πεπερασμένου πλήθους γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων τα οποία περιέχονται στο B, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο B.*

Αν $B = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$ και η f είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο B τα σχετικά διαδοχικά ολοκληρώματα είναι τα

$$\int_a^b \int_c^d \int_p^q f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx, \quad \int_a^b \int_p^q \int_c^d f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx, \quad \int_p^q \int_a^b \int_c^d f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz,$$
$$\int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \quad \int_c^d \int_p^q \int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy, \quad \int_c^d \int_a^b \int_p^q f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$$

Θεώρημα 3.9 (Fubini). *Εάν η συνάρτηση $u = f(x,y,z)$ είναι συνεχής στο $B = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$, τότε τα έξι δυνατά διαδοχικά ολοκληρώματα είναι ίσα μεταξύ τους και οποιοδήποτε από αυτά είναι ίσο με το ολοκλήρωμα της f επάνω στο B*

$$\iiint_B f(x,y)\,dV.$$

Για τα τριπλά ολοκληρώματα ισχύουν οι ανάλογες ιδιότητες αυτών των διπλών ολοκληρωμάτων.

3.2.1 Το ολοκλήρωμα σε γενικότερα χωρία

Θέλοντας να επεκτείνουμε το ολοκλήρωμα σε γενικότερα σύνολα, σε αναλογία με το διπλό ολοκλήρωμα, υποθέτουμε ότι το E είναι ένα φραγμένο σύνολο στο $\mathbb{R}^3$ και ότι η f είναι μια συνάρτηση ορισμένη στο E. Αν B είναι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με $E \subseteq B$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\tilde{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & (x,y,z) \in E, \\ 0 & (x,y,z) \in B \setminus E. \end{cases} \tag{3.19}$$

Αν η $\tilde{f}$ είναι ολοκληρώσιμη στο B θα λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο E θα έχουμε ότι

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \iiint_B \tilde{f}(x,y,z)\,dV. \tag{3.20}$$

Θεώρημα 3.10. *Αν το σύνορο ενός $E \subset \mathbb{R}^3$ αποτελείται από την ένωση πεπερασμένου πλήθους γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων, τότε η $\tilde{f}$ είναι ολοκληρώσιμη άρα και η f.*

Ορισμός 3.6 (Στοιχειώδη χωρία).

(1) Έστω D ένα χωρίο τύπου I στο xy-επίπεδο. Θα λέμε ότι το $E \subset \mathbb{R}^3$ είναι **χωρίο τύπου I** στο $\mathbb{R}^3$ εάν

$$E = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, \text{ και } \chi_1(x,y) \le z \le \chi_2(x,y)\},$$

όπου οι $z = \chi_1(x,y)$ και $z = \chi_2(x,y)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο D και ότι $\chi_1(x,y) \le \chi_2(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in D$.

(2) Έστω D ένα χωρίο τύπου I στο yz-επίπεδο. Θα λέμε ότι το $E \subset \mathbb{R}^3$ είναι **χωρίο τύπου II** στο $\mathbb{R}^3$ εάν

$$E = \{(x, y, z) : (y, z) \in D, \text{ και } \chi_1(y, z) \le x \le \chi_2(y, z)\},$$

όπου οι $x = \chi_1(y, z)$ και $x = \chi_2(y, z)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο D και ότι $\chi_1(y, z) \le \chi_2(y, z)$ για κάθε $(y, z) \in D$.

(3) Έστω D ένα χωρίο τύπου I στο xz-επίπεδο. Θα λέμε ότι το $E \subset \mathbb{R}^3$ είναι **χωρίο τύπου III** στο $\mathbb{R}^3$ εάν

$$E = \{(x, y, z) : (x, z) \in D, \text{ και } \chi_1(x, z) \le y \le \chi_2(x, z)\},$$

όπου οι $y = \chi_1(x, z)$ και $y = \chi_2(x, z)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο D και ότι $\chi_1(x, z) \le \chi_2(x, z)$ για κάθε $(x, z) \in D$.

(4) Ένα σύνολο το οποίο είναι χωρίο τύπου I, II, και III, λέγεται **τύπου IV** στο $\mathbb{R}^3$.

Ένας κύβος ή ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο είναι χωρία τύπου IV. Ένα άλλο παράδειγμα χωρίου τύπου IV είναι η μπάλα $B(r) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \le r^2\}$.

Παρατηρούμε ότι αν το E είναι χωρίο τύπου 1 τότε μπορεί να περιγραφεί με έναν από τους δύο τρόπους που ακολουθούν

$$\begin{array}{llll} E: & a \le x \le b & \phi(x) \le y \le \phi(x) & \chi_1(x, y) \le \chi_2(x, y) \\ E: & c \le y \le d & \psi(y) \le x \le \psi(y) & \chi_1(x, y) \le \chi_2(x, y) \end{array}$$

όπου οι εμπλεκόμενες συναρτήσεις ϕ, ψ και χ είναι συνεχείς. Σε αναλογία με τα διπλά ολοκληρώματα έχουμε ότι

Θεώρημα 3.11. *Έστω ότι η f είναι συνεχής στο στοιχειώδες χωρίο E.*

(1) *Εάν το E είναι τύπου I, τότε*

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \int_{\chi_1(x,y)}^{\chi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dA = \iint_D F(x, y)\, dA, \qquad \text{όπου} \qquad F(x, y) = \int_{\chi_1(x,y)}^{\chi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz.$$

(2) *Εάν το D είναι τύπου II, τότε*

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \int_{\chi_1(y,z)}^{\chi_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx\, dA = \iint_D F(y, z)\, dA \qquad \text{όπου} \qquad F(y, z) = \int_{\chi_1(y,z)}^{\chi_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx.$$

(3) *Εάν το D είναι τύπου III, τότε*

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \int_{\chi_1(x,z)}^{\chi_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy\, dA = \iint_D F(x, z)\, dA \qquad \text{όπου} \qquad F(x, z) = \int_{\chi_1(x,z)}^{\chi_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy.$$

Παρατήρηση 3.9. Εάν το E είναι στοιχειώδες χωρίο και $f(x, y, z) = 1$, τότε

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iiint_E dV = V(E)$$

όπου $V(E)$ είναι ο όγκος του E.

Παράδειγμα 3.6. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\iiint_E x\,dV$$

όπου E είναι το φραγμένο χωρίο μεταξύ των επιπέδων $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ και της επιφάνειας $x + y + z = 2$.

Η επιφάνεια $x + y + z = 2$ είναι ένα επίπεδο το οποίο τέμνει τους άξονες στα σημεία $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ και $(0, 0, 2)$, κατά συνέπεια το E είναι το τετράεδρο με κορυφές τα σημεία $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$ και $(0, 0, 0)$. Η επιφάνεια $x + y + z = 2$ τέμνει το xy-επίπεδο κατά μήκος της ευθείας $x + y = 2$, κατά συνέπεια μπορούμε να γράψουμε

$$E = \{(x, y, z) : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2 - x,\ 0 \le z \le 2 - x - y\}.$$

Έτσι

$$\begin{aligned}
\iiint_E x\,dV &= \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} x\,dz\,dy\,dx \\
&= \int_0^2 \int_0^{2-x} x(2 - x - y)\,dy\,dx \\
&= \int_0^2 \left[x(2 - x)y - \frac{1}{2}xy^2\right]_0^{2-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x(2 - x)^2\,dx = \int_0^2 \left(2x - 2x^2 + \frac{1}{2}x^3\right) dx \\
&= \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4\right]_0^2 = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.7. Έστω E το χωρίο στο χώρο το οποίο βρίσκεται μεταξύ των επιφανειών $z = x^2 + y^2$ και $z = 4$. Να υπολογισθεί ο όγκος του E.

Οι δύο επιφάνειες τέμνονται στο επίπεδο $z = 4$ κατά μήκος της περιφέρειας $x^2 + y^2 = 4$. Έτσι αν (x, y, z) είναι σημείο του E, τότε $x^2 + y^2 \le 4$ και $x^2 + y^2 \le z \le 4$. Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$E = \{(x, y, z) : -2 \le x \le 2,\ -\sqrt{4 - x^2} \le y \le \sqrt{4 - x^2} \text{ και } x^2 + y^2 \le z \le 4\},$$

εκφράζοντας έτσι το E σαν χωρίο τύπου I. Κατά συνέπεια υπολογίζουμε

$$V(E) = \iiint_E dV = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^4 dz\,dy\,dx = 4\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^4 dz\,dy\,dx$$

από συμμετρία. Έτσι

$$\begin{aligned}
V(E) &= 4\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^4 dz\,dy\,dx \\
&= 4\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - y^2)\,dy\,dx.
\end{aligned}$$

Στο σημείο αυτό χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες[3]. Το χωρίο πάνω στο οποίο ολοκληρώνουμε είναι το τμήμα του δίσκου κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας 2 στο πρώτο τεταρτημόριο, κατά συνέπεια το διπλό ολοκλήρωμα

[3] Αν συνεχίσουμε τον υπολογισμό σε καρτεσιανές συντεταγμένες θα βρούμε, υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα ως προς y, ότι

$$V(E) = \frac{8}{3}\int_0^2 (4 - x^2)^{3/2}\,dx$$

και στη συνέχεια θα χρειαστούμε τριγωνομετρική αντικατάσταση.

μετασχηματίζεται στο

$$\begin{aligned} V(E) &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^2 (4-r^2)\,r\,dr\,d\theta \\ &= 2\pi\int_0^2 (4r-r^3)\,dr \\ &= 2\pi\Big[2r^2-\frac{r^4}{4}\Big]_0^2 = 8\pi. \end{aligned}$$

3.2.2 Αλλαγή μεταβλητών για τριπλά ολοκληρώματα

Όπως στη περίπτωση των διπλών ολοκληρωμάτων έτσι και στα τριπλά μια κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών απλοποιεί κατά πολύ τους υπολογισμούς.

Το γενικό Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών

Ένας μετασχηματισμός από τον uvw-χώρο στον xyz-χώρο ορίζεται από εξισώσεις

$$\begin{aligned} x &= x(u,v,w)\\ y &= y(u,v,w)\\ z &= z(u,v,w). \end{aligned}$$

Όπως στις δύο διαστάσεις, γενικεύοντας, ορίζουμε την **Ιακωβιανή ορίζουσα** του μετασχηματισμού με τη σχέση[4]

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} := \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial(y,z)}{\partial(v,w)} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,w)} + \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}. \tag{3.21}$$

Σημειώνουμε ότι η $\partial(y,z)/\partial(r,s)$ είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα δεύτερης τάξης

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(r,s)} = \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial r}.$$

Θεώρημα 3.12. *Έστω ότι τα E' και E είναι στοιχειώδη χωρία στους χώρους uvw και xyz αντίστοιχα. Έστω ότι η απεικόνιση $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$ είναι ένας C^1 μετασχηματισμός του E' επί του E ο οποίος είναι επιπλέον ένα προς ένα εκτός ίσως από σημεία του συνόρου του E. Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο E, τότε*

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{E'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$$

[4] Η ορίζουσα τρίτης τάξης υπολογίζεται μέσω οριζουσών δεύτερης τάξης με τη σχέση

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}, \qquad \text{όπου} \qquad \begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix} = ad-bc.$$

όπου $|\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)|$ *είναι η απόλυτη τιμή της Ιακωβιανής.*

Παρατήρηση 3.10. Συνέπεια του Θεωρήματος 3.12 είναι ότι

$$dV = dx\,dy\,dz = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| du\,dv\,dw.$$

3.2.3 Κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες

Μεταξύ των πολλών συστημάτων συντεταγμένων που χρησιμοποιούνται στις διάφορες εφαρμογές ξεχωριστή θέση κατέχουν οι κυλινδρικές και οι σφαιρικές συντεταγμένες.

Κυλινδρικές συντεταγμένες

Αν $P(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, τότε μπορούμε να φανταστούμε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται επάνω στον κυκλικό κύλινδρο $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$. Συγκεκριμένα αν r_0 και θ_0 είναι οι πολικές συντεταγμένες του σημείου $(x_0, y_0, 0)$ το σημείο P περιφράφεται μοναδικά από τις συντεταγμένες (r, θ, z_0).

Οι **κυλινδρικές συντεταγμένες** είναι (r, θ, z) με $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ και $-\infty < z < +\infty$, ώστε

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z. \tag{3.22}$$

Η Ιακωβιανή ορίζουσα σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \tag{3.23}$$

κατά συνέπεια ο στοιχειώδης όγκος στις συντεταγμένες αυτές είναι

$$dV = r\,dr\,d\theta\,dz.$$

Σφαιρικές συντεταγμένες

Το σημείο $P(x, y, z)$ περιέχεται στη μοναδική σφαίρα κέντρου $(0, 0, 0)$ και ακτίνας $\rho = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Συγκεκριμένα αν θ είναι η πολική γωνία του $(x, y, 0)$ το P βρίσκεται επάνω στην ημιπεριφέρεια η οποία είναι η τομή της σφαίρας με το ημιεπίπεδο που σχηματίζει γωνία θ με το θετικό xz-ημιεπίπεδο. Η θέση του P επάνω σε αυτή την ημιπεριφέρεια δίνεται από την γωνία ϕ που σχηματίζει η ακτίνα από το κέντρο της σφαίρας στο P με τον z-άξονα.

Οι **σφαιρικές συντεταγμένες** είναι οι (ρ, θ, ϕ) με $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ και $0 \leq \phi \leq \pi$, όπου

$$x = \rho\cos\theta\sin\phi, \qquad y = \rho\sin\theta\sin\phi, \qquad z = \rho\cos\phi. \tag{3.24}$$

Η Ιακωβιανή ορίζουσα σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{vmatrix} = -\rho^2\sin\phi \tag{3.25}$$

κατά συνέπεια ο στοιχειώδης όγκος στις συντεταγμένες αυτές είναι

$$dV = \rho^2\,\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi.$$

Παράδειγμα 3.8. Να βρεθεί ο όγκος μπάλας ακτίνας R.

Αν $B(R)$ είναι η μπάλα κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας R και $D(R)$ είναι ο δίσκος κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας R στο xy-επίπεδο, τότε

$$B(R) = \Big\{(x,y,z) : (x,y) \in D(R) \text{ και } -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \le z \le \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\Big\},$$

έτσι ο όγκος $V(B(R))$ είναι

(I) Σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$V(B(R)) = \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx = \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dy\, dx = \dots$$

(II) Σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$V(B(R)) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^R 2r\sqrt{R^2 - r^2}\, dr = 2\pi \int_0^{R^2} \sqrt{s}\, ds = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

(III) Σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$V(B(R)) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = 2\pi \Big(\int_0^R \rho^2\, d\rho\Big)\Big(\int_0^{\pi} \sin\phi\, d\phi\Big) = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

Παράδειγμα 3.9. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που φράσσεται μεταξύ των επιφανειών της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ και του κυκλικού κώνου $z = (3x^2 + 3y^2)^{1/2}$, όπου $R > 0$.

Η τομή των δύο επιφανειών συμβαίνει για $z > 0$ ώστε

$$z^2 = R^2 - (x^2 + y^2) = 3(x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \Big(\frac{R}{2}\Big)^2 \quad \text{και} \quad z = \frac{\sqrt{3}R}{2}$$

κατά συνέπεια οι δύο επιφάνειες τέμνονται κατά μήκος της περιφέρειας $x^2 + y^2 = (R/2)^2$ στο επίπεδο $z = \sqrt{3}R/2$. Έτσι το στερεό περιέχεται στο εσωτερικό του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = (R/2)^2$, όπότε αν $D(R/2)$ είναι ο δίσκος κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας $R/2$, τότε το σημείο (x,y,z) του στερεού E είναι τέτοιο ώστε $(x,y) \in D(R/2)$ και $(3x^2+3y^2)^{1/2} \le z \le (R^2 - (x^2+y^2))^{1/2}$, δηλαδή το z "ξεκινάει" από τον κώνο και "καταλήγει" στη σφαίρα. Επιλέγοντας κυλινδρικές συντεταγμένες έχουμε

$$E = \Big\{(r,\theta,z) : 0 \le r \le R/2,\ 0 \le \theta < 2\pi,\ \sqrt{3}r \le z \le \sqrt{R^2 - r^2}\Big\}.$$

Έτσι

$$\begin{aligned}
V(E) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{R/2} \int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{R^2-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{R/2} (\sqrt{R^2 - r^2} - \sqrt{3}r)\, r\, dr\, d\theta \\
&= 2\pi \int_0^{R/2} (r\sqrt{R^2 - r^2} - \sqrt{3}r^2)\, dr \\
&= 2\pi \Big[-\frac{1}{3}(R^2 - r^2)^{3/2} - \frac{\sqrt{3}}{3} r^3\Big]_0^{R/2} = \frac{2\pi R^3}{3}\Big(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\Big).
\end{aligned}$$

Άσκηση 3.6. Θεωρήστε το στερεό του Παραδείγματος 3.9. Γράψτε πρώτα ένα τριπλό ολοκλήρωμα σε καρτεσιανές συντεταγμένες που δίνει τον όγκο του στερεού, και έπειτα γράψτε το ανάλογο ολοκλήρωμα σε σφαιρικές συντεταγμένες.

3.2.4 Παράρτημα: Ορίζουσες

Στον υπολογισμό της ορίζουσας τρίτης τάξης

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \qquad \text{όπου} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

βλέπουμε ότι αυτή εκφράζεται σαν γραμμικός συνδυασμός υποοριζουσών με συντελεστές τα στοιχεία της πρώτης γραμμής. Αντί της πρώτης γραμμής μπορεί το ανάπτυγμα να γίνει ως προς οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη, παίρνοντας όμως υπόψη τη διάταξη των προσήμων. Το πρόσημο εξαρτάται από τη θέση του στοιχείου, τη γραμμή και τη στήλη οι οποίες το περιέχουν, και είναι $(-1)^{i+j}$, όπου i είναι η γραμμή και j η στήλη. Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Επίσης η κάθε υποορίζουσα είναι αυτή που προκύπτει αν διαγράψουμε από την αρχική τη γραμμή και τη στήλη που περιέχει το στοιχείο με το οποίο πολλαπλασιάζεται η υποορίζουσα. Για παράδειγμα αν αναπτύξουμε ως προς τη δεύτερη στήλη θα έχουμε

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+2} a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= -a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Συστηματική μελέτη των οριζουσών γίνεται στη Γραμμική Άλγεβρα. Ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα σχετικό με ορίζουσες αφορά στην ύπαρξη του αντίστροφου τετραγωνικού μητρώου. Αν $A = (a_{ij})$ είναι ένα τετραγωνικό μητρώο με $|A| = |a_{ij}|$ συμβολίζουμε την ορίζουσα του A. Αποδεικνύεται ότι το A έχει αντίστροφο αν και μόνο αν $|A| \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A},$$

όπου το μητρώο $\tilde{A}$ προκύπτει από το A με κάποια συγκεκριμένη διαδικασία. Σχετικό με το παραπάνω είναι το αποτέλεσμα ότι για το σύστημα

$$\begin{aligned} ax + by &= r \\ cx + dy &= s \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix},$$

αν

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0,$$

τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{\begin{vmatrix} r & b \\ s & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & r \\ c & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

Από τη μορφή της λύσης φαίνεται ότι ισχύει και το αντίσροφο, δηλαδή αν το σύστημα έχει μοναδική λύση, τότε η ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος είναι διάφορη του 0.

Άσκηση 3.7. Υπολογίστε την Ιακωβιανή ορίζουσα σε κυλινδρικές και σε σφαιρικές συντεταγμένες.

Κεφάλαιο 4

Διανύσματα

4.1 Διανύσματα

Σε αντίθεση με τα **βαθμωτά** μεγέθη, όπως είναι, για παράδειγμα, το μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος ή η μάζα ενός σώματος, υπάρχουν μεγέθη τα οποία χαρακτηρίζονται από μήκος και κατεύθυνση. Ένα τέτοιο μέγεθος είναι η δύναμη που δρα επάνω σ΄ ένα σώμα, όπως για παράδειγμα το βάρος του, ή η ταχύτητα ενός σημείου ή σώματος το οποίο κινήται στο χώρο, πόσο γρήγορα δηλαδή αλλάζει θέση και προς ποια κατεύθυνση. Τα μεγέθη αυτά τα λέμε **διανυσματικά** και τα παριστάνουμε με **διανύσματα**. Ένας τρόπος να παραστήσουμε γεωμετρικά–γραφικά ένα διάνυσμα είναι σαν ένα ευθύγραμμο τμήμα με κατεύθυνση, έτσι αν P και Q είναι δύο σημεία, ένα διάνυσμα με αρχικό σημείο το P και τελικό το Q το συμβολίζουμε με $\overrightarrow{PQ}$ και το αποδίδουμε γραφικά με το ευθύγραμμο τμήμα PQ και την κατάληξη της αιχμής ενός βέλους στο Q. Είναι πρακτικά χρήσιμο να θεωρούμε δύο διανύσματα **ίσα** αν έχουν το ίδιο μήκος, σαν ευθύγραμμα τμήματα, και την ίδια κατεύθυνση, κατά συνέπεια ένα διάνυσμα δεν αλλάζει αν μετακινήται κατά τρόπο παράλληλο. Σύμφωνα με αυτή την παραδοχή μπορούμε να ορίσουμε σαν διάνυσμα, στο $\mathbb{R}^3$ για παράδειγμα, ένα κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα με αρχικό σημείο την αρχή των αξόνων. Στη συνέχεια αυτά τα διανύσματα θα τα συμβολίζουμε με παχειά γράμματα $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\ldots, \boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\ldots$. Αν ένα διάνυσμα $\mathbf{v}$ καταλήγει στο σημείο $(x, y, x) \in \mathbb{R}^3$ μπορούμε να φανταζόμαστε το $\mathbf{v}$ σαν ένα βέλος με αρχή το $(0, 0, 0)$ και πέρας το (x, y, z). Στη περίπτωση αυτή γράφουμε

$$\mathbf{v} = \langle x, y, z \rangle.$$

Παρόμοια στο $\mathbb{R}^2$ και γενικά στο $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, μπορούμε να γράφουμε, αντίστοιχα

$$\mathbf{v} = \langle x, y \rangle \qquad \mathbf{v} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle.$$

Ορισμός 4.1. Εάν $\mathbf{v} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ τις x_1, x_2, x_3 τις λέμε **συνιστώσες** του διανύσματος $\mathbf{v}$. Το $\langle 0, 0, 0 \rangle$ θα το λέμε **μηδενικό διάνυσμα** στο $\mathbb{R}^3$ και θα το συμβολίζουμε με $\mathbf{0}$. Θα λέμε ότι τα διανύσματα $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ και $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ είναι **ίσα** αν και μόνο αν $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ και $u_3 = v_3$. Ορίζουμε το **μέτρο** του $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ να είναι ο μη αρνητικός αριθμός

$$|\mathbf{u}| := \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Ορισμός 4.2. Στο $\mathbb{R}^3$ ορίζουμε την πράξη της πρόσθεσης μεταξύ διανυσμάτων και τον πολλαπλασιασμό διανύσματος με πραγματικό αριθμό. Εάν $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ και $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ είναι δύο διανύσματα στο $\mathbb{R}^3$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

(1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3 \rangle$.
Το διάνυσμα $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ λέμε **άθροισμα** των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$. Παρατηρούμε ότι $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.

(2) $\lambda \mathbf{u} = \langle \lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3 \rangle$.

Ορίζουμε το **αντίθετο διάνυσμα** του $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ να είναι το διάνυσμα $-\mathbf{u} = \langle -u_1, -u_2, -u_3 \rangle$, και παρατηρούμε ότι

$$-\mathbf{u} + \mathbf{u} = \langle -u_1 + u_1, -u_2 + u_2, -u_3 + u_3 \rangle = \mathbf{0}.$$

Το διάνυσμα $\mathbf{u} + (-\mathbf{v})$ το λέμε **διαφορά** των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ και το γράφουμε σαν $\mathbf{u} - \mathbf{v}$. Ανάλογα αποτελέσματα και ορισμοί ισχύουν και στη γενική περίπτωση $\mathbb{R}^n$.

Πρόταση 4.1 (Ιδιότητες των διανυσμάτων). *Εάν* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *και* $\mathbf{w}$ *είναι διανύσματα, και* λ *και* μ *είναι σταθερές, τότε ισχύουν οι νόμοι*

(1) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

(2) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$

(3) $\lambda(\mu \mathbf{u}) = (\lambda\mu)\mathbf{u}$

(4) $(\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{u}$

(5) $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}$

(6) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Απόδειξη. Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση. □

Παρατήρηση 4.1. Παρατηρούμε ότι $|\mathbf{u}| = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Επίσης αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, τότε

$$|\lambda \mathbf{u}| = \sqrt{(\lambda u_1)^2 + (\lambda u_2)^2 + (\lambda u_3)^2} = |\lambda| \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = |\lambda||\mathbf{u}|,$$

όπου $|\lambda|$ είναι η απόλυτη τιμή του λ. Για να μη προκαλείται σύγχυση, αν και δεν θα έπρεπε, πολλές φορές γράφουμε $\|\mathbf{u}\|$ για το μέτρο του διανύσματος $\mathbf{u}$.

Ορισμός 4.3. Ένα διάνσμα $\mathbf{u}$ λέγεται **μοναδιαίο** αν $|\mathbf{u}| = 1$.

Αν το $\mathbf{u}$ είναι μη μηδενικό διάνυσμα, τότε το διάνυσμα $(1/|\mathbf{u}|)\mathbf{u}$ είναι μοναδιαίο, αφού

$$\left| \frac{1}{|\mathbf{u}|}\mathbf{u} \right| = \frac{1}{|\mathbf{u}|}|\mathbf{u}| = 1.$$

Το μοναδιαίο αυτό διάνυσμα το γράφουμε και σαν $\mathbf{u}/|\mathbf{u}|$.

Ορισμός 4.4. Στο $\mathbb{R}^3$ ορίζουμε τα μοναδιαία διανύσματα

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle \qquad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle.$$

Παρατηρούμε ότι αν $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, από τις ιδιότητες των πράξεων έπεται ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \langle u_1, 0, 0 \rangle + \langle 0, u_2, 0 \rangle + \langle 0, 0, u_3 \rangle \\ &= u_1 \langle 1, 0, 0 \rangle + u_2 \langle 0, 1, 0 \rangle + u_3 \langle 0, 0, 1 \rangle \\ &= u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια κάθε διάνυσμα στο $\mathbb{R}^3$ εκφράζεται μέσω των $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$, ισοδύναμα, για κάθε διάνυσμα $\mathbf{v}$ στο $\mathbb{R}^3$ υπάρχουν σταθερές a, b και c, ώστε

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}. \tag{4.1}$$

Η έκφραση στο δεξί μέλος της (4.1) λέγεται **γραμμικός συνδιασμός** των $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$.

4.2 Διανύσματα και ευθείες

Αν $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$ είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα, τότε η εξίσωση

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{u}, \qquad t \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

είναι ευθεία στο $\mathbb{R}^3$, συγκεκριμένα είναι η ευθεία η οποία περιέχει το $\mathbf{u}$. Παρατηρούμε ότι $\mathbf{r}(1) = \mathbf{u}$ και $\mathbf{r}(-1) = -\mathbf{u}$. Αν $\mathbf{u_1} = \mathbf{r}(t_1)$ και $\mathbf{u_2} = \mathbf{r}(t_2)$ με $t_1 < t_2$ δείχνουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα, στο $\mathbb{R}^3$, με άκρα τα σημεία $P(t_1 a, t_1 b, t_1 c)$ και $Q(t_2 a, t_2 b, t_2 c)$ περιγράφεται από την $\mathbf{r}(t)$. Πράγματι το ευθύγραμμο τμήμα $[t_1, t_2]$ περιγράφεται από τη σχέση $(1-s)t_1 + st_2$, με $0 \leq s \leq 1$. Αν $t_S = (1-s)t_1 + st_2$, τότε

$$\mathbf{r}(t_s) = t_s \mathbf{u} = ((1-s)t_1 + st_2)\mathbf{u} = (1-s)t_1 \mathbf{u} + st_2 \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{r}(t_s) = (1-s)\mathbf{u_1} + s\mathbf{u_2}.$$

Έτσι για κάθε $s \in [0, 1]$ το $\mathbf{r}(t_s)$ περιέχεται στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα P και Q. Καθώς τώρα το s διατρέχει το $\mathbb{R}$, το $\mathbf{r}(t_s)$ διατρέχει την ευθεία που ορίζουν τα σημεία P και Q.

Παρατήρηση 4.2 (Γεωμετρική-Αλγεβρική). Θεωρούμε το διάνυσμα $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$ και το σημείο $P(x_0, y_0, z_0)$. Αν Q είναι το σημείο $Q(a + x_0, b + y_0, c + z_0)$, τότε το $\overrightarrow{PQ}$ είναι μια **αναπαράσταση** του $\mathbf{u}$, είναι δηλαδή παράλληλο με το $\mathbf{u}$ και έχει το ίδιο μέτρο με αυτό.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι αν O είναι η αρχή των αξόνων και $R = R(a, b, c)$, τότε το $OPQR$ είναι παραλληλόγραμμο. Έστω $\mathbf{v} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ και έστω $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle a + x_0, b + y_0, c + z_0 \rangle$, τότε το $\overrightarrow{OQ}$ είναι μια αναπαράσταση του $\mathbf{w}$.

Αν το $P(x_0, y_0, z_0)$ ανήκει στην ευθεία που περιέχει το $\mathbf{u}$, τότε για κάποιο $t \in \mathbb{R}$ είναι

$$\mathbf{v} = t\mathbf{u} \Leftrightarrow x_0 = ta, \ y_0 = tb, \ z_0 = tc. \tag{4.3}$$

Έτσι

$$\overrightarrow{OQ} = \langle (1+t)a, (1+t)b, (1+t)c \rangle = (1+t)\mathbf{u}$$

κατά συνέπεια τα σημεία O, R, P και Q είναι συνευθειακά. Επιπλέον

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{((1+t)a - x_0)^2 + ((1+t)b - y_0)^2 + ((1+t)c - z_0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = |\mathbf{u}|,$$

ένεκα της (4.3), απ' όπου έπεται το συμπέρασμα.

Αν το $P(x_0, y_0, z_0)$ δεν ανήκει στην ευθεία που περιέχει το $\mathbf{u}$, τότε τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ ορίζουν μοναδικό επίπεδο το οποίο τα περιέχει[1]. Στο επίπεδο αυτό θεωρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων ξ και ζ και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να πάρουμε τον ξ-άξονα να περιέχει το $\mathbf{u}$. Στο $\xi\zeta$-επίπεδο θα είναι $\mathbf{u} = \langle u_\xi, 0\rangle$ και $\mathbf{v} = \langle v_\xi, v_\zeta\rangle$, οπότε $\mathbf{w} = \langle u_\xi + v_\xi, v_\zeta\rangle$. Από το σχήμα προκύπτει ότι το $\overrightarrow{RQ}$ παριστάνει το $\mathbf{v}$, οπότε το $ORQP$ είναι παραλληλόγραμμο. □

Συμπέρασμα: Αν $P(x_1, y_1, z_1)$ και $Q(x_2, y_2, z_2)$ είναι δύο σημεία το διάνυσμα $\mathbf{a}$ με αναπαράσταση $\overrightarrow{PQ}$ είναι το $\mathbf{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$.

Παρατηρούμε ότι το $\overrightarrow{PQ}$ αναπαριστά το $\langle a - x_0, b - y_0, c - z_0\rangle = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι το παραλληλόγραμμο που παράγουν τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ έχει διαγωνίους τα $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ και $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.

4.2.1 Η εξίσωση της ευθείας

Το πρόβλημα: Έστω $\mathbf{u} = \langle a, b, c\rangle$ ένα διάνυσμα και $P(x_0, y_0, z_0)$ ένα σημείο στο χώρο. Μας ενδιαφέρει να περιγράψουμε την ευθεία η οποία περιέχει το (x_0, y_0, z_0) και είναι παράλληλη στο $\mathbf{u}$.

Εάν το $P(x_0, y_0, z_0)$ περιέχεται στην ευθεία που ορίζει το διάνυσμα $\mathbf{u}$, τότε η ζητούμενη ευθεία δίνεται από την (4.2). Θεωρούμε λοιπόν την περίπτωση όπου το $P(x_0, y_0, z_0)$ δεν είναι σημείο της ευθείας που ορίζει το $\mathbf{u}$. Εάν $Q(x, y, z)$ είναι τυχαίο σημείο της ζητούμενης ευθείας το $\overrightarrow{PQ}$ είναι μια αναπαράσταση για το $\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle$, το οποίο περιέχεται στη ίδια ευθεία με το $\mathbf{u}$, κατά συνέπεια θα είναι $\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = t\mathbf{u}$, για κάποια πραγματική σταθερά, ισοδύναμα

$$x = at + x_0, \qquad y = bt + y_0, \qquad z = ct + z_0, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Η (4.4) δίνει την εξίσωση της ζητούμενης ευθείας σε παραμετρική μορφή. Η εξίσωση μπορεί να γραφεί επίσης στη μορφή

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}. \tag{4.5}$$

Σε αναλογία με την (4.2) αν $\mathbf{r}(t) = \langle x, y, z\rangle$ μπορούμε να γράψουμε την (4.4) στη μορφή

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r_0} + t\mathbf{u}, \tag{4.6}$$

όπου $\mathbf{r_0} = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$. Το διάνυσμα $\mathbf{r}(t)$ στις (4.2) και (4.6) δίνει τη θέση (x, y, z) τη "στιγμή" t και για τον λόγο αυτό το λέμε **διάνυσμα θέσης**.

Άσκηση 4.1. Εξετάστε αν οι ευθείες με εξισώσεις

$$\mathbf{r_1}(t) = \langle 1, 0, 1\rangle + t\langle 2, -1, 3\rangle$$
$$\mathbf{r_2}(t) = \langle 3, -1, 2\rangle + t\langle -2, 1, -2\rangle$$

τέμνονται. Σημειώνουμε ότι οι δύο ευθείες τέμνονται αν υπάρχει σημείο (x_0, y_0, z_0) το οποίο περιέχουν και οι δύο. Εξετάζουμε λοιπόν αν υπάρχουν "στιγμές" t_1 και t_2 όπου οι "τροχιές" $\{\mathbf{r_1}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ και $\{\mathbf{r_2}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ διασταυρώνονται, δηλαδή $\mathbf{r_1}(t_1) = \mathbf{r_2}(t_2)$.

[1] Στη γλώσσα της Γραμμικής Άλγεβρας το επίπεδο αυτό είναι ο υπόχωρος ο οποίος παράγεται από τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$.

Άσκηση 4.2. Δείξτε ότι οι εξισώσεις

$$\mathbf{r_1}(t) = \langle 11, 11, -2\rangle + t\langle 4, 6, -3\rangle$$
$$\mathbf{r_2}(t) = \langle 3, -1, 4\rangle + t\langle 8, 12, -6\rangle$$

παριστάνουν την ίδια ευθεία. **Υπόδειξη:** Υπάρχουν περισσότεροι του ενός τρόποι να δειχθεί το ζητούμενο, παρατηρήστε για παράδειγμα ότι οι δύο ευθείες είναι παράλληλες στο ίδιο διάνυσμα.

4.3 Το στικτό ή βαθμωτό γινόμενο

Ορισμός 4.5. Εάν $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ και $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ είναι δύο διανύσματα στο $\mathbb{R}^3$ ορίζουμε το **στικτό ή βαθμωτό γινόμενο** των **u** και **v** με τη σχέση

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Το στικτό ή βαθμωτό γινόμενο λέγεται και **εσωτερικό γινόμενο**.

Πρόταση 4.2. *Άμεση συνέπεια του ορισμού του βαθμωτού γινομένου είναι οι ιδιότητες*

(1) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$

(2) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$

(3) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$

(4) $\lambda(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = (\lambda\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot(\lambda\mathbf{v})$, *για κάθε σταθερά* λ

(5) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0$.

Απόδειξη. Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση. □

Παρατήρηση 4.3 (Γεωμετρική). Δύο διανύσματα $\mathbf{u} = \langle x, y, z\rangle$ και $\mathbf{v} = \langle x', y', z'\rangle$ τα οποία δεν περιέχονται στην ίδια ευθεία, ορίζουν μοναδικό επίπεδο στο $\mathbb{R}^3$, αυτό που περιέχει τα σημεία $O(0,0,0)$, $P(x,y,z)$ και $Q(x',y',z')$. Το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία O, P, Q έχει μήκη πλευρών $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$ και $|\mathbf{u}-\mathbf{v}|$ (γιατί;). Ορίζουμε σαν **γωνία μεταξύ των διανυσμάτων u** και **v** την γωνία $\widehat{POQ}$. Έτσι αν θ είναι η γωνία μεταξύ των **u** και **v**, τότε $0 \le \theta \le \pi$.

Θεώρημα 4.1. *Εάν θ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων* **u** *και* **v**, *τότε*

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta.$$

Παρατηρούμε ότι αν η γωνία θ μεταξύ δύο μη μηδενικών διανυσμάτων **u** και **v** είναι $\theta = \pi/2$, τότε $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$. Δύο τέτοια διανύσματα είναι **κάθετα**, ή **ορθογώνια** μεταξύ τους. Θεωρώντας ότι το μηδενικό διάνυσμα είναι ορθογώνιο σε κάθε διάνυσμα, έχουμε

Πρόταση 4.3. *Τα διανύσματα* **u** *και* **v** *είναι ορθογώνια μεταξύ τους αν και μόνο αν* $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.

Αν τα διανύσματα **u** και **v** είναι ορθογώνια μεταξύ τους θα γράφουμε $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$. Έτσι το αποτέλεσμα της Πρότασης 4.3 επαναδιατυπώνεται ως εξής: $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Θεώρημα 4.2 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz). *Εάν* **u** *και* **v** *είναι διανύσματα τότε*

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|. \tag{4.7}$$

Η ισότητα ισχύει στην (4.7) *αν και μόνο αν τα διανύσματα είναι συνευθειακά.*

Στην (4.7) γράψαμε $\|\cdot\|$ για το μέτρο του διανύσματος για να το διαχωρίσουμε από την απόλυτη τιμή στο αριστερό μέλος.

Απόδειξη. Αν ένα τουλάχιστον από τα διανύσματα είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε και τα δύο μέλη της (4.7) είναι ίσα με μηδέν άρα ισχύει η ισότητα και προφανώς τα διανύσματα είναι συνευθειακά. Υποθέτουμε λοιπόν ότι κανένα δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα, οπότε $\|\mathbf{u}\| > 0$ και $\|\mathbf{v}\| > 0$. Αν $\theta \in [0, \pi]$ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων από το Θεώρημα 4.1 έχουμε

$$|\cos\theta| = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}.$$

Η απόδειξη έπεται από το γεγονός ότι $|\cos\theta| < 1$ για $0 < \theta < \pi$ και $|\cos\theta| = 1$ αν και μόνο αν $\theta = 0$ ή $\theta = \pi$. □

Άσκηση 4.3. Εάν $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ είναι πραγματικοί αριθμοί δείξτε ότι

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

Άσκηση 4.4 (Η τριγωνική ανισότητα). Εάν **u** και **v** είναι διανύσματα τότε

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|. \tag{4.8}$$

Υπόδειξη: $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v})$.

4.3.1 Προβολές

Ας θεωρήσουμε το διάνυσμα $\mathbf{u} = \langle a, b, c\rangle$. Είδαμε ότι το **u** μπορεί να γραφεί σαν

$$\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}.$$

Η προβολή του **u** στον x-άξονα είναι το διάνυσμα $a\mathbf{i}$, η προβολή του στον y-άξονα είναι το διάνυσμα $b\mathbf{j}$, και η προβολή του στον z-άξονα είναι το διάνυσμα $c\mathbf{k}$. Τις προβολές αυτές θα τις λέμε προβολές του **u** στα **i**, **j**, και **k** αντίστοιχα. Ας υποθέσουμε ότι **v** είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα και ότι θέλουμε να βρούμε την προβολή του **u** στο **v**. Η ζητούμενη προβολή είναι της μορφής $\lambda\mathbf{v}$, όπου λ είναι μια σταθερά. Σημειώνουμε ότι η προβολή προσδιορίζεται μοναδικά από το ορθογώνιο τρίγωνο με "πλευρές" τα διανύσματα **u** και **v**.

Ας δούμε πως λειτουργεί ο μηχανισμός της προβολής. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} &= [(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i}]\mathbf{i} \\ &= a(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + b(\mathbf{j} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + c(\mathbf{k} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} \\ &= a\mathbf{i}\end{aligned}$$

από τις ιδιότητες του βαθμωτού γινομένου. Όμοια $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} = b\mathbf{j}$, και $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k} = c\mathbf{k}$. Έτσι αν με $\mathrm{proj}_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\beta}$ συμβολίζουμε την προβολή του $\boldsymbol{\beta}$ επί του $\boldsymbol{\alpha}$, τότε

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{i}}\,\mathbf{u} = a\mathbf{i}, \qquad \mathrm{proj}_{\mathbf{j}}\,\mathbf{u} = b\mathbf{j}, \qquad \mathrm{proj}_{\mathbf{k}}\,\mathbf{u} = c\mathbf{k}.$$

Αλλά και η προβολή του $\mathbf{u}$ επί του $r\mathbf{i}$, με r μια σταθερά, είναι επίσης $a\mathbf{u}$. Κατά συνέπεια μπορούμε να ορίσουμε την **προβολή του u επί του v** με τη σχέση

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \left(\mathbf{u}\cdot\left(\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right)\right)\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}.$$

Η ποσότητα $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})/|\mathbf{v}|^2$ λέγεται **συνιστώσα του u κατά μήκος του v**.

Παρατήρηση 4.4. Αν $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι δύο μη συνευθειακά διανύσματα τότε ορίζουν τη θέση μοναδικού επιπέδου το οποίο τα περιέχει. Αν $\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$ είναι η προβολή του $\mathbf{b}$ επί του $\mathbf{a}$, το διάνυσμα $\mathbf{b} - \mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$ είναι ορθογώνιο στο $\mathbf{a}$. Πράγματι

$$(\mathbf{b} - \mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b})\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}|\mathbf{a}|^2 = 0.$$

Κατά συνέπεια τα διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b} - \mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$ ορίζουν ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων στο επίπεδο που παράγουν τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$. Δύο μοναδιαία διανύσματα στους άξονες αυτούς είναι τα

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}, \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{b} - \mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}{|\mathbf{b} - \mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}|} = \frac{|\mathbf{a}|^2\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}}{||\mathbf{a}|^2\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}|}.$$

4.4 Το σταυρωτό ή διανυσματικό γινόμενο

Ορισμός 4.6. Εάν $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ και $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ είναι δύο διανύσματα στο $\mathbb{R}^3$ ορίζουμε το **σταυρωτό ή διανυσματικό γινόμενο** των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ να είναι το διάνυσμα

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \langle u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1\rangle.$$

Το σταυρωτό ή διανυσματικό γινόμενο λέγεται και **εξωτερικό γινόμενο**. Με χρήση της ορίζουσας το διανυσματικό γινόμενο μπορεί να γραφεί στην ευκολομνημόνευτη συμβολική μορφή

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{4.9}$$

Πρόταση 4.4. *Άμεση συνέπεια του ορισμού του διανυσματικού γινομένου είναι οι ιδιότητες*

(1) $\mathbf{u}\times\mathbf{u} = \mathbf{0}$

(2) $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = -\mathbf{v}\times\mathbf{u}$

(3) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\times\mathbf{v} + \mathbf{u}\times\mathbf{w}$

(4) $\lambda(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (\lambda\mathbf{u})\times\mathbf{v} = \mathbf{u}\times(\lambda\mathbf{v})$, *για κάθε σταθερά* λ.

(5) $\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}$ $\mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση. □

Θεώρημα 4.3. *Εάν θ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων* $\mathbf{u}$ *και* $\mathbf{v}$, *τότε*

$$|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\theta,$$

κατά συνέπεια το μέτρο $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$ *εκφράζει το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που παράγεται από τα διανύσματα* $\mathbf{u}$ *και* $\mathbf{v}$.

Πρόταση 4.5. *Εάν* $\mathbf{u}$ *και* $\mathbf{v}$ *είναι διανύσματα, τότε*

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}\perp\mathbf{u} \qquad \textit{και} \qquad \mathbf{u}\times\mathbf{v}\perp\mathbf{v}. \tag{4.10}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση. □

Αν τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ δεν είναι συνευθειακά, τότε από την Πρόταση 4.5 έπεται ότι το $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$. Επιπλέον ισχύει ο κανόνας του δεξιού χεριού, δηλαδή καθώς το δεξί χέρι στρέφεται από το $\mathbf{u}$ στο $\mathbf{v}$ ο αντίχειρας δείχνει το $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$.

Εάν $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$ είναι διανύσματα τότε οι πράξεις

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}, \qquad \mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}), \qquad \mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$$

έχουν έννοια. Μάλιστα μπορεί να αποδειχθεί ότι

(1) $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w} \neq \mathbf{u}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$ εν γένει

(2) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} \neq \mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$

(3) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}$

(4) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u}$.

Πρόταση 4.6. *Εάν* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *και* $\mathbf{w}$ *είναι διανύσματα τότε*

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{u}) = \mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}). \tag{4.11}$$

Επιπλέον αν $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ *και* $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2, w_3\rangle$, *τότε*

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \tag{4.12}$$

Ορισμός 4.7. Το βαθμωτό μέγεθος $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ λέγεται **τριπλό γινόμενο** και κάποιες φορές συμβολίζεται και με $[\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{w}]$.

Παρατήρηση 4.5 (Γεωμετρική). Μπορεί να δειχθεί ότι η απόλυτη τιμή του τριπλού γινομένου $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που παράγεται από τα διανύσματα $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$. Κατά συνέπεια τα τρία διανύσματα $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$ περιέχονται στο ίδιο επίπεδο αν και μόνο αν $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = 0$.

4.5 Η εξίσωση του επιπέδου

Το πρόβλημα: Εάν $\mathbf{u} = \langle a, b, c\rangle$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα και (x_0, y_0, z_0) είναι ένα σταθερό σημείο μας ενδιέφερει να περιγράψουμε το μοναδικό επίπεδο το οποίο περιέχει το σημείο (x_0, y_0, z_0) και είναι κάθετο στο $\mathbf{u}$.

Εάν (x, y, z) είναι τυχαίο σημείο του ζητούμενου επιπέδου διάφορο του (x_0, y_0, z_0), τότε το διάνυσμα $\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle$, το οποίο είναι παράλληλο στο ευθύγραμμο τμήμα του ζητούμενου επιπέδου με άκρα τα σημεία (x_0, y_0, z_0) και (x, y, z), είναι κάθετο στο $\mathbf{u}$, κατά συνέπεια

$$\mathbf{u} \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = 0,$$

ή ισοδύναμα

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \tag{4.13}$$

Κάνοντας τις πράξεις στην (4.13) καταλήγουμε στην εξίσωση

$$ax + by + cz = d. \tag{4.14}$$

Έτσι οι εξισώσεις (4.13) και (4.14) παριστάνουν επίπεδα, ειδικά η (4.13) είναι η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει το σημείο (x_0, y_0, z_0) και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{u} = \langle a, b, c\rangle$.

Άσκηση 4.5. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει τα μη συνευθειακά σημεία $P(1, 0, -1)$, $Q(2, 2, 1)$ και $R(4, 1, 2)$.

Παρατήρηση 4.6. Για το επίπεδο με εξίσωση (4.13) ή (4.14) το

$$\mathbf{n} = \frac{\langle a, b, c\rangle}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το σημείο $P(x_1, y_1, z_1)$ είναι ένα σημείο το οποίο δεν περιέχεται στο επίπεδο $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ και ότι μας ενδιαφέρει να βρούμε την απόσταση του σημείου από το επίπεδο. Το διάνυσμα με άκρα τα $P(x_1, y_1, z_1)$ και $Q(x_0, y_0, z_0)$, $\overrightarrow{PQ}$ είναι μια αναπαράσταση του $\mathbf{v} = \langle x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\rangle$. Η ζητούμενη απόσταση, έστω ϱ, είναι το μέτρο της προβολής του $\overrightarrow{PQ}$ επί του $\mathbf{n}$, ισοδύναμα

$$\varrho = |\operatorname{proj}_{\mathbf{n}} \mathbf{v}| = \left|\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}\right| = |\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|$$

έτσι

$$\varrho = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{4.15}$$

ή

$$\varrho = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{4.16}$$

αφού $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$.

Άσκηση 4.6. Θεωρήστε τα επίπεδα με εξισώσεις

$$ax + by + cz + d_1 = 0 \qquad \text{και} \qquad ax + by + cz + d_2 = 0.$$

(1) Δείξτε ότι τα δύο επίπεδα είναι παράλληλα.

(2) Δείξτε ότι η απόσταση μεταξύ των δύο επιπέδων είναι

$$\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Κεφάλαιο 5

Διανυσματικές Συναρτήσεις

5.1 Διανυσματατικές συναρτήσεις

Μια συνάρτηση με τιμές στο $\mathbb{R}^n$, $n > 1$ λέγεται **διανυσματική συνάρτηση**. Τις διανυσματικές συναρτήσεις θα τις συμβολίζουμε με παχειά γράμματα, όπως τα διανύσματα. Έτσι έχουμε συναρτήσεις

$$\begin{aligned} &\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \qquad && \mathbf{f}(x) = \langle f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\rangle \\ &\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \qquad && \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \langle f_1(\mathbf{x}), (f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})\rangle, \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ και $f_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$. Μια διανυσματική συνάρτηση αντιστοιχίζει σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της ένα διάνυσμα. Για παράδειγμα αν η $\mathbf{f}$ δίνει τη θέση ενός κινητού στο χώρο τη χρονική στιγμή t, τότε το $\mathbf{f}(t)$ είναι το **διάνυσμα θέσης** του κινητού. Όμοια η $\mathbf{f}'(t)$ δεν μπορεί παρά να δίνει το διάνυσμα της ταχύτητας του κίνητου τη χρονική στιγμή t. Για το λόγο αυτό τις διανυσματικές συναρτήσεις τις λέμε και **διανυσματικά πεδία**. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ θα την λέμε **βαθμωτό πεδίο**. Αν $\mathbf{f} = \langle f_1, f_2, \dots, f_n\rangle$, όπως και στην περίπτωση των διανυσμάτων τις $f_1, f_2, \dots, f_n$ τις λέμε **συνιστώσες** συναρτήσεις της $\mathbf{f}$.

Στη συνέχεια περιορίζουμε την παρουσίαση στην περίπτωση όπου $m, n \leq 3$, έτσι αν $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$ μπορούμε να γράφουμε

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x})\mathbf{i} + f_2(\mathbf{x})\mathbf{j} + f_3(\mathbf{x})\mathbf{k}.$$

Οι έννοιες του ορίου, της συνέχειας, της παραγώγου ή της μερικής παραγώγου γενικεύονται με φυσιολογικό τρόπο ώστε να χαρακτηρίζουν και διανυσματικές συναρτήσεις. Καταλαβαίνουμε ότι, και δεν θα μπορούσε να είναι διαφορετικά, οι έννοιες αυτές σχετίζονται με την διανυσματική συνάρτηση μέσω των συνιστωσών της συνάρτησης. Και το όριο, τη συνέχεια, τη παράγωγο ή τη μερική παράγωγο για κάθε συνιστώσα τα έχουμε μελετήσει.

5.2 Διανυσματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής

Οι συναρτήσεις αυτές κατέχουν ένα ξεχωριστό ρόλο στις δύο ή τρεις διατάσεις, στο $\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$ δηλαδή, είναι γεωμετρικά αντικείμενα τα οποία καταλαβαίνουμε πολύ καλά. Αυτές είναι οι καμπύλες. Συστηματική μελέτη των καμπυλών γίνεται στη Διαφορική Γεωμετρία.

Ορισμός 5.1. Έστω $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^3$, όπου το I είναι ένα ανοικτό διάστημα στο $\mathbb{R}$, και έστω $x_0 \in I$.

(1) Η $\mathbf{f}$ θα λέγεται συνεχής στο x_0 αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0)| < \epsilon$ οποτεδήποτε $|x - x_0| < \delta$.

(2) Η $\mathbf{f}$ θα λέγεται παραγωγίσιμη στο x_0 αν το όριο

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{f}(x_0 + h) - \mathbf{f}(x_0)}{h}$$

υπάρχει. Στη περίπτωση αυτή γράφουμε

$$\mathbf{f}'(x_0) = \left.\frac{d\mathbf{f}}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{f}(x_0 + h) - \mathbf{f}(x_0)}{h}.$$

Σημειώνουμε ότι

$$\frac{\mathbf{f}(x_0 + h) - \mathbf{f}(x_0)}{h} = \left\langle \frac{f_1(x_0 + h) - f_1(x_0)}{h}, \frac{f_2(x_0 + h) - f_2(x_0)}{h}, \frac{f_3(x_0 + h) - f_3(x_0)}{h} \right\rangle.$$

Πρόταση 5.1. *Έστω $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{f} = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$, όπου το I είναι ένα ανοικτό διάστημα στο $\mathbb{R}$, και έστω $x_0 \in I$.*

(1) *Η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in I$ αν και μόνο αν οι f_1, f_2, f_3 είναι συνεχείς στο x_0.*

(2) *Η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in I$ αν και μόνο αν οι f_1, f_2, f_3 είναι παραγωγίσιμες στο x_0.*

Πρόταση 5.2. *Εάν $I \subset \mathbb{R}$ είναι ένα ανοικτό διάστημα και $\phi : I \to \mathbb{R}$, $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^3$, και $\mathbf{g} : I \to \mathbb{R}^3$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις, τότε*

(1) $\dfrac{d}{dx}[\lambda\mathbf{f}(x) + \mu\mathbf{g}(x)] = \lambda\mathbf{f}'(x) + \mu\mathbf{g}'(x)$, *όπου λ και μ είναι πραγματικές σταθερές*

(2) $\dfrac{d}{dx}[\phi(x)\mathbf{f}(x)] = \phi'(x)\mathbf{f}(x) + \phi(x)\mathbf{f}'(x)$

(3) $\dfrac{d}{dx}[\mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{g}(x)] = \mathbf{f}'(x) \cdot \mathbf{g}(x) + \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{g}'(x)$

(4) $\dfrac{d}{dx}[\mathbf{f}(x) \times \mathbf{g}(x)] = \mathbf{f}'(x) \times \mathbf{g}(x) + \mathbf{f}(x) \times \mathbf{g}'(x)$

(5) $\dfrac{d}{dx}[\mathbf{f}(\psi(x))] = \psi'(x)\mathbf{f}'(\psi(x))$, *όπου $\psi : J \to I$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση.*

Άσκηση 5.1. Εάν η $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^3$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση δείξτε ότι

$$\frac{d}{dx}[\mathbf{f}(x) \times \mathbf{f}'(x)] = \mathbf{f}(x) \times \mathbf{f}''(x).$$

Ορισμός 5.2. Μια συνεχή διανυσματική συνάρτηση $\boldsymbol{\beta} : I \to \mathbb{R}^3$, όπου το I είναι ένα διάστημα στο $\mathbb{R}$ θα τη λέμε **καμπύλη**. Συνήθως γράφουμε

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle, \qquad t \in I.$$

Άσκηση 5.2. Έστω $\boldsymbol{\beta} : I \to \mathbb{R}^3$ μια παραγωγίσιμη καμπύλη. Έστω $t_0 \in I$ και ας υποθέσουμε ότι $\boldsymbol{\beta}'(t_0) \neq \mathbf{0}$.

(α΄) Εξηγήστε τι παριστάνει γεωμετρικά το διάνυσμα $\boldsymbol{\beta}'(t_0)$.

(β΄) Δείξτε ότι η εφαπτόμενη ευθεία της καμπύλης στο $\boldsymbol{\beta}(t_0)$ έχει εξίσωση

$$\mathbf{L}(t) = \boldsymbol{\beta}(t_0) + t\boldsymbol{\beta}'(t_0).$$

5.2.1 Μήκος καμπύλης

Έστω $\boldsymbol{\beta}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$, $a \le t \le b$ μια παραγωγίσιμη καμπύλη. Θέλουμε να υπολογίσουμε το μήκος της καμπύλης, αν κάτι τέτοιο ορίζεται. Ανατρέχοντας σε πράγματα που καταλαβαίνουμε θεωρούμε μια διαμέριση $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$. Μπορούμε μάλιστα να πάρουμε μια **ομοιόμορφη διαμέριση**, δηλαδή τέτοια ώστε $t_k - t_{k-1} = t_{k+1} - t_k = \Delta t$ για $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Αυτό επιτυγχάνεται παίρνοντας $\Delta t = (b-a)/n$ και $t_k = t_{k-1} + \Delta t$, για $k = 1, 2, \ldots, n$. Τα ευθύγραμμα τμήματα με άκρα τα σημεία $(x(t_{k-1}), y(t_{k-1}), z(t_{k-1}))$ και $(x(t_k), y(t_k), z(t_k))$, για $k = 1, 2, \ldots, n$ αποτελούν μια πολυγωνική γραμμή με με άκρα τα άκρα της καμπύλης $\boldsymbol{\beta}$ και κορυφές επάνω στη $\boldsymbol{\beta}$. Αν η διαμέριση είναι λεπτή, δηλαδή το Δt είναι μικρό, τότε το μήκος της πολυγωνικής καμπύλης προσεγγίζει αυτό της $\boldsymbol{\beta}$. Έτσι αν με $L(\boldsymbol{\beta})$ συμβολίσουμε το μήκος της καμπύλης, τότε

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\beta}) &\approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2 + (z(t_k) - z(t_{k-1}))^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_k}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z_k}{\Delta t}\right)^2}\, \Delta t, \end{aligned}$$

όπου $\Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1})$ και Δy_k, Δz_k ανάλογα ορισμένα. Παίρνοντας το όριο του $n \to \infty$, ή $\Delta t \to 0$ και υποθέτοντας ότι υπάρχει, τελικά θα έχουμε

$$L(\boldsymbol{\beta}) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = \int_a^b |\boldsymbol{\beta}'(t)|\, dt. \tag{5.1}$$

Το ολοκλήρωμα στην (5.1) υπάρχει αν για παράδειγμα η $\boldsymbol{\beta}$ έχει συνεχή παράγωγο, ή κατά τμήματα συνεχή παράγωγο.

Το ολοκλήρωμα καμπύλης

Ορισμός 5.3. Εάν $\mathbf{f} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, όπου $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ και οι x, y και z είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $[a,b]$ ορίζουμε

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt = \left\langle \int_a^b x(t)\,dt, \int_a^b y(t)\,dt, \int_a^b z(t)\,dt \right\rangle. \tag{5.2}$$

Θεώρημα 5.1 (Το Θεμελιώδες Θεώρημα για διανυσματικές συναρτήσεις). *Εάν η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και η $\mathbf{F}$ είναι μια παράγουσα της $\mathbf{f}$, δηλαδή $\mathbf{F}' = \mathbf{f}$ στο $[a,b]$, τότε*

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a). \tag{5.3}$$

5.3 Διανυσματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Ορισμός 5.4. Έστω $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^3$, όπου το U είναι ένα ανοικτό σύνολο στο $\mathbb{R}^2$ ή στο $\mathbb{R}^3$, και έστω $\mathbf{x_0} \in U$. Η $\mathbf{f}$ θα λέγεται συνεχής στο $\mathbf{x_0}$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x_0})| < \epsilon$ οποτεδήποτε $|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}| < \delta$.

Πρόταση 5.3. *Έστω $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{f} = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$, όπου το U είναι ένα ανοικτό σύνολο στο $\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$, και έστω $x_0 \in U$. Η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in U$ αν και μόνο αν οι f_1, f_2, f_3 είναι συνεχείς στο x_0.*

Στη συνέχεια συζητάμε την έννοια της μερικής παραγώγου μιας $\mathbf{f} = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ ορισμένης σε κάποιο ανοικτό σύνολο U το οποίο παίρνουμε υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Αν $(x_0, y_0) \in U$ διαμορφώνουμε το πηλίκο

$$\frac{\mathbf{f}(x_0+h, y_0) - \mathbf{f}(x_0, y_0)}{h} = \left\langle \frac{f_1(x_0+h, y_0) - f_1(x_0, y_0)}{h}, \frac{f_2(x_0+h, y_0) - f_2(x_0, y_0)}{h}, \frac{f_3(x_0+h, y_0) - f_3(x_0, y_0)}{h} \right\rangle$$

και παρατηρούμε ότι το όριο στο αριστερό μέλος, καθώς $h \to 0$, υπάρχει αν και μόνον αν η μερική παράγωγος ως προς x κάθε συνιστώσας συνάρτησης υπάρχει στο (x_0, y_0). Το ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και για την μερική παράγωγο ως προς y.

Εάν $U \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \{2, 3\}$, είναι ένα ανοικτό σύνολο και $\phi : U \to \mathbb{R}$, $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^3$, και $\mathbf{g} : U \to \mathbb{R}^3$ είναι συναρτήσεις των οποίων οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν στο U, τότε

(1) $\dfrac{\partial}{\partial x}(\phi \mathbf{f}) = \dfrac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{f} + \phi \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}$

(2) $\dfrac{\partial}{\partial x}(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{f} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}$

(3) $\dfrac{\partial}{\partial x}(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \times \mathbf{g} + \mathbf{f} \times \dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}$

με ανάλογες σχέσεις για τις μερικές παραγώγους ως προς y και z.

5.4 Κλίση Απόκλιση και Στροβιλισμός

Ορισμός 5.5. Εάν $f : U \to \mathbb{R}$, όπου U είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, είναι διαφορίσιμη συνάρτηση η **κλίση** της f είναι η διανυσματική συνάρτηση που ορίζεται με τη σχέση

$$\operatorname{grad} f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle. \tag{5.4}$$

Το διάνυσμα αυτό συμβολίζεται και με ∇f, ή $\nabla f(x, y, z)$. Το σύμβολο ∇ διαβάζεται **ανάδελτα**.

Είναι πρακτικά χρήσιμο, όπως θα δούμε, να βλέπουμε την κλίση σαν ένα διανυσματικό διαφορικό τελεστή

$$\nabla = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle \tag{5.5}$$

ο οποίος δρα πάνω σε διαφορίσιμες βαθμωτές συναρτήσεις και δίνει την κλίση

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle. \tag{5.6}$$

Ορισμός 5.6. Έστω $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^3$, όπου U είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, να είναι μια διαφορίσιμη διανυσματική συνάρτηση.

(1) Η **απόκλιση** της $\mathbf{f}$ είναι η βαθμωτή συνάρτηση που ορίζεται με τη σχέση

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}. \tag{5.7}$$

(2) Ο **στροβιλισμός** της $\mathbf{f}$ είναι η διανυσματική συνάρτηση που ορίζεται με τη σχέση

$$\operatorname{curl} \mathbf{f} = \left\langle \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right\rangle. \tag{5.8}$$

Σε αναλογία με την (5.6) παρατηρούμε ότι

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{f} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle \cdot \langle f_1, f_2, f_3 \rangle = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}. \tag{5.9}$$

Επίσης

$$\operatorname{curl} \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle \times \langle f_1, f_2, f_3 \rangle = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}. \tag{5.10}$$

Πρόταση 5.4 (Ιδιότητες του ∇). *Εάν οι μερικές παράγωγοι των ϕ, ψ, $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$ υπάρχουν, τότε*

(1) $\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$, *δηλαδή* $\operatorname{grad}(\phi + \psi) = \operatorname{grad}\phi + \operatorname{grad}\psi$

(2) $\nabla \cdot (\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \nabla \cdot \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{g}$, *δηλαδή* $\operatorname{div}(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \operatorname{div}\mathbf{f} + \operatorname{grad}\mathbf{g}$

(3) $\nabla \times (\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \nabla \times \mathbf{f} + \nabla \times \mathbf{g}$, *δηλαδή* $\operatorname{curl}(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \operatorname{curl}\mathbf{f} + \operatorname{curl}\mathbf{g}$

(4) $\nabla \cdot (\phi\mathbf{f}) = (\nabla\phi) \cdot \mathbf{f} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{f})$

(5) $\nabla \times (\phi\mathbf{f}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{f} + \phi(\nabla \times \mathbf{f})$

(6) $\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f} + (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g} + \mathbf{g} \times (\nabla \times \mathbf{f}) + \mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{g})$

(7) $\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{g})$

(8) $\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f} - (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g} + (\nabla \cdot \mathbf{g})\mathbf{f} - (\nabla \cdot \mathbf{f})\mathbf{g}$

Πρόταση 5.5. *Εάν οι πρώτες και δεύτερες μερικές παράγωγοι των ϕ, και $\mathbf{f}$ είναι συνεχείς, τότε*

(1) $\nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0}$, *δηλαδή* $\operatorname{curl}(\operatorname{grad}\phi) = \mathbf{0}$

(2) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = 0$, *δηλαδή* $\operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{f}) = 0$

Ορισμός 5.7. Εάν η $f : U \to \mathbb{R}$, όπου U είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, έχει μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης ορίζουμε τη Λαπλασιανή (Laplacian) της f να είναι

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Άσκηση 5.3. Αν $\nabla^2 f := \nabla \cdot (\nabla f)$, δείξτε ότι

$$\nabla^2 f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Άσκηση 5.4. Αν $\mathbf{f}$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο, δείξτε ότι

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{f}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla^2\mathbf{f},$$

όπου

$$\nabla^2\mathbf{f} = \Delta\mathbf{f} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial z^2}.$$

5.5 Παράγωγοι κατά κατεύθυνση

Εάν η f είναι ένα βαθμωτό πεδίο ($f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$) για το οποίο οι μερικές παράγωγοι στο $(x_0, y_0, z_0) \in U$ υπάρχουν, θυμίζουμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}$$

με ανάλογες εκφράσεις για τις υπόλοιπες μερικές παραγώγους. Ορίζοντας τα μοναδιαία διανύσματα

$$\mathbf{e_1} = \langle 1, 0, 0\rangle, \qquad \mathbf{e_2} = \langle 0, 1, 0\rangle, \qquad \mathbf{e_3} = \langle 0, 0, 1\rangle \tag{5.11}$$

και ταυτίζοντας το σημείο (x_0, y_0, z_0) με το διάνυσμα $\mathbf{x_0} = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$ η παραπάνω μερική παράγωγος γράφεται

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x_0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x_0} + t\mathbf{e_1}) - f(\mathbf{x_0})}{t}.$$

Έτσι η μερική παράγωγος $\partial f/\partial x$ δίνει το ρυθμό μεταβολής της f κατά μήκος του διανύσματος $\mathbf{e_1}$, με ανάλογους χαρακτηρισμούς για τις υπόλοιπες μερικές παραγώγους. Έστω τώρα ότι το $\mathbf{u}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα. Θα μπορούσε να μας ενδιαφέρει ο ρυθμός μεταβολής της f κατά μήκος του $\mathbf{u}$.

Ορισμός 5.8. Η **κατά κατεύθυνση παράγωγος** της f στο $\mathbf{x_0}$ στην κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{u}$, συμβολίζεται με $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x_0})$, και είναι το όριο

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x_0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x_0} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x_0})}{t} \tag{5.12}$$

εφόσον αυτό υπάρχει.

Παρατήρηση 5.1. Από τον ορισμό της κατά κατεύθυνση παραγώγου παρατηρούμε ότι αν ορίσουμε

$$g(t) = f(\mathbf{x_0} + t\mathbf{u}),$$

τότε, εφόσον η $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x_0})$ υπάρχει, θα είναι

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x_0}) = \left.\frac{dg}{dt}\right|_{t=0} = g'(0).$$

Θεώρημα 5.2. *Εάν $f : U \to \mathbb{R}$, όπου U είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, είναι διαφορίσιμη συνάρτηση, τότε η κατά κατεύθυνση παράγωγος της f στην κατεύθυνση οποιουδήποτε μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{u}$ υπάρχει, επιπλέον*

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}$$

για κάθε $\mathbf{x} \in U$.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0, z_0) \in U$ και $\mathbf{u} = \langle a, b, c\rangle$. Θέτοντας

$$g(t) = f(\mathbf{x_0} + t\mathbf{u}) = f(x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc)$$

για t μικρό ώστε $\mathbf{x_0} + t\mathbf{u} \in U$, από τον κανόνα της αλυσίδας, Θεώρημα 2.5, παίρνουμε

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial y}b + \frac{\partial f}{\partial z}c \\ &= \nabla f(\mathbf{x_0} + t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}, \end{aligned}$$

κατά συνέπεια σύμφωνα με την Παρατήρηση 5.1 έπεται ότι η κατά κατεύθυνση παράγωγος $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x_0})$ υπάρχει και

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x_0}) = g'(0) = \nabla f(\mathbf{x_0}) \cdot \mathbf{u}$$

□

Θεώρημα 5.3. *Εάν $f : U \to \mathbb{R}$, όπου U είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, είναι διαφορίσιμη συνάρτηση, τότε η μέγιστη τιμή της κατά κατεύθυνση παραγώγου $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$ είναι $|\nabla f(\mathbf{x})|$ και συμβαίνει όταν το $\mathbf{u}$ έχει την ίδια κατεύθυνση με το διάνυσμα $\operatorname{grad} f(\mathbf{x})$.*

Πόρισμα 5.1. *Έστω ότι $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$. Η κλίση $\operatorname{grad} f(\mathbf{x})$ δείχνει προς την κατεύθυνση εκείνη κατά μήκος της οποίας η f αυξάνει γρηγορότερα.*

5.6 Εφαπτόμενα επίπεδα

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια επιφάνεια S η οποία περιγράφεται από την εξίσωση $z = f(x, y)$, όπου η f έχει συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους. Έστω $P(x_0, y_0, z_0)$, όπου $z_0 = f(x_0, y_0)$ ένα σημείο της επιφάνειας. Το επίπεδο $y = y_0$ τέμνει την επιφάνεια κατά μήκος μιας καμπύλης C_1 και το επίπεδο $x = x_0$ τέμνει την S κατά μήκος μιας καμπύλης C_2. Οι καμπύλες αυτές είναι αντίστοιχα οι

$$\boldsymbol{\alpha}(x) = \langle x, y_0, f(x, y_0)\rangle \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{\beta}(y) = \langle x_0, y, f(x_0, y)\rangle.$$

Παρατηρούμε ότι $\boldsymbol{\alpha}(x_0) = \boldsymbol{\beta}(y_0) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$, δηλαδή το σημείο $P(x_0, y_0, z_0)$ βρίσκεται επάνω και στις δύο καμπύλες C_1 και C_2. Αφού το $\boldsymbol{\alpha}'(x_0)$ είναι εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης C_1 στο P και το $\boldsymbol{\beta}'(y_0)$ είναι εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης C_2 στο P, το $\boldsymbol{\alpha}'(x_0) \times \boldsymbol{\beta}'(y_0)$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}'(x_0)$ και $\boldsymbol{\beta}'(y_0)$, δηλαδή κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας S στο σημείο $P(x_0, y_0, z_0)$. Έτσι αν (x, y, z) είναι τυχόν σημείο του εφαπτόμενου επιπέδου θα πρέπει

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle \cdot (\boldsymbol{\alpha}'(x_0) \times \boldsymbol{\beta}'(y_0)) = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & f_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & f_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Έτσι μετά από πράξεις βρίσκουμε ότι η εξίσωση του ζητούμενου εφαπτόμενου επιπέδου είναι

$$-f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + z - z_0 = 0 \tag{5.13}$$

Αν γράψουμε $F(z, y, z) = z - f(x, y)$, τότε η επιφάνεια S δίνεται από την εξίσωση $F(x, y, z) = 0$. Από την (5.13) βλέπουμε ότι η κλίση της F

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = \langle -f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1\rangle \tag{5.14}$$

δηλαδή το $\operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0)$ είναι διάνυσμα κάθετο στην S στο σημείο $P(x_0, y_0, z_0)$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι μια επιφάνεια S δίνεται από μια εξίσωση $F(x, y, z) = c$, όπου c είναι μια σταθερά. Μια τέτοια επιφάνεια λέγεται **ισοσταθμική επιφάνεια**. Αν $P(x_0, y_0, z_0)$ είναι ένα σημείο της επιφάνειας και $\boldsymbol{\gamma}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ είναι μια καμπύλη που περιέχεται στην επιφάνεια και περιέχει το σημείο $P(x_0, y_0, z_0)$, δηλαδή $\boldsymbol{\gamma}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$ για κάποιο t_0, τότε θα είναι

$$F(x(t), y(t), z(t)) = c. \tag{5.15}$$

Εάν οι F και $\boldsymbol{\gamma}$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις, τότε παραγωγίζοντας την (5.15) παίρνουμε

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0,$$

ισοδύναμα

$$\nabla F(\boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(t) = 0.$$

Ειδικότερα για $t = t_0$, είναι

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(t_0) = 0.$$

Επειδή η καμπύλη $\boldsymbol{\gamma}$ είναι τυχαία, έπεται ότι η κλίση ∇F, στο P είναι διάνυσμα κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της $F(x, y, z) = c$ στο P. Κατά συνέπεια αν $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, το εφαπτόμενο επίπεδο της $F(x, y, z) = c$ στο $P(x_0, y_0, z_0)$ είναι

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \tag{5.16}$$

Ορισμός 5.9. Έστω S μια επιφάνεια και έστω P ένα σημείο της S. Ένα διάνυσμα κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της S στο P λέγεται **κανονικό διάνυσμα** (normal vector) της S στο P. Η ευθεία η οποία περιέχει το P και είναι κάθετη στο εφαπτόμενο επίπεδο της S στο P λέγεται **κανονική ευθεία** (normal line) της S στο P.

Άσκηση 5.5. Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, στο σημείο $(-2, 1, 2)$, καθώς και η εξίσωση της κανονικής ευθείας της σφαίρας στο σημείο αυτό.

Άσκηση 5.6. Δείξτε ότι η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου του ελλειψοειδούς

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

στο σημείο (x_0, y_0, z_0) μπορεί να γραφεί σαν

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

5.7 Πολλαπλασιαστές Lagrange

Οι πολλαπλασιαστές Lagrange είναι ένας άλλος τρόπος εύρεσης ακροτάτων όταν υπάρχουν περιορισμοί. Ας περιγράψουμε τη μέθοδο με ένα απλό παράδειγμα.

Παράδειγμα 5.1. Να βρεθούν τα σημεία του ελλειψοειδούς

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} + \frac{z^2}{4^2} = 1$$

των οποίων η απόσταση από την αρχή των αξόνων είναι μέγιστη.

Θέλουμε να βρούμε το μέγιστο της $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ ισοδύναμα της

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

όταν το (x, y, z) βρίσκεται στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς

$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} + \frac{z^2}{4^2} - 1 = 0.$$

Ας φανταστούμε μια σφαίρα με κέντρο την αρχή των αξόνων και μεταβλητής ακτίνας r. Αν $r < 2$ η σφαίρα βρίσκεται στο εσωτερικό του ελλειψοειδούς, αν $2 < r < 4$ η σφαίρα τέμνει το ελλειψοειδές, και αν $r > 4$ το ελλειψοειδές βρίσκεται στο εσωτερικό της σφαίρας. Κατά συνέπεια υπάρχει τιμή r^* όπου η σφαίρα "αγγίζει" το ελλειψοειδές, δηλαδή η σφαίρα και το ελλειψοειδές εφάπτονται. Στα σημεία αυτά η σφαίρα και το ελλειψοειδές έχουν κοινό εφαπτόμενο επίπεδο. Κατά συνέπεια τα κανονικά διανύσματα στις δύο επιφάνειες είναι παράλληλα, δηλαδή

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

για κάποιο λ. Έτσι θα έχουμε

$$\langle 2x, 2y, 2z\rangle = \lambda\left\langle \frac{2x}{2^2}, \frac{2y}{3^2}, \frac{2z}{4^2}\right\rangle \Leftrightarrow 4x = \lambda x \quad 9y = \lambda y \quad 16z = \lambda z. \tag{5.17}$$

Οι λύσεις (x, y, z) του συστήματος (5.17) εξαρτώνται από την παράμετρο λ, και αναζητάμε εκείνες τις τιμές του λ για τις οποίες οι αντίστοιχες λύσεις ικανοποιούν την σχέση $g(x, y, z) = 0$. Για παράδειγμα αν $\lambda = 0$ τότε θα πρέπει να είναι $x = y = z = 0$, αλλά το $(0, 0, 0)$ δεν ανήκει στο ελλειψοειδές. Κατά συνέπεια $\lambda \neq 0$. Παρατηρούμε ότι αν δύο από τις μεταβλητές είναι διάφορες του 0 τότε το (5.17) είναι αδύνατο, για παράδειγμα αν $x \neq 0$ και $y \neq 0$, τότε θα είχαμε ότι $\lambda = 4$ και $\lambda = 9$. Έτσι οι λύσεις του (5.17) που ικανοποιούν την $g(x, y, z) = 0$ είναι οι

$$\begin{aligned} &(0, 0, \pm 4) \qquad \lambda = 16 \\ &(0, \pm 3, 0) \qquad \lambda = 9 \\ &(\pm 2, 0, 0) \qquad \lambda = 4. \end{aligned}$$

Έτσι τα σημεία $(0, 0, \pm 4)$ έχουν τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων. Επίσης τα $(\pm 2, 0, 0)$ είναι τα σημεία του ελλειψοειδούς τα οποία εναι κοντινότερα στο $(0, 0, 0)$.

Το προηγούμενο παράδειγμα, έστω και αν η απάντηση είναι σχεδόν προφανής, δείχνει γεωμετρικά πως και γιατί η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange (τέτοιος είναι το λ) δουλεύει. Συνοψίζοντας, λοιπόν έχουμε

Η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange: Για να βρούμε τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές της $f(x, y, z)$ με τον περιορισμό $g(x, y, z) = 0$, βρίσκουμε τις λύσεις (x, y, z, λ) του συστήματος

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) &= 0 \end{aligned}$$

Η μέγιστη των τιμών τις f στα σημεία που βρήκαμε στο προηγούμενο βήμα είναι το μέγιστο της f και η ελάχιστη είναι το ελάχιστο της f. Σε περίπτωση που έχουμε περισσότερους περιορισμούς, έστω $g(x, y, z) = 0$ και $h(x, y, z) = 0$, ακολουθούμε την ανάλογη διαδικασία για το σύστημα

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z) \\ g(x, y, z) &= 0 \\ h(x, y, z) &= 0. \end{aligned}$$

Άσκηση 5.7. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κουτί σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ανοικτό στην κορυφή. Αν διαθέτουμε ένα χαρτόνι 12 τετραγωνικών μέτρων να βρεθούν οι διαστάσεις του κουτιού το οποίο περικλείει το μέγιστο όγκο.

Άσκηση 5.8. Το επίπεδο $x + y + 2z = 2$ τέμνει το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$ κατά μήκος μιας έλλειψης. Να βρεθούν τα σημεία της έλλειψης τα οποία είναι πιο κοντά στην αρχή των αξόνων και εκείνα τα οποία είναι πιο μακρυά.

5.8 Η παράγωγος

Αν το $U \subset \mathbb{R}$ είναι ένα ανοικτό διάστημα, $f : U \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in U$ η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

υπάρχει. Αν αυτό συμβαίνει συμβολίζουμε το όριο με $f'(x_0)$. Το αποτέλεσμα αυτό μπορούμε να το γράψουμε και σαν

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Επιπλέον μπορούμε να πούμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν και μόνο αν υπάρχει σταθερά $L_{f(x_0)}$ ώστε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L_{f(x_0)}(x - x_0)}{x - x_0} = 0. \tag{5.18}$$

Στη περίπτωση αυτή την $L_{f(x_0)}$ λέμε παράγωγο της f στο x_0 και έχουμε ότι

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L_{f(x_0)} = f'(x_0).$$

Για διανυσματικές συναρτήσεις η (5.18) γενικεύεται για να δώσει τον ορισμό της παραγωγισιμότητας αλλά και την μορφή της παραγώγου.

Ορισμός 5.10. Αν το $U \subset \mathbb{R}^m$ είναι ένα ανοικτό σύνολο, $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x_0} \in U$ η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν υπάρχει $n \times m$ μητρώο $L_{\mathbf{f}(\mathbf{x_0})}$, ώστε

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x_0}) - L_{\mathbf{f}(\mathbf{x_0})}(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}|} = 0. \tag{5.19}$$

Σημειώνουμε ότι

$$L_{\mathbf{f}(\mathbf{x_0})}(\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1m} \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & l_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}\Delta x_1 + l_{12}\Delta x_2 + \cdots + l_{1m}\Delta x_m \\ l_{21}\Delta x_1 + l_{22}\Delta x_2 + \cdots + l_{2m}\Delta x_m \\ \vdots \\ l_{n1}\Delta x_1 + l_{n2}\Delta x_2 + \cdots + l_{nm}\Delta x_m \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

όπου $\mathbf{x} - \mathbf{x_0} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m)$. Το μητρώο $L_{\mathbf{f}(\mathbf{x_0})}$ το λέμε **παράγωγο** της $\mathbf{f}$ στο $\mathbf{x_0}$ και το συμβολίζουμε με $\mathbf{Df}(\mathbf{x_0})$. Σημειώνουμε επίσης ότι ο αριθμητής στην (5.19) είναι το μέτρο ενός διανύσματος στο $\mathbb{R}^n$, ενώ ο παρανομαστής είναι το μέτρο ενός διανύσματος στο $\mathbb{R}^m$.

Πρόταση 5.6. *Το μητρώο L στην (5.19) εφόσον αυτό υπάρχει είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα αυτό έπεται από το θεώρημα που ακολουθεί, μπορεί όμως να αποδειχθεί χωρίς να γνωρίζουμε την ακριβή μορφή της παραγώγου. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι L_1 και L_2 είναι δύο $n \times m$ μητρώα για τα οποία η (5.19) ισχύει. Θέτουμε $L = L_1 - L_2$ και $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x_0}$, τότε

$$\begin{aligned}\frac{|L\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} &= \frac{|(\mathbf{f}(\mathbf{x_0} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x_0}) - L_2\mathbf{h}) - (\mathbf{f}(\mathbf{x_0} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x_0}) - L_1\mathbf{h})|}{|\mathbf{h}|} \\ &\leq \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x_0} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x_0}) - L_1\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} + \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x_0} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x_0}) - L_2\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|}.\end{aligned}$$

Αν $\mathbf{h} = t\mathbf{a}$ με $|\mathbf{a}| = 1$, τότε $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ αν και μόνον αν $t \to 0$. Παίρνοντας λοιπόν το όριο $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ για το μεν αριστερό μέλος της ανισότητας έχουμε

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{|L\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} = \lim_{t\to 0} \frac{|Lt\mathbf{a}|}{|t\mathbf{a}|} = \lim_{t\to 0} \frac{|t||L\mathbf{a}|}{|t||\mathbf{a}|} = |L\mathbf{a}|,$$

ενώ το δεξί μέλος τείνει στο 0. Έτσι, τελικά, θα είναι $|L\mathbf{a}| \leq 0$, ισοδύναμα $L\mathbf{a} = 0$, απ΄ όπου έπεται ότι το L είναι το μηδενικό μητρώο, κατά συνέπεια $L_1 = L_2$. □

Θεώρημα 5.4. *Αν το $U \subset \mathbb{R}^m$ είναι ένα ανοικτό σύνολο, $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x_0} \in U$ και υποθέσουμε ότι η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε όλες οι μερικές παράγωγοι της $\mathbf{f}$ υπάρχουν στο σημείο $\mathbf{x_0}$ και*

$$\mathbf{Df}(\mathbf{x_0}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x_0}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x_0}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\mathbf{x_0}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x_0}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x_0}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(\mathbf{x_0}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x_0}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x_0}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(\mathbf{x_0}) \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

Το μητρώο $\mathbf{Df}(\mathbf{x_0})$ λέγεται **Ιακωβιανό μητρώο** και στην περίπτωση όπου $m = n$, η ορίζουσα $|\mathbf{Df}(\mathbf{x_0})|$ είναι η γνωστή Ιακωβιανή ορίζουσα

$$|\mathbf{Df}(\mathbf{x_0})| = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_m)}.$$

Σημείωση 5.1. Στη βιβλιογραφία αναφέρεται ότι μια συνάρτηση $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ είναι παραγωγίσιμη ή διαφορίσιμη στο σημείο $\mathbf{x_0}$ αν υπάρχει **γραμμική απεικόνιση** $\mathcal{L} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ώστε

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x_0}) - \mathcal{L}(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}|} = 0. \tag{5.22}$$

Μια απεικόνιση $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ λέγεται γραμμική αν για κάθε $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ στο $\mathbb{R}^m$ και a και b στο $\mathbb{R}$ είναι

$$T(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = aT(\mathbf{x}) + bT(\mathbf{y}). \tag{5.23}$$

Στη Γραμμική Άλγεβρα αποδεικνύεται ότι μια απεικόνιση $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ είναι γραμμική αν και μόνο αν υπάρχει $n \times m$ σταθερό μητρώο M ώστε

$$T(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}.$$

Αν $m = n = 1$ το μητρώο είναι μια σταθερά. Έχουμε δηλαδή ότι οι μόνες γραμμικές απεικονίσεις από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ είναι οι $Tx = ax$, όπου a είναι σταθερά.

Ασκήσεις

1. Έστω ότι οι διανυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$ ορίζονται στο ανοικτό διάστημα I και παίρνουν τιμές στο $\mathbb{R}^3$, και έστω ότι
$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{f}(t)=\mathbf{a},\qquad \lim_{t\to t_0}\mathbf{g}(t)=\mathbf{b}\qquad t_0\in I,$$
όπου $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι σταθερά διανύσματα στο $\mathbb{R}^3$. Δείξτε ότι
   (α΄) $\lim_{t\to t_0}(\mathbf{f}(t)+\mathbf{g}(t))=\mathbf{a}+\mathbf{b}$
   (β΄) $\lim_{t\to t_0}(\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}(t))=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$
   (γ΄) $\lim_{t\to t_0}(\mathbf{f}(t)\times\mathbf{g}(t))=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$

2. Εάν η $\mathbf{f}:I\to\mathbb{R}^3$ είναι διαφορίσιμη και $\mathbf{f}(t)\neq\mathbf{0}$ στο διάστημα I δείξτε ότι
$$\frac{d}{dt}|\mathbf{f}(t)|=\frac{1}{|\mathbf{f}(t)|}\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{f}'(t).$$

3. Έστω ότι η καμπύλη $\boldsymbol{\beta}:I\to\mathbb{R}^3$ είναι διαφορίσιμη, και έστω ότι $\boldsymbol{\beta}(t)\perp\boldsymbol{\beta}'(t)$ για κάθε $t\in I$. Δείξτε ότι η καμπύλη βρίσκεται επάνω σε σφαίρα με κέντρο την αρχή των αξόνων.

4. Εάν ϕ και ψ είναι βαθμωτά πεδία δείξτε ότι
$$\nabla\cdot(\nabla\phi\times\nabla\psi)=0.$$

5. Εάν $\mathbf{r}=\langle x,y,z\rangle$ είναι το διάνυσμα θέσης και $r=|\mathbf{r}|$, δείξτε ότι
   (α΄) $\nabla r^n=nr^{n-2}\mathbf{r}$ για $n=1,2,\ldots$
   (β΄) $\nabla\times(\phi(r)\mathbf{r})=\mathbf{0}$, για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση ϕ μιας μεταβλητής.

6. Εάν $\mathbf{r}=\langle x,y,z\rangle$ είναι το διάνυσμα θέσης και $\mathbf{a}$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα, δείξτε ότι
   (α΄) $\nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})=\mathbf{a}$
   (β΄) $\nabla\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{a})=3$
   (γ΄) $\nabla\times(\mathbf{r}-\mathbf{a})=\mathbf{0}$

7. Η θερμοκρασία στο σημείο (x,y,z) δίνεται από τη
$$T(x,y,z)=200e^{-x^2-3y^2-9z^2}$$
όπου η T μετράται σε βαθμούς Κελσίου και οι x,y,z σε μέτρα.
   (α΄) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της T στο $P(1,2,2)$ στην κατεύθυνση προς το σημείο $(2,1,3)$.
   (β΄) Προς ποια κατεύθυνση η θερμοκρασία στο P αυξάνει γρηγορότερα;
   (γ΄) Να βρεθεί ο μέγιστος ρυθμός αύξησης της T στο P.

8. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η f είναι **ομοιογενής βαθμού** p (homogeneous of degree p) αν

$$f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^p f(\mathbf{x})$$

για όλα τα $\mathbf{x} \in D(f)$ και για όλα τα $\lambda \in \mathbb{R}$ για τα οποία $\lambda \mathbf{x} \in D(f)$.

   (α΄) **Θεώρημα του Euler για ομοιογενείς συναρτήσεις**. Αν η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι ομοιογενής βαθμού p και διαφορίσιμη στο $\mathbf{x}$, δείξτε ότι

$$\mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = pf(\mathbf{x}).$$

   Υπόδειξη: Για το συγκεκριμένο $\mathbf{x}$ θεωρήστε την $g(\lambda) = f(\lambda \mathbf{x})$.

   (β΄) Για τη συνάρτηση $f(x, y, z) = x^2 - 2xy - \sqrt{x^4 + z^4}$, δείξτε ότι είναι ομοιογενής. Αφού βρείτε το βαθμό ομοιογένειας p, επαληθεύστε το Θεώρημα του Euler για την f .

9. Χρησιμοποιήστε πολλαπλασιαστές Lagrange για να δείξετε ότι το τρίγωνο δοσμένης περιμέτρου p, το οποίο περικλείει περιοχή μεγίστου εμβαδού είναι ισόπλευρο.
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον τύπο του Ήρωνα: Αν x, y, z είναι τα μήκη των πλευρών τριγώνου και $p = x + y + z$, τότε το εμβαδόν A είναι

$$A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)},$$

όπου $s = p/2$ είναι η ημιπερίμετρος.

10. **Η ανισότητα Cauchy–Schwarz**

   (α΄) Να βρεθεί το μέγιστο της ποσότητας $\sum_{k=1}^n x_k y_k$ όταν $\sum_{k=1}^n x_k^2 = 1$ και $\sum_{k=1}^n y_k^2 = 1$.

   (β΄) Αν $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \le \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{1/2}.$$

   Υπόδειξη: Θέστε

$$x_k = \frac{a_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}} \qquad \text{και} \qquad y_k = \frac{b_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}}.$$

Βιβλιογραφία

[1] T. M. Apostol *Mathematical Analysis*, 2nd edition, Addison–Wesley, Reading, Massachusetts 1974.

[2] R. G. Bartle *The Elements of Real Analysis*, 2nd edition, J. Wiley & Sons, New York 1976.

[3] K. Knopp *Infinite Sequences and Series*, Dover, New York 1956.

[4] J. E. Marsden & A. J. Tromba *Vector Calculus*, 3rd edition W. E. Freeman and Co., 1988.
Σε μετάφραση: *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης 2001.

[5] J. R. Munkres *Topology, A first course*, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1975.

[6] W. Rudin *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd edition, McGraw–Hill, New York, 1976.
Σε μετάφραση: *Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως*, Leader Books Αθήνα 2000.

[7] M. R. Spiegel *Advanced Calculus*, SI (metric) edition, McGraw–Hill, New York, 1974.

[8] M. Spivak *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*, μετάφραση της 4ης έκδοσης του πρωτότυπου, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης 2010.

[9] M. Spivak *Calculus on Manifolds*, W. A. Benjamin, Inc, New York 1965.
Σε μετάφραση: *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης 1994.

[10] J. Stewart *Calculus: Early Transcendentals* 6th edition, Thompson Brooks/Cole, Belmont, California 2008.

[11] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass, F. R. Giordano *Thomas' Calculus*, International Edition, 11th edition, Pearson Addison Wesley 2005.

[12] G. B. Thomas, R. L. Finney, M. D. Weir, F. R. Giordano *Απειροστικός Λογισμός* μετάφραση της 10ης έκδοσης του πρωτοτύπου, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης 2005.

[13] B. L. van der Waerden *Algebra*, Vol. 1, (3rd printing) Frederick Ungar, New York 1977.