Θέλουμε να κάνουμε απεικονιστική αναγωγή από τη γλώσσα UL στην K_{TM}.
$UL = \{\langle M, q\rangle;$ η κατάσταση q είναι άχρηστη στην TM $M\}$

$K_{TM} = \{\langle M\rangle : L(M) = \emptyset\}$

Θα κάνουμε: $UL \leq_m K_{TM}$

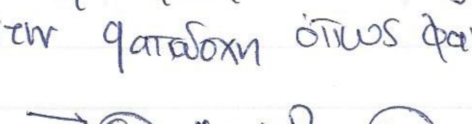
Άρα πρέπει για υπολογίσιμη αναγωγή f έτσι ώστε $\langle M'\rangle = f(\langle M,q\rangle)$ να ισχύει:

$$\langle M,q\rangle \in UL \iff \langle M'\rangle \in K_{TM}$$

Αναγωγή:
Κατασκευάζουμε μια νέα TM M' αλλάζοντας τη συνάρτηση μετάβασης της M.
Περιπτώσεις:
1. $q = q_{αποδοχή}$. Τότε $M' = M$.
2. $q = q_{απόρριψη}$. Τότε η M' προκύπτει από την M ανταλλάσσοντας τις καταστάσεις $q_{αποδοχή}$ με την $q_{απόρριψη}$.

3. Η q δεν είναι τερματική κατάσταση. Έστω ότι η q έχει εισερχόμενες & εξερχόμενες μεταβάσεις όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

Στην M' αντιγράφουμε την συνάρτηση μετάβασης της M με τις εξής αλλαγές:
α) Σβήνουμε όλες τις εξερχόμενες ακμές της κατάστασης q.
β) Οποιαδήποτε μετάβαση σε κατάσταση αποδοχής αντικαθίσταται από μετάβαση σε κατάσταση απόρριψης.
γ) Τέλος, προσθέτουμε μια μετάβαση για οποιοδήποτε σύμβολο από την q στην $q_{αποδοχή}$ όπως φαίνεται παρακάτω:



όλα τα σύμβολα του Γ

Η αναγωγή είναι υπολογίσιμη αφού κάνουμε συγκεκριμένες αλλαγές στη συνάρτηση μετάβασης της M.

Απόδειξη Ισοδυναμίας:

1. Αν $q = q_{αποδ}$.

$\Rightarrow$ Αν $\langle M, q_{αποδ} \rangle \in UL$, τότε $q_{αποδ}$ άχρηστη. Αφού $M' = M$ σε αυτή την περίπτωση, έχουμε ότι $L(M') = \emptyset$. Άρα $\langle M' \rangle \in K_{TM}$. ∎

$\Leftarrow$ Αν $\langle M, q_{αποδ} \rangle \notin UL$, τότε η $q_{αποδ}$ δεν είναι άχρηστη. Αφού $M' = M$ σε αυτή την περίπτωση, έχουμε ότι $L(M') \neq \emptyset$ κ άρα $\langle M' \rangle \notin K_{TM}$. ∎

2. Αν $q = q_{απορριψη}$

$\Rightarrow$ Έστω ότι $\langle M, q_{απορ} \rangle \in UL$. Αυτό σημαίνει ότι η $q_{απορ}$ είναι άχρηστη στην M. Με βάση την κατασκευή σε αυτή την περίπτωση, αυτό σημαίνει ότι η $q_{αποδ}$. είναι άχρηστη στην M'. Άρα $L(M') = \emptyset$. Άρα $\langle M' \rangle \in K_{TM}$. ∎

$\Leftarrow$ Έστω ότι $\langle M, q_{απορ} \rangle \notin UL$. Άρα η $q_{απορ}$. δεν είναι άχρηστη στην M. Άρα, όπως & παραπάνω, η $q_{αποδ}$ δεν είναι άχρηστη στην M'. Άρα: $L(M') \neq \emptyset \Rightarrow M' \notin K_{TM}$ ∎

3. Αν q δεν είναι τερματική κατάσταση.

$\Rightarrow$ Αν $\langle M, q \rangle \in UL$ τότε q άχρηστη. Άρα κ η $q_{αποδ}$. είναι άχρηστη στην M' αφού για να φτάσουμε σε αυτή ο μόνος τρόπος είναι να περάσουμε από τη q. Άρα $L(M') = \emptyset$. Άρα $M' \in K_{TM}$. ∎

$\Leftarrow$ Έστω $\langle M, q \rangle \notin UL$. Τότε η q δεν είναι άχρηστη. Άρα υπάρχει τουλάχιστον μια είσοδος για την οποία η M' φτάνει στη q κ άρα φτάνει στην $q_{αποδ}$. Άρα $L(M') \neq \emptyset$. Άρα: $\langle M' \rangle \notin K_{TM}$. ∎

Σε κάθε περίπτωση αποδείξαμε την ισοδυναμία. Άρα, ολοκληρώσαμε την απεικονιστική αναγωγή.