Μαθηματικα II

1. Ο τύπος του De Moivre

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n[cos(n\theta) + i\sin(n\theta)].$$

Ρίζες μιγαδικού αριθμού: Εάν $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, οι λύσεις της εξίσωσης $z^n = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ είναι οι n το πλήθος μιγαδικοί αριθμοί

$$z_k = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\Big), \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

και λέγονται n-οστες ρίζες του w.

2. Το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου

Θεώρημα 1. *Έστω ότι οι δεύτερης τάξης μερικές παράγωγοι μιας συνάρτησης f είναι συνεχείς σε κάποιο ανοιχτό δίσκο με κέντρο το (x_0, y_0), και έστω ότι $f_x(x_0, y_0) = 0$ και $f_y(x_0, y_0) = 0$. Έστω*

$$H = H(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2$$

(1) *Εάν $H > 0$ και $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο (x_0, y_0).*

(2) *Εάν $H > 0$ και $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο (x_0, y_0).*

(3) *Εάν $H < 0$ το $f(x_0, y_0)$ δεν είναι ούτε τοπικό μέγιστο, ούτε τοπικό ελάχιστο.*

(4) *Εάν $H = 0$ το κριτήριο δεν δίνει κάποια πληροφορία. Το $f(x_0, y_0)$ μπορεί να είναι τοπικό μέγιστο, ή τοπικό ελάχιστο, ή τίποτα από τα δύο.*

3. Διπλά ολοκληρώματα

(α΄) **Ιακωβιανή ορίζουσα** Αν $x = x(u, v)$ και $y = y(u, v)$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} := \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

(β΄) **Αλλαγή μεταβλητής**

Θεώρημα 2. *Έστω ότι τα D' και D είναι στοιχειώδη χωρία στα uv και xy επίπεδα αντίστοιχα. Έστω ότι η απεικόνιση $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ είναι ένας C^1 μετασχηματισμός του D' επί του D ο οποίος είναι επιπλέον ένα προς ένα εκτός ίσως από σημεία του συνόρου του D. Τότε για κάθε συνάρτηση f ολοκληρώσιμη στο D ισχύει*

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v))\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv,$$

όπου $|\partial(x, y)/\partial(u, v)|$ είναι η απόλυτη τιμή της Ιακωβιανής.

(γ΄) **Πολικές συντεταγμένες** $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r \geq 0$ και $0 \leq \theta < 2\pi$, $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

$$dA = dx\,dy = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right| dr\,d\theta = r\,dr\,d\theta.$$

4. **Τριπλά ολοκληρώματα**

   (α′) **Ιακωβιανή ορίζουσα** Αν $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, και $z = z(u, v, w)$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} := \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial(y,z)}{\partial(v,w)} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,w)} + \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}.$$

   (β′) **Αλλαγή μεταβλητής**

   Θεώρημα 3. *Έστω ότι τα E' και E είναι στοιχειώδη χωρία στους χώρους uvw και xyz αντίστοιχα. Έστω ότι η απεικόνιση $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ είναι ένας C^1 μετασχηματισμός του E' επί του E ο οποίος είναι επιπλέον ένα προς ένα εκτός ίσως από σημεία του συνόρου του E. Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο E, τότε*

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{E'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$$

   όπου $|\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)|$ είναι η απόλυτη τιμή της Ιακωβιανής.

   (γ′) **Κυλινδρικές συντεταγμένες** $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, όπου r και θ είναι οι πολικές συντεταγμένες.

$$dV = dx\,dy\,dz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| dr\,d\theta\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz.$$

   (δ′) **Σφαιρικές συντεταγμένες** $x = \rho\cos\theta\sin\varphi$, $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = \rho\cos\varphi$, $\rho \ge 0$, $0 \le \theta < 2\pi$ και $0 \le \varphi \le \pi$, $\rho = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

$$dV = dx\,dy\,dz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}\right| d\rho\,d\theta\,d\varphi = \rho^2\sin\varphi\;d\rho\,d\theta\,d\varphi.$$

5. **Εξισώσεις ευθείας και επιπέδου**

   Η εξίσωση της ευθείας παράλληλης στο διάνυσμα $\mathbf{u}$ η οποία περιέχει το σημείο $\mathbf{r_0}$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r_0} + t\mathbf{u},$$

   Η εξίσωση του επιπέδου κάθετου στο διάνυσμα $\langle a, b, c\rangle$ το οποίο περιέχει το σημείο (x_0, y_0, z_0)

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

6. **Κλίση, απόκλιση και στροβιλισμός**

   Εάν $f : U \to \mathbb{R}$, όπου U είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, είναι διαφορίσιμη συνάρτηση η **κλίση** της f είναι η διανυσματική συνάρτηση που ορίζεται με τη σχέση

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle.$$

   Έστω $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^3$, όπου U είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, να είναι μια διαφορίσιμη διανυσματική συνάρτηση. Η **απόκλιση** της $\mathbf{f}$ είναι η βαθμωτή συνάρτηση που ορίζεται με τη σχέση

$$\operatorname{div}\mathbf{f} = \nabla\cdot\mathbf{f} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle \cdot \langle f_1, f_2, f_3\rangle = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

Ο **στροβιλισμός** της $\mathbf{f}$ είναι η διανυσματική συνάρτηση που ορίζεται με τη σχέση

$$\operatorname{curl}\mathbf{f} = \nabla\times\mathbf{f} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle \times \langle f_1, f_2, f_3\rangle = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left\langle \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right\rangle.$$

7. **Μετασχηματισμός Laplace.** $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$

Μετασχηματισμός Laplace στοιχειωδών συναρτήσεων		
$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$	
1	$1/s,$	$s > 0$
e^{at}	$1/(s-a),$	$s > a$
$t^n, \quad n = 1, 2, \ldots$	$n!/s^{n+1},$	$s > 0$
$\sin bt$	$b/(s^2+b^2),$	$s > 0$
$\cos bt$	$s/(s^2+b^2),$	$s > 0$
$\sinh bt$	$b/(s^2-b^2),$	$s > \lvert b\rvert$
$\cosh bt$	$s/(s^2-b^2),$	$s > \lvert b\rvert$
$t^r, \quad r > -1$	$\Gamma(r+1)/s^{r+1},$	$s > 0$
$t^{-1/2}$	$\sqrt{\pi/s},$	$s > 0$
$\sqrt{t}$	$\sqrt{\pi}/(2s^{3/2})$	$s > 0$
$t^{n-1/2}, \quad n = 1, 2, \ldots$	$1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}/(2^n s^{n+1/2}),$	$s > 0$

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace	
$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f(at)$	$(1/a)F(s/a)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$(1/s)F(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s), \qquad n = 1, 2, \ldots$