ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

*ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «**ΘΕΩΡΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ**» - 11/6/2013*

Διάρκεια Εξέτασης (2½ ώρες)

1. (1.5 μονάδες) Έστω $HALT'_{TM}$={⟨M,w⟩ | η M είναι μία χρησμοληπτική TM που τερματίζει σε είσοδο w όταν υπολογίζει με χρησμοδότη για την $HALT_{TM}$}, όπου $HALT_{TM}$ = {⟨M,w⟩ | η M είναι μία TM που τερματίζει σε είσοδο w}. Δείξτε ότι η $HALT'_{TM}$ είναι μη-διαγνώσιμη χρήσει της γλώσσας $HALT_{TM}$.

2. (2 μονάδες) Για κάθε σταθερά k, στο πρόβλημα του k-χρωματισμού μας δίνεται ένα ακατεύθυντο γράφημα του οποίου οι κορυφές θα πρέπει να χρωματισθούν με το πολύ k χρώματα έτσι ώστε κανένα ζευγάρι γειτονικών κορυφών να μην έχει ίδιο χρώμα. Έστω ότι γνωρίζετε ότι το πρόβλημα του 2-χρωματισμού ανήκει στο P ενώ το πρόβλημα του 3-χρωματισμού είναι NP-πλήρες.
α) (1.6) Να δείξετε ότι το πρόβλημα του 5-χρωματισμού είναι και αυτό NP-πλήρες με αναγωγή από το πρόβλημα του 3-χρωματισμού.
β) (0.4) Το πρόβλημα του k-χρωματισμού, για $k \geq 3$, είναι NP-πλήρες ή υπάρχει κάποιο μεγάλο k για το οποίο το πρόβλημα λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο (αιτιολογήστε διαισθητικά);

3. (2 μονάδες)

α) (1 μονάδα) Να δείξετε ότι μία γλώσσα ανήκει στην κλάση NP αν και μόνο αν έχει πολυωνυμικό επαληθευτή.
β) (1 μονάδα) Να δείξετε ότι η κλάση PSPACE είναι κλειστή ως προς την πράξη της σώρευσης και ένωσης.

4. (2 μονάδες) Να αναφέρετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι Σωστές (Σ) ή Λάθος (Λ) χωρίς αιτιολόγηση.

a. Ένας κβαντικός υπολογιστής μπορεί να διαγνώσει περισσότερες γλώσσες από έναν κλασσικό Η/Υ.
b. Ένας υπολογιστής που βασίζεται σε DNA μπορεί να λύσει αποδοτικά NP-πλήρη προβλήματα.
c. Ένας φυσικός αλγόριθμος βασίζεται σε φαινόμενα που συναντιούνται στη φύση.
d. Τα κυψελωτά αυτόματα δεν μπορούν να διαγνώσουν τις γλώσσες που διαγιγνώσκει μία TM.
e. Η πολυπλοκότητα ενός τραγουδιού μπορεί να ορισθεί με βάση την ελάχιστη περιγραφή του.
f. Το σύνολο όλων των γλωσσών στο αλφάβητο Σ={0,1} είναι αριθμήσιμο.
g. Το θεώρημα αναδρομής περιγράφει έναν τρόπο αυτό-αντιγραφής των προγραμμάτων.
h. Το 3-SAT ως NP-πλήρες χρειάζεται εκθετικό χρόνο άρα και εκθετικό χώρο
i. Αν ένα NP-δυσχερές πρόβλημα λυνόταν σε πολυωνυμικό χρόνο τότε P=NP.
j. Το πρόβλημα TQBF είναι PSPACE-δυσχερές.

5. (1.5 μονάδες) **α)** (0.8 μονάδες) Να αποδείξετε ότι για όλες τις NP-πλήρεις γλώσσες A,B,C, $A \leq_p B$ και $B \leq_p C \Rightarrow A \leq_p C$.

β) (0.7 μονάδες) Αναγράψτε τις σχέσεις (αν εμπεριέχονται, τέμνονται κοκ) μεταξύ των εξής κλάσεων πολυπλοκότητας: P, IP, PSPACE, NP, EXPTIME, DTIME(n^{123}), co-P, co-NP, NPSPACE. Αναφέρετε ποιες από αυτές τις σχέσεις έχουν αποδειχτεί και ποιες όχι.

6. (2 μονάδες) Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις με αιτιολόγηση.

α) (0.7 μονάδες) Έστω μια οποιαδήποτε μηχανή Turing M στην οποία θέτουμε ως είσοδο μια οποιαδήποτε λέξη x. Μπορούμε να διαγνώσουμε αν η μηχανή M με είσοδο x περνά από κάθε μη τερματική κατάσταση της το πολύ 5 φορές;

β) (1.3 μονάδες) Έστω μια οποιαδήποτε μηχανή Turing M στην οποία θέτουμε ως είσοδο μια οποιαδήποτε λέξη x. Μπορούμε να διαγνώσουμε αν η μηχανή M με είσοδο x περνά από μια δοσμένη κατάσταση q τουλάχιστον 1 φορά;

Καλή Επιτυχία!!!

Ενδεικτικές Λύσεις

1.

Θα χρησιμοποιήσουμε την τεχνική της διαγωνιοποίησης για να το αποδείξουμε.

- Έστω ότι η H διαγιγνώσκει τη $HALT'_{TM}$ (με χρησμοδότη)
- Ορίζουμε την μηχανή D με είσοδο X ως εξής:
  - Εκτελούμε την $H(X,X)$
  - Αν αποδέχεται τότε ΑΠΕΙΡΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ
  - Αλλιώς ΑΠΟΔΟΧΗ

Η $D(D)$ τερματίζει (σε αποδοχή) αν η $H(D,D)$ απορρίπτει, που σημαίνει ότι η $D(D)$ δεν τερματίζει: ΑΤΟΠΟ.

Η $D(D)$ εγκλωβίζεται αν η $H(D,D)$ αποδέχεται, που σημαίνει ότι η $D(D)$ τερματίζει: ΑΤΟΠΟ.

2.

α) Καταρχήν ο 5-χρωματισμός ανήκει στο NP μιας και μπορούμε να ελέγξουμε μία υποψήφια λύση σε πολυωνυμικό χρόνο (ως προς το πλήθος ακμών και κορυφών). Πράγματι, ελέγχουμε αν κάθε κόμβος έχει ένα από τα πέντε διαθέσιμα χρώματα και αν οι γείτονές του έχουν διαφορετικό χρώμα.

Θα δείξουμε ότι $3 - Χρωματισμός \leq_P 5 - Χρωματισμός$. Έστω ένα στιγμιότυπο του προβλήματος 3-χρωματισμός, το οποίο αποτελείται από ένα γράφημα G. Θα κατασκευάσουμε ένα νέο γράφημα G' έτσι ώστε το G είναι 3-χρωματίσιμο αν και μόνο αν το G' είναι 5-χρωματίσιμο. Το G' είναι το G μαζί με δύο ακόμα κορυφές y και z που συνδέονται με όλες τις υπόλοιπες κορυφές του G'. Το G' μπορεί να κατασκευασθεί από το G σε πολυωνυμικό χρόνο.

Απόδειξη ορθότητας:

$\Rightarrow$ Αν το G είναι 3-χρωματίσιμο τότε το G' μπορεί να χρωματισθεί με 5 χρώματα αν κρατήσουμε το χρωματισμό του G και ζωγραφίσουμε την y με το τέταρτο χρώμα και την z με το πέμπτο χρώμα.

$\Leftarrow$ Αν το G' είναι 5-χρωματίσιμο τότε ξέρουμε ότι οι κόμβοι y και z θα έχουν ένα χρώμα που δεν χρησιμοποιείται σε κανένα άλλο κόμβο αφού και οι δύο είναι γειτονικοί με όλους. Άρα διαγράφοντας τις y και z το γράφημα που μας μένει (G) είναι 3-χρωματίσιμο.

β) Ναι είναι NP-πλήρες για αυθαίρετο $k \geq 3$. Η απόδειξη είναι επαγωγική από τον k-χρωματισμό στον k+1-χρωματισμό με αντίστοιχο τρόπο με αυτόν που δόθηκε στο υποερώτημα (α).

3.

α) Δείτε σχετικές διαφάνειες.

β) Έστω μία γλώσσα L $\in$ PSPACE και η αντίστοιχη TM πολυωνυμικού χώρου M με είσοδο w. Για τη σώρευση, παράγουμε όλους τους δυνατούς τρόπους διαχωρισμού του w σε 1,2,3,…,|w| υπολέξεις των οποίων η συναρμογή δίνει την αρχική λέξη w. Για κάθε τέτοιο συνδυασμό (υπάρχουν εκθετικά πολλοί συνδυασμοί) εκτελούμε την M για κάθε υπολέξη. Αν αποδεχθεί σε όλες τότε ΑΠΟΔΟΧΗ, αλλιώς συνεχίζουμε στον επόμενο συνδυασμό επαναχρησιμοποιώντας το χώρο (δεν αποθηκεύουμε ταυτόχρονα όλους ους συνδυασμούς αλλά τους παράγουμε έναν-έναν κάθε φορά ώστε να επαναχρησιμοποιούμε το χώρο). Αν σε κανένα συνδυασμό δεν υπήρξε ΑΠΟΔΟΧΗ τότε ΑΠΟΡΡΙΨΗ.

Η παραπάνω μηχανή διαγιγνώσκει την L^* σε πολυωνυμικό χώρο. Ομοίως (πιο εύκολα) και για την ένωση και τη συναρμογή.

4.

a. Λ
b. Λ
c. Σ
d. Λ
e. Σ
f. Λ
g. Σ
h. Λ
i. Σ
j. Σ

5.

α)

$A \leq_p B$ και $B \leq_p C \Rightarrow \exists$ συναρτήσεις g,h που ανάγουν το A στο B και το B στο C αντίστοιχα.

Επιπλέον, η g είναι υπολογίσιμη σε χρόνο p(n) και η h είναι υπολογίσιμη σε χρόνο q(m) όπου p και q πολυώνυμα και όπου n και m είναι τα μήκη των εισόδων στις g και h αντίστοιχα.

Έστω $f = h \circ g$, η σύνθεση των δύο συναρτήσεων. Αφού:

$\forall x, x \in A \leftrightarrow g(x) \in B$ και $\forall y, y \in B \leftrightarrow h(y) \in C$

έχουμε ότι $\forall x, x \in A \leftrightarrow f(x) = h \circ g(x) \in C$

Επιπλέον, η f είναι υπολογίσιμη σε χρόνο O(p(n) + q(p(n))) που είναι πολυώνυμο.

β)

P=co-P (από τον ορισμό του P)
PSPACE=NPSPACE (από θεώρημα Savitch)
$P \subseteq NP \cap co\text{-}NP$ (εικάζεται)
$NP \neq co\text{-}NP$ (εικάζεται)
$NP, co\text{-}NP \subseteq PSPACE \subseteq EXPTIME$ (εικάζεται)
$P \subset EXPTIME$ (έχει αποδειχτεί – Θεώρημα χρονικής ιεραρχίας)
IP=PSPACE (έχει αποδειχτεί)
$DTIME(n^{123}) \subset P$ (από ορισμό P)

6.

α) Μπορούμε να αποφασίζουμε αν μια μηχανή Μ με είσοδο *x* περνά το πολύ 5 φορές από κάθε μη τερματική κατάσταση της με το εξής αλγόριθμο:

Σε κάθε κατάσταση της Μ, θεωρούμε ένα μετρητή διελεύσεων που αυξάνει κατά 1 σε κάθε βήμα που η Μ διέρχεται από την κατάσταση αυτή όταν τρέχει με είσοδο *x*. Αυτή η αλγοριθμική κατασκευή γίνεται σε πεπερασμένο χρόνο, διότι το πλήθος των καταστάσεων της Μ είναι πεπερασμένο, όπως και κάθε μετρητής. Τέλος, σε πεπερασμένο πλήθος βημάτων της Μ με είσοδο *x*, θα συμβεί ένα από τα δύο παρακάτω ενδεχόμενα:

1. Όταν η Μ τρέχει με είσοδο *x,* ο μετρητής διελεύσεων από κάποια κατάσταση της Μ θα υπερβεί τις 5 διελεύσεις. Άρα η Μ με είσοδο *x* ΔΕΝ περνά από κάθε κατάσταση της το πολύ 5 φορές. Οπότε ο αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος αποφασίζει ΌΧΙ.

2. Η Μ με είσοδο *x* τερματίζει πριν κανένας μετρητής διελεύσεων να υπερβεί το 5. Τότε η Μ με είσοδο *x* ΠΕΡΝΑ από κάθε κατάσταση της το πολύ 5 φορές. Οπότε ο αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος αποφασίζει ΝΑΙ.

β) Είναι μη διαγνώσιμο το πρόβλημα, διότι μπορούμε να ανάγουμε το πρόβλημα του τερματισμού σε αυτό. Έστω (M,x) οποιοδήποτε στιγμιότυπο του προβλήματος του τερματισμού. Έστω ότι είχαμε μια μηχανή R η οποία με είσοδο (M, x, q) απαντούσε ΝΑΙ ανν η M(x) περνούσε από την κατάσταση q τουλάχιστον 1 φορά. Τότε, εκτελώντας την R με είσοδο (M, x, h), όπου h η κατάσταση τερματισμού της M, θα μπορούμε να αποφασίσουμε αν η M(x) τερματίζει ή ΌΧΙ, άτοπο, διότι λύσαμε το μη διαγνώσιμο πρόβλημα του τερματισμού.