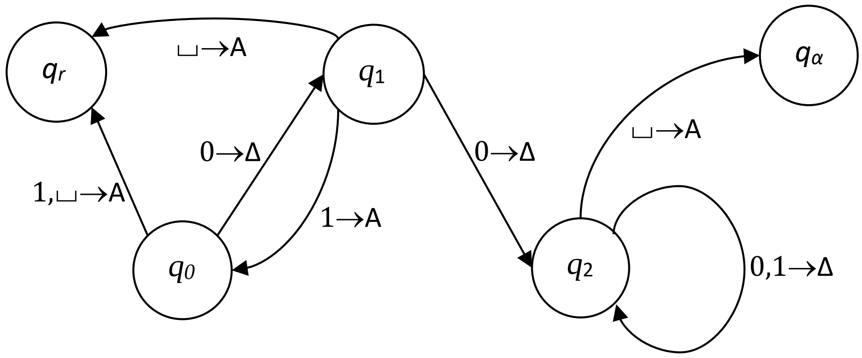
*ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «**ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ**»*
13/09/2024
Διάρκεια Εξέτασης (2 ώρες και 30 λεπτά)

1. (2) Έστω η αιτιοκρατική ΤΜ M όπου $\Sigma = \{0,1\}$ και $\Gamma = \{0,1,\sqcup\}$ με τη διπλανή συνάρτηση μετάβασης. Έστω ότι η αρχική κατάσταση είναι η q_0, η κατάσταση απόρριψης είναι η q_r και η κατάσταση αποδοχής είναι η q_α. Είναι η M διαγνώστης; Ποια είναι η γλώσσα που αναγνωρίζει η M; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.



2. (2) Να αποδείξετε ότι το 4SAT είναι NP-πλήρες πρόβλημα, όπου το 4SAT είναι το πρόβλημα SAT με τον περιορισμό ότι κάθε φράση έχει 4 ακριβώς λεξιγράμματα. Σας προτείνεται να κάνετε αναγωγή από το 3SAT.

3. (2) Σας δίνεται η εξής γλώσσα:

$$LARGER_{TM} = \{\langle M_1, M_2\rangle : \eta\ \gamma\lambda\acute{\omega}\sigma\sigma\alpha\ L(M_1)\ \epsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \gamma\nu\acute{\eta}\sigma\iota\omicron\ \upsilon\pi\omicron\sigma\acute{\upsilon}\nu\omicron\lambda\omicron\ \tau\eta\varsigma\ L(M_2), \delta\eta\lambda.\ L(M_1) \subset L(M_2)\}$$

Να συμπληρώσετε την παρακάτω απόδειξη (τα κενά κουτιά) για τη μη διαγνωσιμότητα της $LARGER_{TM}$.

<u>Απόδειξη:</u> Θα δείξουμε ότι η γλώσσα $LARGER_{TM}$ είναι μη διαγνώσιμη κάνοντας αναγωγή από τη γνωστή μη διαγνώσιμη γλώσσα της αποδοχής A_{TM}. Έστω ότι η γλώσσα $LARGER_{TM}$ είναι διαγνώσιμη και έστω R μια ΤΜ που τη διαγιγνώσκει. Χρησιμοποιώντας την R, κατασκευάζουμε την ΤΜ S που διαγιγνώσκει τη γλώσσα A_{TM} ως εξής:

S = για είσοδο $\langle M, w\rangle$, όπου M είναι μια ΤΜ και w μια συμβολοσειρά:
1. Κατασκεύασε την ΤΜ M_1, η οποία για είσοδο x πάντοτε απορρίπτει.
2. Κατασκεύασε την ΤΜ M_2, η οποία για είσοδο x:
3. Εκτέλεσε την ΤΜ R με είσοδο $\langle M_1, M_2\rangle$
4. Αν η R αποδεχτεί, τότε αποδοχή
5. Αν η R απορρίψει, τότε απόρριψη

Πράγματι, η S αποτελεί διαγνώστη της γλώσσας A_{TM} αφού:

Καθώς γνωρίζουμε ότι η γλώσσα A_{TM} είναι μη διαγνώσιμη, καταλήγουμε σε άτοπο. Έτσι, έχουμε αποδείξει ότι, αντίθετα με την υπόθεσή μας, η γλώσσα $LARGER_{TM}$ είναι μη διαγνώσιμη.

4. (3) (α) (1) Να αποδείξετε ότι αν NP≠co-NP τότε P≠NP.

(β) (1) Να αποδείξετε ότι μία γλώσσα ανήκει στην κλάση NP αν και μόνο αν έχει πολυωνυμικό επαληθευτή.

(γ) (1) Να δώσετε όσες σχέσεις γνωρίζετε που έχουν (αν περιέχονται ή είναι ίσες) των παρακάτω κλάσεων πολυπλοκότητας δεδομένου ότι $P \neq NP$: P, $co-P$, NP, $co-NP$, NPC, $co-NPC$, Διαγνώσιμες Γλώσσες, Συμπληρωματικά Αναγνωρίσιμες Γλώσσες, $TIME(n^2)$. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και σχήμα – το πρόθεμα co σημαίνει συμπλήρωμα της κλάσης ενώ NPC είναι η κλάση των NP-πλήρων προβλημάτων)

5. (2) Να αναφέρετε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι Αληθής ή Ψευδής.

Εφαρμόζεται αρνητική βαθμολόγηση σε αυτό το θέμα που μεταφέρεται στον τελικό βαθμό του γραπτού. (Σωστή απάντηση: $+0.25$, Λάθος απάντηση: -0.25)

i. Αν ένα πρόβλημα μπορεί να λυθεί σε αιτιοκρατικό πολυωνυμικό χρόνο τότε μπορεί και να επαληθευτεί σε αιτιοκρατικό πολυωνυμικό χρόνο.

ii. Το πρόβλημα του Τερματισμού είναι NP-πλήρες.

iii. Κάθε διαγνώσιμη γλώσσα είναι συμπληρωματικά αναγνωρίσιμη.
iv. Η γλώσσα μίας TM που τερματίζει σε κάθε είσοδο μπορεί να είναι μόνο κανονική (regular).
v. Το συμπλήρωμα κάθε αναγνωρίσιμης γλώσσας είναι επίσης αναγνωρίσιμη.
vi. Κάθε γλώσσα που διαγιγνώσκεται από μία ανταιτιοκρατική TM μπορεί να διαγνωσθεί επίσης και από μία αιτιοκρατική TM.
vii. Η TM είναι ένα μοντέλο υπολογισμού που μπορεί να προσομοιώσει οποιοδήποτε άλλο ρεαλιστικό μοντέλο γνωρίζουμε μέχρι τώρα.
viii. Το 3-SAT ως NP-πλήρες χρειάζεται εκθετικό χρόνο άρα και εκθετικό χώρο.

Καλή Επιτυχία!!!

Ενδεικτικές Λύσεις

1. Η TM M δεν είναι διαγνώστης. Αυτό γιατί σε είσοδο 01 εγκλωβίζεται μεταξύ των καταστάσεων q_0 και q_1. Πράγματι με είσοδο 01, μεταβαίνουμε στη διαμόρφωση $0q_1 1$ και έπειτα εγκλωβιζόμαστε μεταξύ των διαμορφώσεων $q_0 01$ και $0q_1 1$. Επίσης, με είσοδο την κενή λέξη ή όταν ξεκινά με 1 απορρίπτει. Επίσης, απορρίπτει αν έχουμε έναν μηδέν στην αρχή και μετά τουλάχιστον 2 άσσους ή κανένα άσσο. Όταν η είσοδος έχει τουλάχιστον 2 μηδέν στην αρχή τότε σε αυτή την περίπτωση αποδέχεται αφού φτάνει στην κατάσταση q_2. Άρα η γλώσσα της M είναι: $L(M) = 00(1+0)^*$.

2. Πρώτα θα δείξουμε ότι το 4SAT ανήκει στο NP. Πράγματι, αν μας δοθεί μία υποψήφια λύση μπορούμε σε πολυωνυμικό χρόνο να ελέγξουμε την εγκυρότητά της απλά βάζοντας τις τιμές στο λογικό τύπο και ελέγχοντας αν αυτός επαληθεύεται. Ο χρόνος είναι 4*#φράσεων που είναι πολυωνυμικό.
Έπειτα, θα ανάγουμε σε πολυωνυμικό χρόνο το 3SAT στο 4SAT. Έστω ένα στιγμιότυπο p του 3SAT που αποτελείται από το σύνολο φράσεων $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$, δηλαδή $p = c_1 \wedge c_2 \wedge \dots \wedge c_m$, όπου κάθε φράση c_i έχει ακριβώς 3 λεξιγράμματα. Θα κατασκευάσουμε μία νέα πρόταση p' με ένα σύνολο φράσεων $C' = \{c'_1, c'_2, \dots, c'_m\}$, όπου κάθε φράση c'_i έχει ακριβώς 4 λεξιγράμματα. Η κατασκευή θα πρέπει να είναι τέτοια έτσι ώστε:

$$p \in \text{3SAT} \Leftrightarrow p' \in \text{4SAT}$$

Η αναγωγή είναι η εξής: Η φράση c'_i προκύπτει από τη φράση c_i επιλέγοντας αυθαίρετα ένα λεξίγραμμα της c_i και φτιάχνοντας ένα αντίγραφό της μέσα στη φράση. Παράδειγμα:

$$c_i = (x \vee y \vee z) \rightarrow c'_i = (x \vee y \vee z \vee z)$$

Η μεταβολή αυτή σε κάθε φράση μπορεί να γίνει σε σταθερό χρόνο ανά φράση και σε γραμμικό χρόνο σε σχέση με το πλήθος των φράσεων. Επομένως, η αναγωγή είναι πολυωνυμικού χρόνου.
Απόδειξη ισοδυναμίας:
$\Rightarrow$ Έστω ότι $p \in$ 3SAT. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει αληθοποιός τιμοδοσία που κάνει αληθή τον τύπο p. Η ίδια ακριβώς τιμοδοσία κάνει αληθή και την p' αφού έχουμε απλά προσθέσει ένα λεξίγραμμα παραπάνω σε κάθε φράση.
$\Leftarrow$ Έστω ότι $p' \in$ 4SAT. Προσέξτε ότι ο λογικός τύπος p' έχει προκύψει μέσω αναγωγής από την p. Αφού υπάρχει αληθοποιός τιμοδοσία για τον p' σημαίνει ότι κάθε φράση του για αυτή την τιμοδοσία είναι αληθής. Επειδή όμως στην αναγωγή αντιγράψαμε απλά ένα λεξίγραμμα μέσα σε κάθε φράση, η τιμοδοσία αυτή θα είναι αληθοποιός και για την p.
Άρα δείξαμε ότι το πρόβλημα 3SAT ανάγεται απεικονιστικά σε πολυωνυμικό χρόνο στο πρόβλημα 4SAT. Αφού το 3SAT είναι NP-πλήρες και το 4SAT $\in NP$ προκύπτει ότι το 4SAT είναι NP-πλήρες.

3. Η TM M2, για είσοδο x:

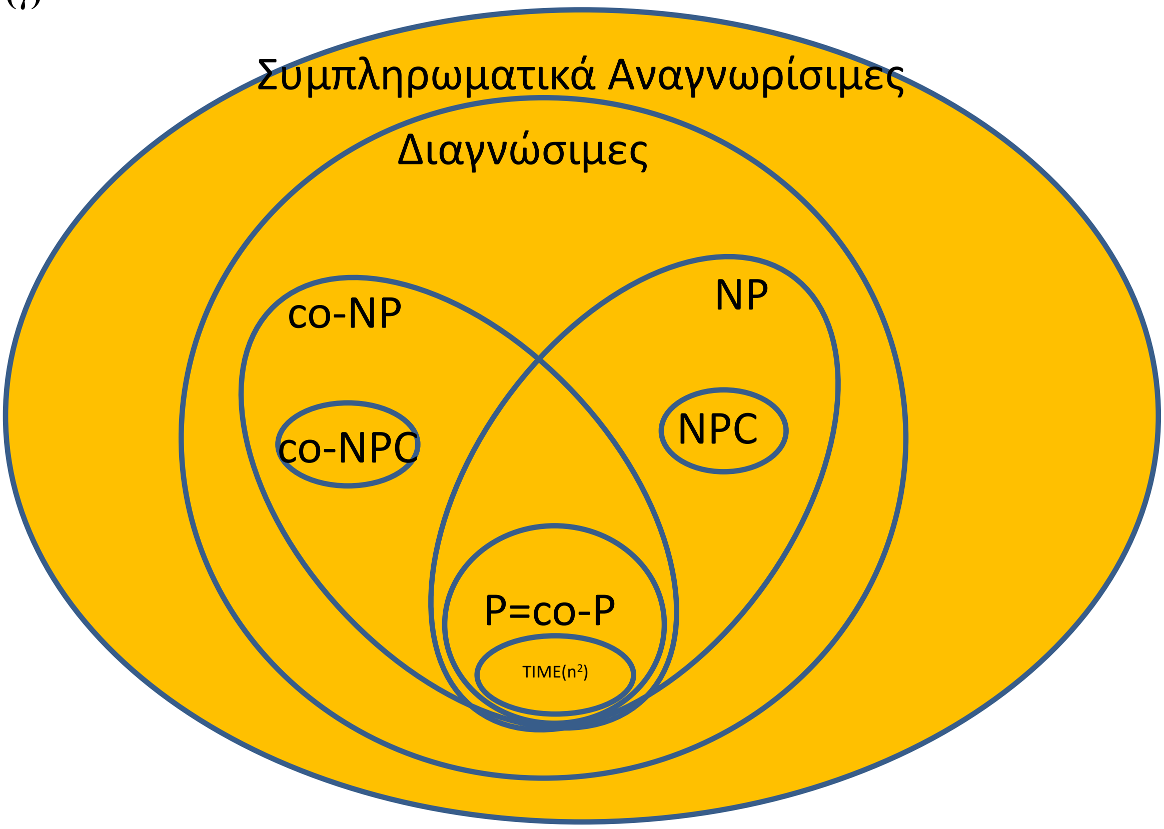
- εκτελεί την M με είσοδο w. Αν η M αποδεχτεί την w τότε η M2 αποδέχεται την x, ενώ αν η M απορρίψει την w τότε η M2 απορρίπτει την x.

Αιτιολόγηση: Καταρχάς, η L(M1) είναι ίση με το κενό σύνολο. Αν η M αποδέχεται την είσοδο w, τότε L(M2)=Σ*, αλλιώς η L(M2) είναι το κενό σύνολο. Αν η M δεν αποδέχεται (απορρίπτει ή εγκλωβίζεται) το w τότε η L(M1) είναι ίση με την L(M2) που είναι το κενό σύνολο. Άρα $\langle M_1, M_2 \rangle \notin LARGER_{TM}$ και επομένως σωστά η S απορρίπτει όταν η R απορρίπτει. Αν η M αποδέχεται το w τότε η L(M1) είναι γνήσιο υποσύνολο της L(M2) που είναι το Σ*. Άρα $\langle M_1, M_2 \rangle \in LARGER_{TM}$ και επομένως σωστά η S αποδέχεται όταν η R αποδέχεται. Άρα η S αποτελεί διαγνώστη της A_{TM} αφού η R είναι διαγνωστής.

4. **(α)** Έστω ότι NP≠co-NP αλλά P=NP (με άτοπο). Τότε, ένα NPC πρόβλημα θα μπορούσαμε να το λύσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο. Αφού όμως P=co-P και το συμπληρωματικό του NPC προβλήματος είναι πλήρες για την co-NP συνεπάγεται ότι και το συμπληρωματικό πρόβλημα ανήκει στο P. Επομένως P=co-NP από την πληρότητα. Άρα NP=co-NP, άτοπο. Στις σχετικές διαφάνειες μπορείτε να βρείτε και μία έμμεση απόδειξη.

(β) Δες βιβλίο ή σχετικές διαφάνειες.

(γ)



5.

i. **Α**
ii. **Ψ**
iii. **Α**
iv. **Ψ**
v. **Ψ**
vi. **Α**
vii. **Α**
viii. **Ψ**