Λυμένες Ασκήσεις Σχετικές με Κεφαλαίο 3

ΤΜς – Ισοδυναμία Παραλλαγών ΤΜ – Βασικές Ιδιότητες Γλωσσών

Άσκηση. Σχεδιάστε ΤΜ που να διαγιγνώσκει τη γλώσσα $\Lambda = \{w\#w^R | w \in \{0,1\}^*\}$. Με w^R συμβολίζουμε την αντίστροφη λέξη μίας λέξης w. Η σχεδίαση να γίνει λεκτικά (δεν χρειάζεται να ορίσετε τυπικά την ΤΜ).

<u>Λύση:</u>

Θα θεωρήσουμε μία μηχανή με 2 ταινίες (A – που περιέχει και την είσοδο – και B) μιας και αυτή από τα γνωστά είναι ισοδύναμη με μία μονοταινιακή ΤΜ. Ακολουθεί η περιγραφή της:

1. Αντιγράφεται η είσοδος στη ταινία B.
2. Η κεφαλή της ταινίας A τοποθετείται στο αριστερότερο κελί ενός αυτή της ταινίας Β στο δεξιότερο. Κατά τη διάρκεια αυτών των μετακινήσεων ελέγχεται αν η είσοδος έχει τη σωστή μορφή (σε μία από τις δύο ταινίες). Αν δεν έχει σωστή μορφή ΑΠΟΡΡΙΨΗ.
3. Έλεγχος αν τα σύμβολα που διαβάζουν οι κεφαλές είναι ίδια. Αν όχι τότε ΑΠΟΡΡΙΨΗ αλλιώς μετακινούμε τη κεφαλή της Α μία θέση δεξιά και της Β μία θέση αριστερά και επαναλαμβάνουμε το (3).
4. Αν μία εκ των κεφαλών διαβάσει το χαρακτήρα # τότε αν και η άλλη διαβάσει # ΑΠΟΔΟΧΗ αλλιώς ΑΠΟΡΡΙΨΗ.

Άσκηση 3.18 (Sipser).Δείξτε ότι μια γλώσσα είναι διαγνώσιμη αν και μόνο αν υπάρχει απαριθμητής που να την απαριθμεί με λεξικογραφική σειρά.

<u>Λύση:</u>

$\Longrightarrow$ Αν μία γλώσσα Λ είναι διαγνώσιμη τότε υπάρχει μία ΤΜ M_Λ που την διαγιγνώσκει. Θα κατασκευάσουμε ένα λεξικογραφικό απαριθμητή E_Λ που να απαριθμεί τη Λ λεξικογραφικά.

Η E_Λ:

1. Παράγουμε λεξικογραφικά όλες τις λέξεις $w \in \Sigma^*$.
2. Πάρε την τρέχουσα λέξη w:
    a. Εκτέλεσε την M_Λ σε είσοδο w
    b. Αν η M_Λ αποδεχθεί τότε εκτύπωσε την w. Αν απορρίψει συνέχισε με το επόμενο w.

Δεδομένης της λεξικογραφικής διάταξης με την οποία παράγουμε τα w ο E_Λ απαριθμεί λεξικογραφικά την Λ.

$\Longleftarrow$ Για να φτιάξουμε το διαγνωστή M_Λ από τον λεξικογραφικό απαριθμητή E_Λ θα εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι οι λέξεις είναι λεξικογραφικά παραγμένες από τον E_Λ. Για παράδειγμα, αν ισχύει $w < q$ (όπου το < είναι σε σχέση με τη λεξικογραφική διάταξη), για δύο λέξεις $w, q \in \Sigma^*$, τότε αποκλείεται η λέξη w να βρίσκεται στις λέξεις που θα εκτυπωθούν μετά την q.

Η M_Λ για είσοδο $\langle w \rangle$

1. Εκτέλεσε την E_Λ και για κάθε παραγόμενη έξοδο u:
    a. Αν $w > u$ συνέχισε με την επόμενη έξοδο της E_Λ
    b. Αν $w = u$ ΑΠΟΔΟΧΗ
    c. Αν $w < u$ ΑΠΟΡΡΙΨΗ

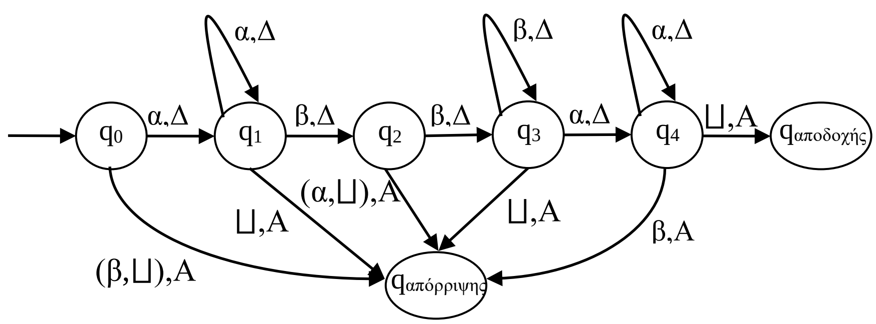
Άσκηση 1: Κατασκευάστε (αναλυτικά) Turing Μηχανή (TM) που να ***διαγιγνώσκει*** τη γλώσσα $L(\alpha^*\alpha\beta\beta^*\beta\alpha^*\alpha)$ των συμβολοσειρών που περιγράφονται από την κανονική έκφραση $\alpha^*\alpha\beta\beta^*\beta\alpha^*\alpha$.
Να εκτελέσετε τον υπολογισμό για είσοδο *ααββββα* και *αββαβα*.

<u>Λύση:</u>

Καταρχήν θα πρέπει να ορίσουμε την 7-άδα $\left(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\alpha\pi o\delta o\chi\acute{\eta}\varsigma}, q_{\alpha\pi\acute{o}\rho\rho\iota\psi\eta\varsigma}\right)$ που ορίζει την TM για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

$$\Sigma = \{\alpha, \beta\}, \Gamma = \{\alpha, \beta, \sqcup\}$$

όπου ⊔ είναι το σύμβολο του κενού. Η συνάρτηση μετάβασης $\delta: Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{A, \Delta\}$ είναι η εξής:



Η κατάσταση q_0 είναι η εναρκτήρια κατάσταση ενώ με $q_{\alpha\pi o\delta o\chi\acute{\eta}\varsigma}$ και $q_{\alpha\pi\acute{o}\rho\rho\iota\psi\eta\varsigma}$ είναι η κατάσταση αποδοχής και απόρριψης αντίστοιχα. Τέλος το σύνολο των καταστάσεων είναι

$$Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$$

<u>Για είσοδο *ααββββα*:</u>
$q_0\alpha\alpha\beta\beta\beta\beta\alpha$
$aq_1\alpha\beta\beta\beta\beta\alpha$
$aaq_1\beta\beta\beta\beta\alpha$
$\alpha\alpha\beta q_2\beta\beta\beta\alpha$
$\alpha\alpha\beta\beta q_3\beta\beta\alpha$
$\alpha\alpha\beta\beta\beta q_3\beta\alpha$
$\alpha\alpha\beta\beta\beta\beta q_3\alpha$
$\alpha\alpha\beta\beta\beta\beta\alpha q_4$
$\alpha\alpha\beta\beta\beta\beta q_{\alpha\pi o\delta o\chi\acute{\eta}\varsigma}\alpha$

<u>Για είσοδο *αββαβα*:</u>
$q_0\alpha\beta\beta\alpha\beta\alpha$
$\alpha q_1\beta\beta\alpha\beta\alpha$
$\alpha\beta q_2\beta\alpha\beta\alpha$
$\alpha\beta\beta q_3\alpha\beta\alpha$
$\alpha\beta\beta\alpha q_4\beta\alpha$
$\alpha\beta\beta q_{\alpha\pi\acute{o}\rho\rho\iota\psi\eta\varsigma}\alpha\beta\alpha$

<u>Άσκηση 2:</u> Σε μία ΤΜ με δισδιάστατη ταινία, η ταινία εκτείνεται απείρως σε δύο διαστάσεις και η κεφαλή της ΤΜ μπορεί να μετακινηθεί προς τα πάνω ↑, προς τα κάτω ↓, προς τα δεξιά →, προς τα αριστερά ← και να παραμείνει στάσιμη ─. Θεωρούμε αρχικά ότι η είσοδος εκτείνεται προς τα δεξιά από την αρχική θέση της κεφαλής:

1. Περιγράψτε αναλυτικά την 7-άδα που περιγράφει αυτή τη ΤΜ (προσέξτε ότι ενδεχομένως θα χρησιμοποιήσετε επιπλέον σύμβολα για τον ορισμό της ΤΜ – θυμηθείτε το κενό που χρησιμοποιήσαμε επιπλέον στην απλή ΤΜ).
2. Χρησιμοποιώντας μία πολυταινιακή αμφίπλευρη ΤΜ (οι ταινίες είναι άπειρου μήκους και προς τις δύο κατευθύνσεις) να δείξετε ότι η διασδιάστατη είναι ισοδύναμη με την απλή ΤΜ (έχουμε ήδη δείξει ότι η πολυταινιακή αμφίπλευρη είναι ισοδύναμη). Δεν απαιτούνται λεπτομέρειες αλλά μία απλή περιγραφή.

<u>Λύση:</u>

1. Καταρχήν θα πρέπει να ορίσουμε την 7-άδα $\left(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{αποδοχής}, q_{απόρριψης}\right)$ που ορίζει την ΤΜ για το συγκεκριμένο πρόβλημα, όπου Q είναι το σύνολο καταστάσεων, με αρχική κατάσταση q_0, κατάσταση αποδοχής $q_{αποδοχής}$ και κατάσταση απόρριψης $q_{απόρριψης}$. Η είσοδος σε αυτή τη μηχανή ξεκινά από το (0,0) και εκτείνεται προς τα δεξιά. Το Σ είναι το αλφάβητο της εισόδου ενώ το Γ είναι το αλφάβητο της ταινίας. Επίσης ισχύει ότι:

$$\Gamma \supseteq \{\sqcup\} \cup \Sigma$$

με συνάρτηση μετάβασης:

$$\delta: Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{\rightarrow, \leftarrow, \uparrow, \downarrow, -\}$$

Μπορούμε να ορίσουμε μία φάση σαν την τριάδα $\langle q, \langle x, y \rangle, f \rangle$, όπου $q \in Q$ είναι η τρέχουσα κατάσταση, το ζεύγος $\langle x, y \rangle$ ακέραιων αριθμών είναι οι συντεταγμένες της δισδιάστατης ταινίας στην οποία δείχνει η κεφαλή και f μία πεπερασμένη μερική συνάρτηση από το $N \times N$ στο Σ που περιγράφει τα περιεχόμενα της ταινίας. Η αρχική φάση είναι η

$$\langle q_0, \langle 0,0 \rangle, \{\langle 0,0 \rangle \mapsto w_1, \langle 1,0 \rangle \mapsto w_2, \dots, \langle n, 0 \rangle \mapsto w_n\} \rangle$$

για είσοδο $w = w_0 w_1 \dots w_n$. Μία φάση $\langle q, \langle x, y \rangle, f \rangle$ αποδίδει μία νέα φάση $\langle q', \langle x', y' \rangle, f' \rangle$ αν

$$\delta\big(q, f(x, y)\big) = (q', \rho, D)$$

και ισχύουν οι εξής περιορισμοί:

- Αν $D = -$ τότε $x' = x$ και $y' = y$
- Αν $D = \leftarrow$ τότε $x' = x - 1$ και $y' = y$
- Αν $D = \rightarrow$ τότε $x' = x + 1$ και $y' = y$
- Αν $D = \uparrow$ τότε $x' = x$ και $y' = y + 1$

- Αν $D = \downarrow$ τότε $x' = x$ και $y' = y - 1$

Τέλος $f' = f[\langle x, y\rangle \mapsto \rho]$. Για παράδειγμα, αν $\delta(q_0, \alpha) = (q_3, c, \uparrow)$ τότε η φάση:

$$\langle q_0, \langle 0,0\rangle, \{\langle 0,0\rangle \mapsto \alpha, \langle 1,0\rangle \mapsto \beta\}\rangle$$

αποδίδει τη φάση

$$\langle q_3, \langle 0,1\rangle, \{\langle 0,0\rangle \mapsto c, \langle 1,0\rangle \mapsto \beta, \langle 0,1\rangle \mapsto \sqcup\}\rangle$$

2. Καταρχήν μία δισδιάστατη TM μπορεί με τετριμμένο τρόπο να εξομοιώσει μία μονοδιάστατη TM.

Για την άλλη κατεύθυνση η βασική ιδέα για να δείξουμε την ισοδυναμία είναι να καταλάβουμε ότι σε κάθε χρονική στιγμή η δισδιάστατη TM έχει προσπελάσει μία πεπερασμένη περιοχή της άπειρης δισδιάστατης ταινίας. Αυτή τη περιοχή την ονομάζουμε ενεργή περιοχή.

Η εξομοίωση γίνεται ως εξής:

1. Αποθηκεύουμε την δισδιάστατη ταινία ανά γραμμές. Για να ξεχωρίζουμε τις γραμμές μεταξύ τους χρησιμοποιούμε ένα ειδικό σύμβολο, έστω το $. Χρησιμοποιούμε μία αμφίπλευρη ταινία για να αποθηκεύσουμε την δισδιάστατη ταινία. Έτσι, ξεκινώντας από την αρχική θέση στην αμφίπλευρη ταινία προς τα δεξιά γράφουμε τις γραμμές που έχουν θετικά *y* ενώ προς τα αριστερά γράφουμε τις γραμμές που έχουν αρνητικά *y* (δείτε παρακάτω το σχήμα, το χρωματισμένο κελί είναι το κελί (0,0)). Αποθηκεύουμε στην ουσία την ορθογώνια περιοχή που περιλαμβάνει όλα τα κελιά που έχουμε προσπελάσει. Το κενό στην δισδιάστατη ταινία το αναπαριστούμε με ⊓ στην μονοδιάστατη ταινία.

⊔	⊔	⊔	⊔	⊔	⊔	⊔	⊔	⊔
⊔	⊔	⊔	⊔	⊔	⊔	⊔	⊔	⊔
⊔	⊔	⊔	α	⊔	⊔	α	α	⊔
⊔	⊔	⊔	⊔	⊔	⊔	α	⊔	⊔
⊔	⊔	β	⊔	α	α	β	α	⊔
⊔	⊔	β	⊔	α	⊔	⊔	⊔	⊔
⊔	⊔	α	α	⊔	⊔	⊔	α	⊔
⊔	⊔	⊔	⊔	⊔	⊔	⊔	⊔	⊔

Αναπαράσταση σε μονοδιάστατη αμφίπλευρη ταινία.

⊔	$	α	α	⊓	⊓	⊓	α	$	β	⊓	α	⊓	⊓	⊓	$	β	⊓	α	α	β	α	$	⊓	⊓	⊓	⊓	α	⊓	$	α	⊓	⊓	α	α	$	⊔

2. Όταν η μηχανή μετακινείται δεξιά τότε αν η ενεργή περιοχή δεν αλλάζει απλά μετακινούμαστε δεξιά στην μονή ταινία (και δεν βρίσκουμε σίγουρα $). Αν η ενεργή περιοχή μεγαλώσει τότε σημαίνει ότι στην μονοδιάστατη ταινία η κεφαλή είναι σε $. Σε αυτή τη περίπτωση αυξάνουμε κατά ένα προς τα δεξιά την ενεργή περιοχή προσθέτοντας ένα κενό ⊓ πριν από κάθε $ με την εξαίρεση του αριστερότερου. Συμμετρικά ισχύει το

ίδιο όταν μετακινείται προς τα αριστερά. Όταν μετακινείται προς τα πάνω, τότε αν η ενεργή περιοχή δεν αλλάζει. Σε αυτή τη περίπτωση μετακινούμαστε προς τα δεξιά για τόσα βήματα όσα και το τρέχον μήκος της γραμμής (αποθηκεύουμε το τρέχον μήκος σε μία δεύτερη ταινία). Έπειτα προχωράμε μέχρι το επόμενο $ και προχωράμε τόσες θέσεις όσες έχουν αποθηκευτεί στην δεύτερη ταινία μέχρι να βρούμε τη σωστή θέση. Σε περίπτωση που η ενεργή περιοχή αυξηθεί μετακινούμαστε στο τελευταίο $ και προσθέτουμε άλλη μία γραμμή με κατάλληλο μήκος (το τρέχον μήκος της γραμμής αποθηκεύεται στη δεύτερη ταινία).

Αυτή είναι μία γενική περιγραφή της εξομοίωσης.

Άσκηση 3.15 (Sipser): Να δείξετε ότι η κλάση των διαγνώσιμων γλωσσών είναι κλειστή ως προς α) τη συναρμογή, β) τη σώρευση, γ) το συμπλήρωμα και δ) την τομή.

<u>Λύση:</u>

α) Έστω δύο διαγνώσιμες γλώσσες *Α* και *Β* και οι αντίστοιχες ΤΜ M_A και M_B που τις διαγιγνώσκουν. Η γλώσσα *Λ=ΑΒ* που προκύπτει από τη συναρμογή των *Α* και *Β* είναι και αυτή διαγνώσιμη αφού θα κατασκευάσουμε μία ΤΜ $M_Λ$ που τη διαγιγνώσκει. Έστω ότι η είσοδος στην $M_Λ$ είναι η λέξη $w = w_1 w_2 \dots w_n$. Παράγουμε όλα τα δυνατά ζεύγη n ζεύγη $(\varepsilon, w_1 w_2 \dots w_n), (w_1, w_2 \dots w_n), \dots, (w_1 w_2 \dots w_{n-1}, w_n)$ λέξεων των οποίων η συναρμογή δίνει το w. Για κάθε τέτοιο ζευγάρι τρέχουμε τις M_A και M_B και έπειτα την M_B και M_A. Αυτή η διαδικασία γίνεται για όλα τα ζευγάρια σειριακά. Αφού η M_A και η M_B είναι διαγνωστές η διαδικασία αυτή θα τερματίσει. Αν κάποια από αυτές τις εκτελέσεις αποδεχθεί τότε αποδεχόμαστε. Αν όλα τα ζευγάρια απορρίψουν τότε απορρίπτει.

Αν η λέξη δεν είναι αποτέλεσμα συναρμογής τότε η μηχανή σίγουρα θα απορρίψει ενώ αν η λέξη έχει προέλθει από συναρμογή τότε σίγουρα κάποιο ζευγάρι θα γίνει αποδεκτό και άρα σωστά η μηχανή διαγιγνώσκει την γλώσσα Λ. Επομένως, η κλάση των διαγνώσιμων γλωσσών είναι κλειστή ως προς την πράξη της συναρμογής.

β) Ομοίως με (α) μόνο που έχουμε 2^n πλειάδες να ελέγξουμε.

γ) Απλά αντιστρέφουμε τις εξόδους της ΤΜ (ΝΑΙ σε ΟΧΙ και ΟΧΙ σε ΝΑΙ)

δ) Αν και οι δύο ΤΜ απαντήσουν ΝΑΙ τότε αποδεχόμαστε. Αν έστω μία απαντήσει ΟΧΙ τότε απορρίπτουμε.

Άσκηση 3.16 (Sipser): Να δείξετε ότι η κλάση των αναγνωρίσιμων γλωσσών είναι κλειστή ως προς α) τη συναρμογή, β) τη σώρευση και γ) την τομή.

<u>Λύση:</u>

α) Έστω δύο αναγνωρίσιμες γλώσσες *A* και *B* και οι αντίστοιχες TM M_A και M_B που τις διαγιγνώσκουν. Η γλώσσα *Λ=AB* που προκύπτει από τη συναρμογή των *A* και *B* είναι και αυτή αναγνωρίσιμη αφού θα κατασκευάσουμε μία TM $M_Λ$ που την αναγνωρίζει. Έστω ότι η είσοδος στην $M_Λ$ είναι η λέξη $w = w_1 w_2 \ldots w_n$. Παράγουμε όλα τα δυνατά ζεύγη n ζεύγη $(\varepsilon, w_1 w_2 \ldots w_n), (w_1, w_2 \ldots w_n), \ldots, (w_1 w_2 \ldots w_{n-1}, w_n)$ λέξεων των οποίων η συναρμογή δίνει το w. Για κάθε τέτοιο ζευγάρι τρέχουμε τις M_A και M_B. Αυτή η διαδικασία γίνεται για όλα τα ζευγάρια παράλληλα μιας και δεν ξέρουμε αν κάθε ένα από αυτά τα ζευγάρια τελικά θα τερματίσει. Αφού η M_A και η M_B είναι αναγνωριστές η διαδικασία αυτή θα τερματίσει αν αποδεχτούν μόνο. Αν κάποια από αυτές τις εκτελέσεις αποδεχθεί τότε αποδεχόμαστε.

Αν η λέξη δεν είναι αποτέλεσμα συναρμογής τότε η μηχανή δεν γνωρίζουμε τι κάνει. Αν η λέξη έχει προέλθει από συναρμογή τότε σίγουρα κάποιο ζευγάρι θα γίνει αποδεκτό και άρα σωστά η μηχανή θα αναγνωρίσει τη γλώσσα Λ. Επομένως, η κλάση των αναγνωρίσιμων γλωσσών είναι κλειστή ως προς την πράξη της συναρμογής.

β) Ομοίως με (β) της 3.15 με τη διαφορά ότι όλες οι TM θα πρέπει να τρέχουν παράλληλα μιας και δεν υπάρχει εγγύηση ότι θα τερματίσουν.

γ) Αν και οι δύο TM (τρέχουν παράλληλα) απαντήσουν ΝΑΙ τότε αποδεχόμαστε.

Άσκηση 3.14 (Sipser): Ένα αυτόματο ουράς είναι παρόμοιο με ένα αυτόματο στοίβας, με τη διαφορά ότι στη θέση της στοίβας έχει μία ουρά. Με τον όρο ουρά, εννοούμε μία ταινία που επιτρέπει την εγγραφή συμβόλων μόνο στο αριστερό της άκρο και την ανάγνωση μόνο στο δεξιό. Συγκεκριμένα, κάθε εγγραφή (ή εισαγωγή) προσθέτει ένα σύμβολο στο αριστερό άκρο της ουράς και κάθε ανάγνωση (ή εξαγωγή) διαβάζει και αφαιρεί ένα σύμβολο από το δεξιό άκρο. Όπως και στα αυτόματα, η είσοδος τοποθετείται σε μία ξεχωριστή μη εγγράψιμη ταινάι εισόδου, η κεφαλή της οποίας μπορεί να κινείται μόνο από τα αριστερά προς τα δεξιά. Επιπλέον, η λέξη εισόδου ακολουθείται από ένα σύμβολο διαστήματος, έτσι ώστε η μηχανή να μπορεί να αναγνωρίσει το τέλος της. Το αυτόματο ουράς αναγνωρίζει τη λέξη εισόδου εάν, σε οποιαδήποτε στιγμή του υπολογισμού μεταβεί σε κάποια ειδική κατάσταση αποδοχής. Δείξτε ότι μία γλώσσα μπορεί να αναγνωριστεί από ένα αιτιοκρατικό αυτόματο ουράς αν και μόνο αν είναι αναγνωρίσιμη.

Λύση:

Θα πρέπει να δείξουμε πως εξομοιώνεται ένα αυτόματο ουράς από μία ΤΜ και το αντίστροφο. Ένα αυτόματο ουράς εξομοιώνεται εύκολα από μία ΤΜ με άπειρη ταινία και προς τις δύο κατευθύνσεις απλά εξομοιώνοντας τη λειτουργία της ουράς πάνω στην ταινία. Τα δύο άκρα της ουράς στην ΤΜ μπορούν να καθοριστούν με βάση ένα ειδικό σύμβολο.

Πιο πολύ ενδιαφέρον έχει το αντίστροφο. Έστω λοιπόν ότι μία γλώσσα Λ είναι αναγνωρίσιμη, δηλαδή υπάρχει ΤΜ Μ που να την αναγνωρίζει. Τότε θα κατασκευάσουμε ένα αυτόματο ουράς Α που να αναγνωρίζει την Λ. Για να το κάνουμε αυτό θα εξομοιώσουμε κάθε βήμα της Μ από την Α. Η Α αρχικά διαπερνά την είσοδο εισάγοντας κάθε σύμβολο της εισόδου στην ουρά.

Έστω ότι η μηχανή Μ βρίσκεται στη φάση $uaq_ibv, q_i \in Q, a, b \in \Gamma, u, v \in \Gamma^*$ και εάν για τη συνάρτηση μεταβάσεων ισχύει $\delta(q_i, b) = (q_j, c, A)$ τότε η νέα φάση θα είναι η uq_jacv. Η μηχανή Α αποθηκεύει την ταινία ως εξής: το σύμβολο της κεφαλής της Μ θα είναι πάντα στο δεξιότερο άκρο της. Στην ουρά θα προηγούνται όλες οι θέσεις μέχρι την αρχή της ταινίας και έπειτα (καθώς σαρώνουμε την ουρά προς τα αριστερά) θα υπάρχουν όλα τα σύμβολα από το τέλος της ταινίας μέχρι αριστερά της θέσης της κεφαλής. Επίσης, προσθέτουμε και ειδικά σύμβολα έτσι ώστε για κάθε περίπτωση να μπορούμε να μαρκάρουμε την αρχική θέση της ταινίας στην ουρά και το τέλος της κάθε φορά.

Η μηχανή Α πριν την εφαρμογή της συνάρτησης μετάβασης θα έχει στο δεξί της άκρο το σύμβολο b, εκεί δηλαδή που δείχνει η κεφαλή της Μ. Έπειτα, αν κάνουμε προς τα αριστερά κίνηση απλά εξάγουμε το σύμβολο, το αλλάζουμε και έπειτα το εισάγουμε στην αρχή της ουράς. Αν μετακινηθούμε προς τα δεξιά και δεν είμαστε στο τέλος της ταινίας που έχουμε σαρώσει (ειδικό σύμβολο) τότε εξάγουμε το πρώτο σύμβολο, το αλλάζουμε και το ενθέτουμε πάλι στην ουρά. Κάνουμε το ίδιο πάλι τόσες φορές όσες το ενεργό μήκος της ταινίας -1 (αυτό μπορούμε να το διατηρούμε σε ξεχωριστή ταινία). Αν η μετακίνηση δεξιά γίνει όταν το σύμβολο είναι μαρκαρισμένο για το τέλος της ενεργής ταινίας τότε ενθέτουμε ένα μαρκαρισμένο κενό στην ουρά, εξάγουμε το σύμβολο και το αλλάζουμε σε ένα μη μαρκαρισμένο και τέλος το επαναλαμβάνουμε τόσες φορές μέχρι να φτάσουμε στο μαρκαρισμένο σύμβολο τέλους ενώ ταυτόχρονα αυξάνουμε το ενεργό μήκος της ταινίας κατά 1.

Άσκηση: Χρησιμοποιώντας ανταιτιοκρατία, να δείξετε ότι η κλάση των διαγνώσιμων (αναγνωρίσιμων) γλωσσών είναι κλειστή ως προς α) τη συναρμογή, β) την ένωση και γ) τη σώρευση.

Λύση:

Έστω Λ και Κ δύο διαγνώσιμες γλώσσες με διαγνωστές (ΤΜς) $M_Λ$ και M_K.

α) Θα δείξουμε ότι και η ΛΚ είναι διαγνώσιμη.

Έστω Ν η ανταιτιοκρατική ΤΜ που σε είσοδο $\langle w \rangle$ την σπάει ανταιτιοκρατικά σε δύο λέξεις x και y έτσι ώστε xy=w. Τότε το y το αντιγράφει στην δεύτερη ταινία της ενώ το x το αφήνει στην πρώτη. Έπειτα η Ν εξομοιώνει την $M_Λ$ σε x και αν αποδεχθεί τότε εξομοιώνει την M_K σε y και αν αποδεχθεί τότε και η Ν αποδέχεται αλλιώς απορρίπτει.

Απόδειξη: Έστω ότι $w \in ΛΚ$. Τότε η w μπορεί να γραφεί ως w=xy έτσι ώστε $x \in Λ$ και $y \in K$. Άρα, η $M_Λ$ θα αποδεχθεί το x και η M_K θα αποδεχθεί το y, το οποίο σημαίνει ότι $w \in L(N)$.

Αντίστροφα: Αν $w \in L(N)$ τότε σημαίνει ότι υπάρχει ένας αποδεκτικός υπολογισμός, το οποίο σημαίνει ότι και η λέξη w μπορεί να σπάσει σε x και y έτσι ώστε οι $M_Λ$ και M_K να αποδέχονται την είσοδό τους. Άρα, αφού $x \in Λ$ και $y \in K$ σημαίνει ότι και $w \in ΛΚ$.

β) Η Ν επιλέγει ανταιτιοκρατικά ποια από τις δύο μηχανές θα εκτελέσει σε είσοδο w. Η συνέχεια της απόδειξης είναι παρόμοια με το (α).

γ) Η Ν επιλέγει ανταιτιοκρατικά μία διάσπαση της λέξης w σε υπολέξεις έτσι ώστε $w=w_1w_2w_3 \ldots w_k$. Έπειτα εφαρμόζει την $M_Λ$ (αφού μιλάμε για τη γλώσσα $Λ^*$) και την εξομοιώνει σε κάθε τέτοια λέξη. Αν τις αποδεχθεί όλες τότε αποδεχόμαστε. Αν για καμία τέτοια διάσπαση δεν υπάρχει αποδοχή τότε απορρίπτουμε.

Για τις αναγνωρίσιμες γλώσσες οι αποδείξεις είναι ίδιες με τη διαφορά ότι δεν έχουμε απόρριψη.

Άσκηση: Να κατασκευάσετε ντετερμινιστική μηχανή Turing M με αλφάβητο εισόδου Σ = {0, 1, +} και αλφάβητο ταινίας {0, 1, +, #, $}, όπου το σύμβολο $ είναι βοηθητικό, το + είναι διαχωριστικό σύμβολο, και το # σύμβολο του κενού κελιού. Η M διαβάζει την λέξη εισόδου και αποδέχεται αν είναι της μορφής $w+w^c$, όπου ορίζουμε ότι η λέξη w^c (δεξιά του διαχωριστικού +) έχει *αντίθετα* αντίστοιχα γράμματα από την λέξη w (αριστερά του +), όπου αντίθετο του 0 είναι το 1, ενώ του 1 το 0. Για παράδειγμα, με είσοδο 010+101 η M αποδέχεται, ενώ με είσοδο 011+101 η M απορρίπτει. Προς χάριν απλότητας, θεωρήστε ότι η είσοδος είναι της μορφής u+v όπου $u,v \in \{0,1\}^*$, δηλαδή ότι η είσοδος περιέχει ακριβώς ένα διαχωριστικό σύμβολο.

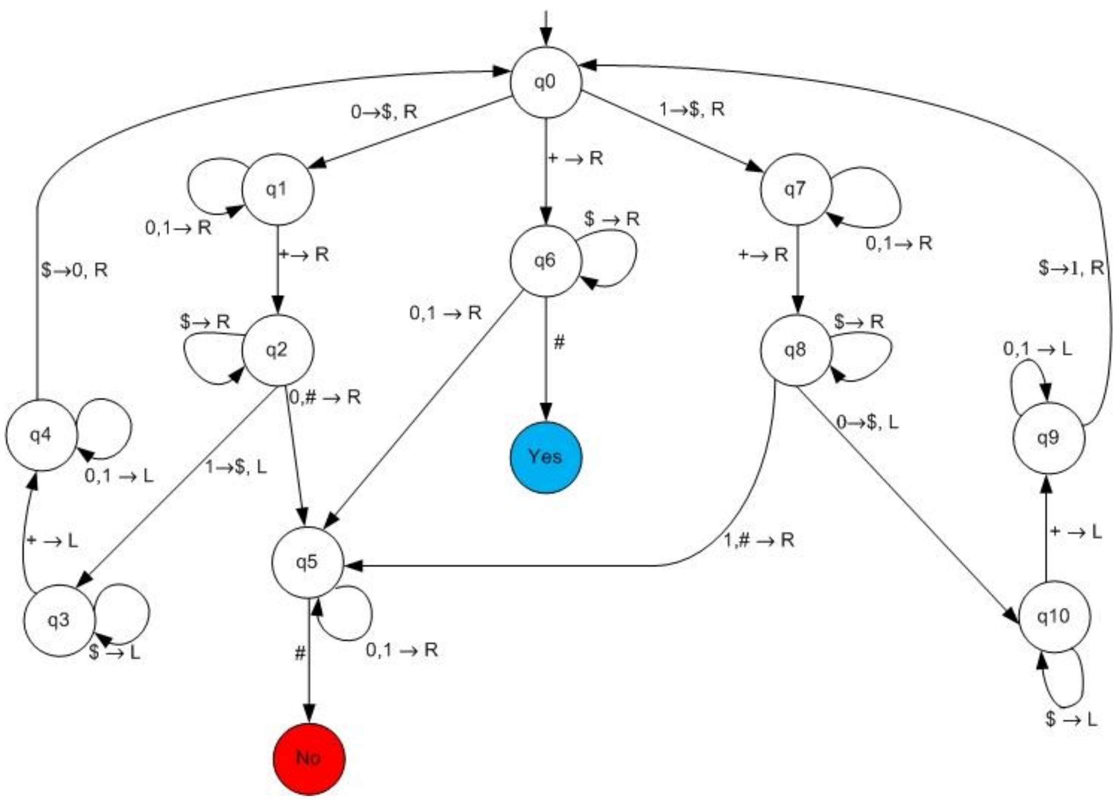
(Α) Δώστε άτυπη περιγραφή της παραπάνω μηχανής Turing.

(Β) Δώστε το διάγραμμα καταστάσεων της M.

Α) Αρχικά η μηχανή διαβάζει το 1ο γράμμα αριστερά *σ*, το μαρκάρει με το ειδικό σύμβολο $ και εισέρχεται σε μια ειδική κατάσταση ώστε να «θυμάται» το γράμμα *σ*. Προσπερνά προς τα δεξιά όλα τα γράμματα {0,1}, ως το σύμβολο +. Εκεί αλλάζει κατάσταση ώστε, πλέον κινούμενη δεξιά, αναζητά το πρώτο αμαρκάριστο (μαρκάρει με $) σύμβολο {0,1}, για να ελέγξει αν είναι αντίθετο ή όχι του γράμματος *σ* που «θυμάται». Μόλις το βρει, αν είναι αντίθετο του *σ* το μαρκάρει $, αλλιώς απορρίπτει. Μετά επιστρέφει προς τα πίσω, προσπερνώντας προς τα αριστερά όλα τα γράμματα μέχρι να βρει το $. Μόλις βρει το $ ξαναγράφει το σύμβολο *σ*. Κάνει ένα βήμα δεξιά, αν βρει γράμμα 0 ή 1 το μαρκάρει με $, επαναλαμβάνει την παραπάνω διαδικασία. Αλλιώς, αν βρει το σύμβολο +, προχωρά προς τα δεξιά προσπερνώντας τα σύμβολα που συναντά και αν μετά από $ συναντήσει # αποδέχεται, αλλιώς απορρίπτει.

(Β)

Το διάγραμμα καταστάσεων είναι:

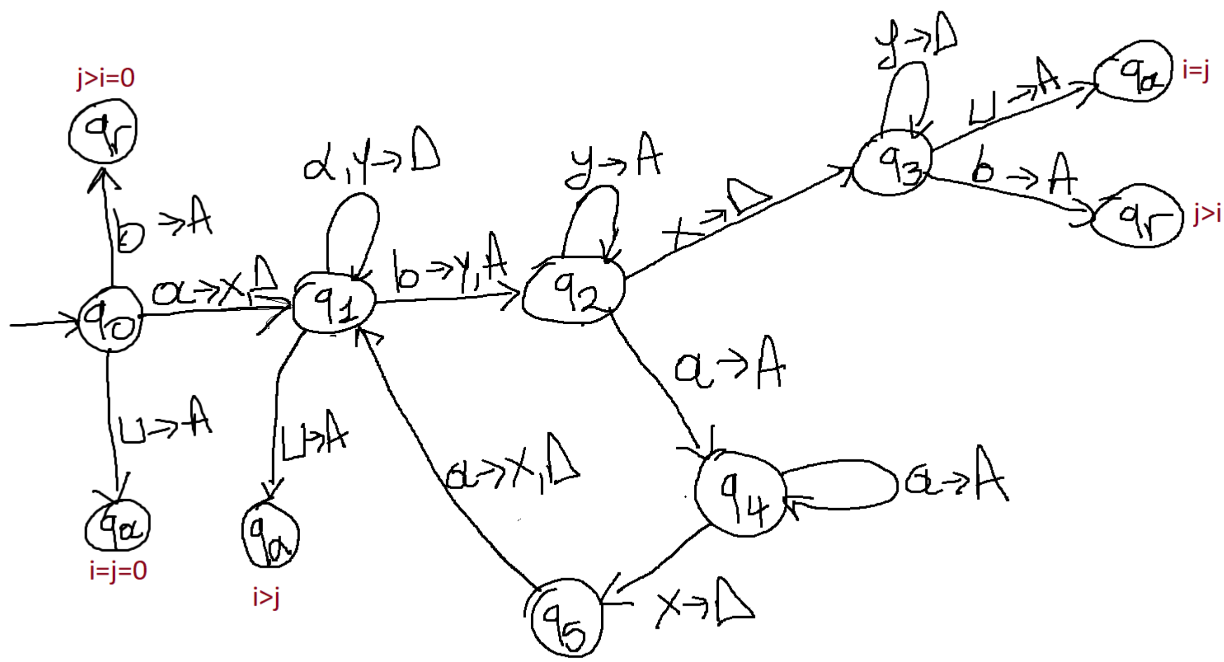


q0
0→$, R
1→$, R
+ → R
q1
0,1→ R
+→ R
q2
$→ R
0,# → R
1→$, L
q3
$ → L
+ → L
q4
0,1 → L
$→0, R
q5
0,1 → R
#
No
q6
$ → R
0,1 → R
#
Yes
q7
0,1→ R
+→ R
q8
$→ R
0→$, L
1,# → R
q9
0,1 → L
$→1, R
q10
$ → L
+ → L

Άσκηση (2022) : Έστω το αλφάβητο $\Sigma = \{a, b\}$. Σχεδιάστε μία Turing Μηχανή M που να διαγιγνώσκει τη γλώσσα $L = \{a^i b^j : 0 \leq j \leq i\}$. Θεωρείστε ότι η είσοδός σας είναι της μορφής a^*b^*, οπότε δεν χρειάζεται να ελέγξετε αν η είσοδος έχει άλλη μορφή. Αυτό σημαίνει ότι αποκλείεται να σας δοθεί ως είσοδος η λέξη $aabbaab$ μιας και αυτή δεν είναι της μορφής a^*b^*. Επομένως η TM που θα σχεδιάσετε θα πρέπει απλά να ελέγχει αν τα a είναι περισσότερα από τα b.

<u>Λύση:</u>

Η ιδέα είναι ότι θα σβήνω ένα-ένα τα a με το αντίστοιχο b χρησιμοποιώντας βοηθητικά σύμβολα. Πιο συγκεκριμένα, με το σύμβολο x θα σβήνω τα a και με το σύμβολο y θα σβήνω τα b. Επομένως, το αλφάβητο της εισόδου είναι το $\Sigma = \{a, b\}$, το αλφάβητο της ταινίας είναι το $\Gamma = \{a, b, x, y, \sqcup\}$ και το σύνολο των καταστάσεων φαίνεται εντός της συνάρτησης μετάβασης:



Άσκηση (2022) (Sipser 3.19): Μία μηχανή Turing αριστερής επαναφοράς είναι παρόμοια με μία συνήθη TM, με τη διαφορά ότι η συνάρτηση μεταβάσεων έχει τη μορφή:

$$\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{\Delta, A, E\}$$

Εάν $\delta(q, a) = (r, b, E)$, τότε όποτε η μηχανή βρίσκεται στην κατάσταση q και διαβάζει το σύμβολο a, γράφει στην ταινία ένα b , μεταβαίνει στην κατάσταση r, και επαναφέρει την κεφαλή της στο αριστερότερο άκρο της ταινίας. Δείξτε ότι αυτή η παραλλαγή των TM είναι ισοδύναμη με το απλό μοντέλο TM.

Λύση:

Έστω μία συνήθη TM M και έστω η TM αριστερής επαναφοράς S. Θα δείξουμε ότι η μία εξομοιώνει την άλλη και άρα θα είναι ισοδύναμες. Έστω ότι οι M και S είναι διαγνώστες (το ίδιο ισχύει αν ήταν αναγνωριστές, οπότε δεν θα ελέγχαμε τι θα γινόταν στην ΑΠΟΡΡΙΨΗ).

- Πρώτα θα δείξω ότι η M μπορεί να εξομοιώσει την S:

  Έστω ότι μας δίνεται μία TM αριστερής επαναφοράς S. Θα κατασκευάσουμε μία TM M έτσι ώστε $L(M) = L(S)$ – η γλώσσα της M να συμπίπτει με αυτή της S. Η μόνη μετάβαση που δεν μπορεί να κάνει η M είναι να κάνει την επαναφορά στην αρχική θέση. Εμείς την κίνηση E θα την εξομοιώσουμε με κινήσεις προς τα αριστερά μέχρι να φτάσουμε στην αρχή της ταινίας. Θα πρέπει όμως η M να ξέρει πότε φτάνει στην αρχή της ταινίας. Για αυτό το λόγο, αρχικά όταν γράφουμε την είσοδο της S στην ταινία της M τοποθετούμε στο πρώτο κελί ένα μοναδικό σύμβολο (έστω #) που υποδηλώνει την αρχή της ταινίας της M. Έπειτα, όταν από την S γίνεται μία μετάβαση τύπου E τότε η M κινείται συνεχώς προς τα αριστερά μέχρι να βρει το σύμβολο # και κάνει μία κίνηση προς τα δεξιά. Οπότε με αυτό τον τρόπο εξομοιώνει την κίνηση E. Δεν υπάρχει κάτι άλλο που θα πρέπει να προσέξει η M στην εξομοίωση της S. Άρα $L(M) = L(S)$.

- Έπειτα θα δείξουμε την αντίστροφη κατεύθυνση, δηλαδή θα δείξω ότι η S μπορεί να εξομοιώσει την M:

  Έστω ότι μας δίνεται μία TM αριστερής επαναφοράς M. Θα κατασκευάσουμε μία TM S έτσι ώστε $L(S) = L(M)$ – η γλώσσα της S να συμπίπτει με αυτή της M. Η S μπορεί να κάνει όλες τις κινήσεις της M, οπότε σε αυτή την περίπτωση S=M. Απλά η S δεν θα χρησιμοποιήσει ποτέ την κίνηση E. Άρα $L(S) = L(M)$.

Αφού η μία εξομοιώνει την άλλη οι μηχανές είναι ισοδύναμες ως προς την ισχύ τους.