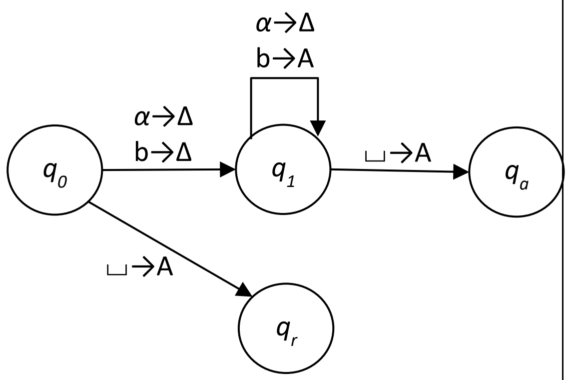
*ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «**ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ**»*
*17/06/2024 – **<u>ΟΜΑΔΑ Α</u>***
Διάρκεια Εξέτασης (2 ώρες και 30 λεπτά)

1. (2) Έστω η αιτιοκρατική TM M όπου $\Sigma = \{\alpha, b\}$ και $\Gamma = \{\alpha, b, \sqcup\}$ με τη διπλανή συνάρτηση μετάβασης. Έστω ότι η αρχική κατάσταση είναι η q_0, η κατάσταση απόρριψης είναι η q_r και η κατάσταση αποδοχής είναι η q_α. Είναι η M διαγνώστης; Ποια είναι η γλώσσα που αναγνωρίζει η M; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (Α: Αριστερά, Δ: Δεξιά)



2. (3) Ορίζουμε τα ακόλουθα προβλήματα απόφασης:
ΚΥΚΛΟΣ HAMILTON: Δοθέντος ενός κατευθυντού γραφήματος $G = (V, E)$, περιέχει το G κύκλο Hamilton; Κύκλος Hamilton είναι μια διαδρομή Hamilton η οποία ξεκινά και τελειώνει στον ίδιο κόμβο. Θυμίζουμε ότι μια διαδρομή Hamilton είναι οποιαδήποτε διαδρομή που διέρχεται από κάθε κόμβο ακριβώς μία φορά.
ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΥΚΛΟΣ: Δοθέντος ενός κατευθυντού γραφήματος $G = (V, E)$ και ενός θετικού ακεραίου $k > 1$, περιέχει το G απλό κύκλο με τουλάχιστον k κόμβους; Απλός είναι ένας κύκλος C που διέρχεται από κάθε κόμβο του ακριβώς μία φορά.
ΒΕΒΑΡΥΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ HAMILTON: Δοθέντος ενός κατευθυντού γραφήματος $G = (V, E)$ με βάρη (θετικοί ακέραιοι) στις ακμές του, και ενός θετικού ακεραίου k, υπάρχει κύκλος Hamilton με συνολικό κόστος $< k$ (αυστηρά μικρότερο);
Δοθέντος ότι το πρόβλημα ΚΥΚΛΟΣ HAMILTON είναι NP-πλήρες, αποδείξτε ότι:
(α) (1) Το πρόβλημα ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΥΚΛΟΣ είναι NP-δυσχερές.
(β) (2) Το πρόβλημα ΒΕΒΑΡΥΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ HAMILTON είναι NP-πλήρες με αναγωγή του προβλήματος ΚΥΚΛΟΣ HAMILTON σε αυτό.

3. (2) Σας δίνεται η εξής γλώσσα:
$$COMPL_{TM} = \{\langle M_1, M_2\rangle : \text{η γλώσσα } L(M_1) \text{ είναι το συμπλήρωμα της γλώσσας } L(M_2)\}$$
Να συμπληρώσετε την παρακάτω απόδειξη (τα κενά κουτιά) για τη μη διαγνωσιμότητα της $COMPL_{TM}$.
<u>Απόδειξη:</u> Θα δείξουμε ότι η γλώσσα $COMPL_{TM}$ είναι μη διαγνώσιμη κάνοντας αναγωγή από τη γνωστή μη διαγνώσιμη γλώσσα της αποδοχής A_{TM}. Έστω ότι η γλώσσα $COMPL_{TM}$ είναι διαγνώσιμη και έστω R μια TM που τη διαγιγνώσκει. Χρησιμοποιώντας την R, κατασκευάζουμε την TM S που διαγιγνώσκει τη γλώσσα A_{TM} ως εξής:
S = για είσοδο $\langle M, w\rangle$, όπου M είναι μια TM και w μια συμβολοσειρά:
1. Κατασκεύασε την TM M_1, η οποία για είσοδο x, αν η x έχει το ίδιο μήκος με την w τότε αποδέχεται, αλλιώς απορρίπτει.
2. Κατασκεύασε την TM M_2, η οποία για είσοδο x:

3. Εκτέλεσε την TM R με είσοδο $\langle M_1, M_2\rangle$
4. Αν η R αποδεχτεί, τότε απόρριψε
5. Αν η R απορρίψει, τότε αποδέξου

Πράγματι, η S αποτελεί διαγνώστη της γλώσσας A_{TM} αφού:

Καθώς γνωρίζουμε ότι η γλώσσα A_{TM} είναι μη διαγνώσιμη, καταλήγουμε σε άτοπο. Έτσι, έχουμε αποδείξει ότι, αντίθετα με την υπόθεσή μας, η γλώσσα $COMPL_{TM}$ είναι μη διαγνώσιμη.

4. (3) (α) (1) Έστω ένας αλγόριθμος A που διαγιγνώσκει τη γλώσσα L. Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να εντοπίσει αν $x \in L$ σε $|x|$ βήματα αλλά αν $x \notin L$ τότε ο αλγόριθμος χρειάζεται $2^{|x|}$ βήματα. Να δείξετε ότι η L μπορεί να διαγνωσθεί σε πολυωνυμικό χρόνο.
(β) (1) Έστω ένα πρόβλημα X που ανήκει στην κλάση NP και δεν έχουμε βρει ως σήμερα έναν αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου. Ένας επιστήμονας ανάγει σε πολυωνυμικό χρόνο το X στο SAT. Ένας άλλος επιστήμονας μετά επιλύει το X σε πολυωνυμικό χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι P=NP;
(γ) (1) Να βάλετε σε σειρά από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη κλάση πολυπλοκότητας/υπολογισιμότητας (με την έννοια ότι η μεγαλύτερη κλάση εμπεριέχει πλήρως τη μικρότερη) τις παρακάτω κλάσεις δεδομένου ότι $P \neq NP$: *Συμπληρωματικά* Αναγνωρίσιμες Γλώσσες, $co-P, TIME(n^5),\ coNP,\ NTIME(n^n)$, Διαγνώσιμες Γλώσσες, $TIME(n^2)$, όπου n είναι το μέγεθος της εισόδου.

5. (2) Να αναφέρετε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι Αληθής ή Ψευδής.
Εφαρμόζεται αρνητική βαθμολόγηση σε αυτό το θέμα που μεταφέρεται στον τελικό βαθμό του γραπτού. (Σωστή απάντηση: $+0.25$, *Λάθος απάντηση:* -0.25*)*

i. Αν $A \leq_m B$ και η A είναι αναγνωρίσιμη τότε και η B είναι αναγνωρίσιμη.
ii. Το 2-SAT ανήκει στην κλάση NP.
iii. Το αλφάβητο ταινίας Γ δεν μπορεί να συμπίπτει με το αλφάβητο εισόδου Σ.
iv. Αν SAT∈P τότε και co-SAT∈P.
v. Η κλάση των NP-δυσχερών προβλημάτων εμπεριέχει την κλάση NPC.
vi. Δεν γνωρίζουμε αν η κλάση NP είναι κλειστή ως προς την πράξη του συμπληρώματος.
vii. Υπάρχουν αριθμοί περιγράψιμοι που δεν είναι υπολογίσιμοι.
viii. Ένα γραμμικώς φραγμένο αυτόματο διαγιγνώσκει ακριβώς τις ίδιες γλώσσες με μία TM.

Καλή Επιτυχία!!!

Ενδεικτικές Λύσεις

1. Η TM M δεν είναι διαγνώστης. Αυτό γιατί σε είσοδο ab εγκλωβίζεται – γενικά εγκλωβίζεται όταν υπάρχει b οπουδήποτε αλλού εκτός της αρχής της εισόδου μιας και αναγκάζεται να πάει αριστερά στην κατάσταση q_1 όταν βρίσκει b. Με είσοδο την κενή λέξη απορρίπτει. Με βάση τα παραπάνω, η γλώσσα της M είναι: $L(M) = (b + a)a^*$.

2. (Α) Το πρόβλημα ΚΥΚΛΟΣ HAMILTON αποτελεί ειδική περίπτωση του προβλήματος ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΥΚΛΟΣ. Προκύπτει από το πρόβλημα ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΥΚΛΟΣ για k ίσο με το πλήθος των κόμβων του γραφήματος. Αφού η ειδική περίπτωση είναι δύσκολο πρόβλημα (NP-πλήρες), και η γενίκευση θα είναι τουλάχιστον τόσο δύσκολο πρόβλημα. Άρα το πρόβλημα ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΥΚΛΟΣ είναι NP-δύσκολο.
(Β) Αρχικά θα αποδείξουμε ότι ανήκει στην κλάση NP. Δοθέντος ενός κατευθυντού γραφήματος $G = (V, E)$ με βάρη (θετικοί ακέραιοι) στις ακμές του και ενός θετικού ακεραίου k, μπορούμε να μαντέψουμε μια ακολουθία κόμβων του G και να επαληθεύσουμε ότι (i) η ακολουθία ξεκινά και τελειώνει με τον ίδιο κόμβο, (ii) η ακολουθία διέρχεται από όλες τους κόμβους του G, (iii) κάθε κόμβος του G (εκτός από αυτόν με τον οποίο ξεκινά και τελειώνει η ακολουθία) εμφανίζεται στην ακολουθία ακριβώς μία φορά και (iv) το συνολικό κόστος της ακολουθίας είναι $< k$. Ο χρόνος που απαιτείται για την επαλήθευση είναι πολυωνυμικός (γραμμικός) στο πλήθος των κόμβων και στο πλήθος των ακμών του γραφήματος. Άρα το πρόβλημα ανήκει στην κλάση NP.
Δοθέντος ενός κατευθυντού γραφήματος $G = (V, E)$ θα κατασκευάσουμε κατευθυντό γράφημα $G' = (V', E')$ με βάρη στις ακμές του και θετικό ακέραιο k έτσι ώστε το G να περιέχει κύκλο Hamilton αν και μόνο αν το G' περιέχει κύκλο Hamilton συνολικού κόστους $< k$.
Ο G' θα περιέχει τους κόμβους G, οι οποίοι θα συνδέονται ανά δύο με ακμή (πλήρες γράφημα), διατηρώντας την κατεύθυνση των ακμών του G (οι υπόλοιπες έχουν αυθαίρετη κατεύθυνση). Επίσης οι ακμές του G θα έχουν βάρος 1 ενώ οι υπόλοιπες ακμές θα έχουν βάρος 2. Τέλος ο ακέραιος k ορίζεται ίσος με το πλήθος $n = |V|$ των κόμβων του γραφήματος αυξημένος κατά μία θετική σταθερά $\varepsilon < 1$, δηλαδή $k = n + \epsilon$. Προφανώς η κατασκευή του G' γίνεται σε χρόνο πολυωνυμικό στο μέγεθος του G. Για αυτή την αναγωγή αποδεικνύουμε την εξής ισοδυναμία:

$$G \in ΚΥΚΛΟΣ\ HAMILTON \Leftrightarrow G' \in ΒΕΒΑΡΥΜΜΕΝΟΣ\ ΚΥΚΛΟΣ\ HAMILTON$$

Έστω ότι το G περιέχει κύκλο Hamilton. Τότε αυτός αποτελεί κύκλο Hamilton και στον G' με συνολικό κόστος $n < k = n + \epsilon$.
Έστω ότι το G' περιέχει κύκλο Hamilton με συνολικό κόστος $< k = n + \epsilon$. Τότε υποχρεωτικά σε αυτόν θα περιλαμβάνονται μόνο εκείνες οι ακμές που έχουν βάρος 1 δηλαδή πρόκειται για κύκλο Hamilton στο γράφημα G.
Η αναγωγή είναι ορθή, άρα το πρόβλημα ΒΕΒΑΡΥΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ HAMILTON είναι NP-πλήρες.

3. Η TM M2, για είσοδο x:

- αν η x έχει διαφορετικό μήκος από την w, τότε αποδέχεται
- αλλιώς (αν η x έχει ίδιο μήκος με την w), εκτελεί την M με είσοδο w. Αν η M αποδεχτεί την w τότε η M2 αποδέχεται την x, ενώ αν η M απορρίψει την w τότε η M2 απορρίπτει την x.

Αιτιολόγηση: Αν η M αποδέχεται την είσοδο w, τότε w∈L(M2). Επίσης ισχύει w∈L(M1). Συνεπώς η L(M1) δεν είναι το συμπλήρωμα της L(M2) (καθώς και οι δύο περιέχουν την w) και άρα η R απορρίπτει την είσοδο $\langle M_1, M_2 \rangle$. Συνεπώς η S αποδέχεται την είσοδο $\langle M, w \rangle$. Αν η M δεν αποδέχεται την είσοδο w, τότε οι συμβολοσειρές που έχουν το ίδιο μήκος με την w δεν ανήκουν στην L(M2), ενώ ανήκουν στην L(M1). Επίσης οι συμβολοσειρές που έχουν διαφορετικό μήκος από την w ανήκουν στην L(M2), ενώ δεν ανήκουν στην L(M1). Με βάση τα παραπάνω, κάθε συμβολοσειρά του Σ* ανήκει ακριβώς σε μία από τις L(M1), L(M2) και άρα η L(M1) είναι το συμπλήρωμα της L(M2). Συνεπώς η R αποδέχεται την είσοδο και άρα η S απορρίπτει την $\langle M, w \rangle$.

4. **(α)** Τρέχουμε το *A* για |*x*| βήματα και αν αποδεχτεί αποδεχόμαστε αλλιώς ξέρουμε ότι ο *A* θα απορρίψει άρα απορρίπτουμε. Επομένως το πρόβλημα με βάση αυτή την μικρή περιγραφή αλγορίθμου ανήκει στο P.
(β) Όχι διότι η αναγωγή δεν έγινε με την σωστή φορά. Θα έπρεπε να είχε ανάγει το SAT στο X ώστε να δείξει ότι P= NP. Επειδή το SAT είναι πλήρες, όλα τα προβλήματα ανάγονται στο SAT και συνεπώς έτσι θα ανάγονται και στο X. Και επειδή το X επιλύθηκε σε πολυωνυμικό χρόνο τότε όλα τα προβλήματα της NP επιλύονται όμοια.
(γ) $TIME(n^2) \leq TIME(n^5) \leq co - P \leq coNP \leq NTIME(n^n) \leq$ Διαγνώσιμες Γλώσσες $\leq$ *Συμπληρωματικά* Αναγνωρίσιμες Γλώσσες

5.

i. **Ψ**
ii. **Α**
iii. **Α**
iv. **Α**
v. **Α**
vi. **Α**
vii. **Α**
viii. **Ψ**

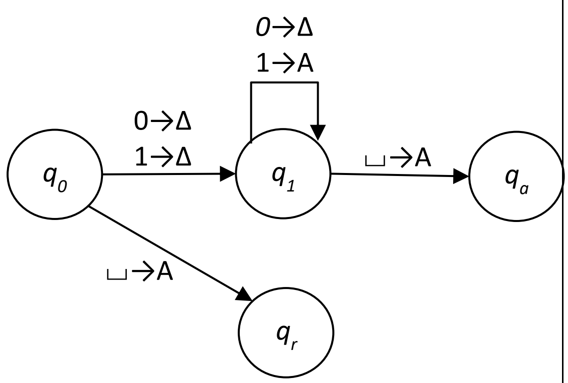
*ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «**ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ**»*
*17/06/2024 – **ΟΜΑΔΑ Β***
Διάρκεια Εξέτασης (2 ώρες και 30 λεπτά)

1. (3) Ορίζουμε τα ακόλουθα προβλήματα απόφασης:
ΚΥΚΛΟΣ HAMILTON: Δοθέντος ενός κατευθυντού γραφήματος $G = (V, E)$, περιέχει το G κύκλο Hamilton; Κύκλος Hamilton είναι μια διαδρομή Hamilton η οποία ξεκινά και τελειώνει στον ίδιο κόμβο. Θυμίζουμε ότι μια διαδρομή Hamilton είναι οποιαδήποτε διαδρομή που διέρχεται από κάθε κόμβο ακριβώς μία φορά.
ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΥΚΛΟΣ: Δοθέντος ενός κατευθυντού γραφήματος $G = (V, E)$ και ενός θετικού ακεραίου $\lambda > 1$, περιέχει το G απλό κύκλο με τουλάχιστον λ κόμβους; Απλός είναι ένας κύκλος C που διέρχεται από κάθε κόμβο του ακριβώς μία φορά.
ΒΕΒΑΡΥΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ HAMILTON: Δοθέντος ενός κατευθυντού γραφήματος $G = (V, E)$ με βάρη (θετικοί ακέραιοι) στις ακμές του, και ενός θετικού ακεραίου λ, υπάρχει κύκλος Hamilton με συνολικό κόστος $< \lambda$ (αυστηρά μικρότερο);
Δοθέντος ότι το πρόβλημα ΚΥΚΛΟΣ HAMILTON είναι NP-πλήρες, αποδείξτε ότι:
(α) (1) Το πρόβλημα ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΥΚΛΟΣ είναι NP-δυσχερές.
(β) (2) Το πρόβλημα ΒΕΒΑΡΥΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ HAMILTON είναι NP-πλήρες με αναγωγή του προβλήματος ΚΥΚΛΟΣ HAMILTON σε αυτό.

2. (2) Να αναφέρετε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι Αληθής ή Ψευδής.
Εφαρμόζεται αρνητική βαθμολόγηση σε αυτό το θέμα που μεταφέρεται στον τελικό βαθμό του γραπτού. (Σωστή απάντηση: $+0.25$, *Λάθος απάντηση:* -0.25*)*

i. Αν $A \leq_m B$ και η B είναι αναγνωρίσιμη τότε και η A είναι αναγνωρίσιμη.
ii. Το 2-SAT ανήκει στην κλάση coNP.
iii. Το αλφάβητο ταινίας Γ μπορεί να συμπίπτει με το αλφάβητο εισόδου Σ.
iv. Αν 3SAT∈P τότε και co-3SAT∈P.
v. Η κλάση των NP-δυσχερών προβλημάτων δεν εμπεριέχει την κλάση NPC.
vi. Φαίνεται ότι η κλάση coNP δεν είναι κλειστή ως προς την πράξη του συμπληρώματος.
vii. Όλοι οι περιγράψιμοι αριθμοί είναι και υπολογίσιμοι.
viii. Ένα γραμμικώς φραγμένο αυτόματο διαγιγνώσκει ακριβώς τις ίδιες γλώσσες με μία TM.

3. (2) Έστω η αιτιοκρατική TM M όπου $\Sigma = \{0,1\}$ και $\Gamma = \{0,1,\sqcup\}$ με τη διπλανή συνάρτηση μετάβασης. Έστω ότι η αρχική κατάσταση είναι η q_0, η κατάσταση απόρριψης είναι η q_r και η κατάσταση αποδοχής είναι η q_α. Είναι η M διαγνώστης; Ποια είναι η γλώσσα που αναγνωρίζει η M; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (Α: Αριστερά, Δ: Δεξιά)



4. (3) (α) (1) Έστω ένας αλγόριθμος A που διαγιγνώσκει τη γλώσσα L. Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να εντοπίσει αν $x \in L$ σε $2|x|$ βήματα αλλά αν $x \notin L$ τότε ο αλγόριθμος χρειάζεται $3^{|x|}$ βήματα. Να δείξετε ότι η L μπορεί να διαγνωσθεί σε πολυωνυμικό χρόνο.
(β) (1) Έστω ένα πρόβλημα Χ που ανήκει στην κλάση NP και δεν έχουμε βρει ως σήμερα έναν αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου. Ένας επιστήμονας ανάγει σε πολυωνυμικό χρόνο το Χ στο 3SAT. Ένας άλλος επιστήμονας μετά επιλύει το Χ σε πολυωνυμικό χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι P=NP;
(γ) (1) Να βάλετε σε σειρά από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη κλάση πολυπλοκότητας/υπολογισιμότητας (με την έννοια ότι η μεγαλύτερη κλάση εμπεριέχει πλήρως τη μικρότερη) τις παρακάτω κλάσεις δεδομένου ότι $P \neq NP$: *Συμπληρωματικά* Αναγνωρίσιμες Γλώσσες, P, $TIME(n^3)$, NP, $NTIME(2^n)$, Διαγνώσιμες Γλώσσες, $TIME(n)$, όπου n είναι το μέγεθος της εισόδου.

5. (2) Σας δίνεται η εξής γλώσσα:

$$C_{TM} = \{\langle M_1, M_2\rangle : \eta\ \gamma\lambda\acute{\omega}\sigma\sigma\alpha\ L(M_1)\ \epsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \tau o\ \sigma\upsilon\mu\pi\lambda\acute{\eta}\rho\omega\mu\alpha\ \tau\eta\varsigma\ \gamma\lambda\acute{\omega}\sigma\sigma\alpha\varsigma\ L(M_2)\}$$

Να συμπληρώσετε την παρακάτω απόδειξη (τα κενά κουτιά) για τη μη διαγνωσιμότητα της C_{TM}.

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι η γλώσσα C_{TM} είναι μη διαγνώσιμη κάνοντας αναγωγή από τη γνωστή μη διαγνώσιμη γλώσσα της αποδοχής A_{TM}. Έστω ότι η γλώσσα C_{TM} είναι διαγνώσιμη και έστω R μια ΤΜ που τη διαγιγνώσκει. Χρησιμοποιώντας την R, κατασκευάζουμε την ΤΜ S που διαγιγνώσκει τη γλώσσα A_{TM} ως εξής:

S = για είσοδο $\langle M, w\rangle$, όπου M είναι μια ΤΜ και w μια συμβολοσειρά:

6. Κατασκεύασε την ΤΜ M_1, η οποία για είσοδο x, αν η x έχει το ίδιο μήκος με την w τότε αποδέχεται, αλλιώς απορρίπτει.
7. Κατασκεύασε την ΤΜ M_2, η οποία για είσοδο x:
8. Εκτέλεσε την ΤΜ R με είσοδο $\langle M_1, M_2\rangle$
9. Αν η R αποδεχτεί, τότε απόρριψε
10. Αν η R απορρίψει, τότε αποδέξου

Πράγματι, η S αποτελεί διαγνώστη της γλώσσας A_{TM} αφού:

Καθώς γνωρίζουμε ότι η γλώσσα A_{TM} είναι μη διαγνώσιμη, καταλήγουμε σε άτοπο. Έτσι, έχουμε αποδείξει ότι, αντίθετα με την υπόθεσή μας, η γλώσσα C_{TM} είναι μη διαγνώσιμη.

Καλή Επιτυχία!!!

Ενδεικτικές Λύσεις

1. (Α) Το πρόβλημα ΚΥΚΛΟΣ HAMILTON αποτελεί ειδική περίπτωση του προβλήματος ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΥΚΛΟΣ. Προκύπτει από το πρόβλημα ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΥΚΛΟΣ για λ ίσο με το πλήθος των κόμβων του γραφήματος. Αφού η ειδική περίπτωση είναι δύσκολο πρόβλημα (NP-πλήρες), και η γενίκευση θα είναι τουλάχιστον τόσο δύσκολο πρόβλημα. Άρα το πρόβλημα ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΥΚΛΟΣ είναι NP-δύσκολο.
(Β) Αρχικά θα αποδείξουμε ότι ανήκει στην κλάση NP. Δοθέντος ενός κατευθυντού γραφήματος $G = (V, E)$ με βάρη (θετικοί ακέραιοι) στις ακμές του και ενός θετικού ακεραίου λ, μπορούμε να μαντέψουμε μια ακολουθία κόμβων του G και να επαληθεύσουμε ότι (i) η ακολουθία ξεκινά και τελειώνει με τον ίδιο κόμβο, (ii) η ακολουθία διέρχεται από όλες τους κόμβους του G, (iii) κάθε κόμβος του G (εκτός από αυτόν με τον οποίο ξεκινά και τελειώνει η ακολουθία) εμφανίζεται στην ακολουθία ακριβώς μία φορά και (iv) το συνολικό κόστος της ακολουθίας είναι $< \lambda$. Ο χρόνος που απαιτείται για την επαλήθευση είναι πολυωνυμικός (γραμμικός) στο πλήθος των κόμβων και στο πλήθος των ακμών του γραφήματος. Άρα το πρόβλημα ανήκει στην κλάση NP.
Δοθέντος ενός κατευθυντού γραφήματος $G = (V, E)$ θα κατασκευάσουμε κατευθυντό γράφημα $G' = (V', E')$ με βάρη στις ακμές του και θετικό ακέραιο λ έτσι ώστε το G να περιέχει κύκλο Hamilton αν και μόνο αν το G' περιέχει κύκλο Hamilton συνολικού κόστους $< \lambda$.
Ο G' θα περιέχει τους κόμβους G, οι οποίοι θα συνδέονται ανά δύο με ακμή (πλήρες γράφημα), διατηρώντας την κατεύθυνση των ακμών του G (οι υπόλοιπες έχουν αυθαίρετη κατεύθυνση). Επίσης οι ακμές του G θα έχουν βάρος 1 ενώ οι υπόλοιπες ακμές θα έχουν βάρος 2. Τέλος ο ακέραιος λ ορίζεται ίσος με το πλήθος $n = |V|$ των κόμβων του γραφήματος αυξημένος κατά μία θετική σταθερά $\varepsilon < 1$, δηλαδή $\lambda = n + \epsilon$. Προφανώς η κατασκευή του G' γίνεται σε χρόνο πολυωνυμικό στο μέγεθος του G. Για αυτή την αναγωγή αποδεικνύουμε την εξής ισοδυναμία:

$$G \in ΚΥΚΛΟΣ\ HAMILTON \Leftrightarrow G' \in ΒΕΒΑΡΥΜΜΕΝΟΣ\ ΚΥΚΛΟΣ\ HAMILTON$$

Έστω ότι το G περιέχει κύκλο Hamilton. Τότε αυτός αποτελεί κύκλο Hamilton και στον G' με συνολικό κόστος $n < \lambda = n + \epsilon$.
Έστω ότι το G' περιέχει κύκλο Hamilton με συνολικό κόστος $< \lambda = n + \epsilon$. Τότε υποχρεωτικά σε αυτόν θα περιλαμβάνονται μόνο εκείνες οι ακμές που έχουν βάρος 1 δηλαδή πρόκειται για κύκλο Hamilton στο γράφημα G.
Η αναγωγή είναι ορθή, άρα το πρόβλημα ΒΕΒΑΡΥΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ HAMILTON είναι NP-πλήρες.

2.

i. **Α**
ii. **Α**
iii. **Ψ**
iv. **Α**
v. **Ψ**
vi. **Α**
vii. **Ψ**
viii. **Ψ**

3. Η TM M δεν είναι διαγνώστης. Αυτό γιατί σε είσοδο 01 εγκλωβίζεται – γενικά εγκλωβίζεται όταν υπάρχει 1 οπουδήποτε αλλού εκτός της αρχής της εισόδου μιας και αναγκάζεται να πάει αριστερά στην κατάσταση q_1 όταν βρίσκει 1. Με είσοδο την κενή λέξη απορρίπτει. Με βάση τα παραπάνω, η γλώσσα της M είναι: $L(M) = (1 + 0)0^*$.

4. (α) Τρέχουμε το A για $2|x|$ βήματα και αν αποδεχτεί αποδεχόμαστε αλλιώς ξέρουμε ότι ο A θα απορρίψει άρα απορρίπτουμε. Επομένως το πρόβλημα με βάση αυτή την μικρή περιγραφή αλγορίθμου ανήκει στο P.
(β) Όχι διότι η αναγωγή δεν έγινε με την σωστή φορά. Θα έπρεπε να είχε ανάγει το 3SAT στο X ώστε να δείξει ότι P= NP. Επειδή το 3SAT είναι πλήρες, όλα τα προβλήματα ανάγονται στο 3SAT και συνεπώς έτσι θα ανάγονται και στο X. Και επειδή το X επιλύθηκε σε πολυωνυμικό χρόνο τότε όλα τα προβλήματα της NP επιλύονται όμοια.
(γ) $TIME(n) \leq\ TIME(n^3) \leq P \leq NP \leq NTIME(2^n) \leq$ Διαγνώσιμες Γλώσσες $\leq$
Συμπληρωματικά Αναγνωρίσιμες Γλώσσες

5. Η ΤΜ Μ2, για είσοδο x:

- αν η x έχει διαφορετικό μήκος από την w, τότε αποδέχεται
- αλλιώς (αν η x έχει ίδιο μήκος με την w), εκτελεί την Μ με είσοδο w. Αν η Μ αποδεχτεί την w τότε η Μ2 αποδέχεται την x, ενώ αν η Μ απορρίψει την w τότε η Μ2 απορρίπτει την x.

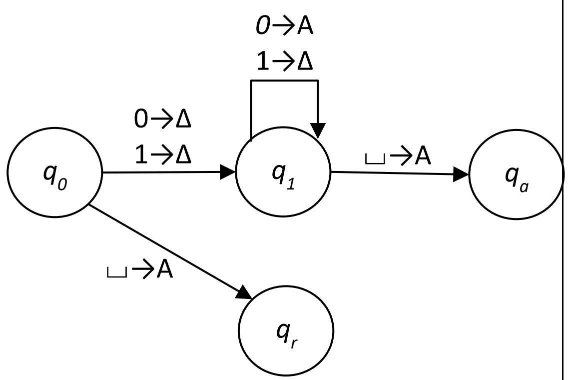
Αιτιολόγηση: Αν η Μ αποδέχεται την είσοδο w, τότε w∈L(M2). Επίσης ισχύει w∈L(M1). Συνεπώς η L(M1) δεν είναι το συμπλήρωμα της L(M2) (καθώς και οι δύο περιέχουν την w) και άρα η R απορρίπτει την είσοδο $\langle M_1, M_2 \rangle$. Συνεπώς η S αποδέχεται την είσοδο $\langle M, w \rangle$. Αν η Μ δεν αποδέχεται την είσοδο w, τότε οι συμβολοσειρές που έχουν το ίδιο μήκος με την w δεν ανήκουν στην L(M2), ενώ ανήκουν στην L(M1). Επίσης οι συμβολοσειρές που έχουν διαφορετικό μήκος από την w ανήκουν στην L(M2), ενώ δεν ανήκουν στην L(M1). Με βάση τα παραπάνω, κάθε συμβολοσειρά του Σ* ανήκει ακριβώς σε μία από τις L(M1), L(M2) και άρα η L(M1) είναι το συμπλήρωμα της L(M2). Συνεπώς η R αποδέχεται την είσοδο και άρα η S απορρίπτει την $\langle M, w \rangle$.

*ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «**ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ**»*
*17/06/2024 – **ΟΜΑΔΑ Γ***
Διάρκεια Εξέτασης (2 ώρες και 30 λεπτά)

1. (2) Να αναφέρετε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι Αληθής ή Ψευδής.
Εφαρμόζεται αρνητική βαθμολόγηση σε αυτό το θέμα που μεταφέρεται στον τελικό βαθμό του γραπτού. (Σωστή απάντηση: $+0.25$*, Λάθος απάντηση:* -0.25*)*

i. Ένα γραμμικώς φραγμένο αυτόματο διαγιγνώσκει λιγότερες γλώσσες από μία TM.
ii. Αν $A \leq_m B$ και η B είναι διαγνώσιμη τότε και η A είναι διαγνώσιμη.
iii. Αν 2SAT∈coNP τότε και co-2SAT∈P.
iv. Η κλάση των NP-δυσχερών προβλημάτων δεν εμπεριέχει την κλάση NPC.
v. Η κλάση NP είναι κλειστή ως προς την πράξη της ένωσης.
vi. Το αλφάβητο ταινίας Γ μπορεί να συμπίπτει με το αλφάβητο εισόδου Σ.
vii. Όλοι οι περιγράψιμοι αριθμοί είναι και υπολογίσιμοι.
viii. Το 2-SAT δεν ανήκει στην κλάση coNP.

2. (2) Έστω η αιτιοκρατική TM M όπου $\Sigma = \{0,1\}$ και $\Gamma = \{0,1,\sqcup\}$ με τη διπλανή συνάρτηση μετάβασης. Έστω ότι η αρχική κατάσταση είναι η q_0, η κατάσταση απόρριψης είναι η q_r και η κατάσταση αποδοχής είναι η q_α. Είναι η M διαγνώστης; Ποια είναι η γλώσσα που αναγνωρίζει η M; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (Α: Αριστερά, Δ: Δεξιά)



3. (2) Σας δίνεται η εξής γλώσσα:

$$C_{TM} = \{\langle M_1, M_2\rangle : \eta\ \gamma\lambda\acute{\omega}\sigma\sigma\alpha\ L(M_1)\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \tau o\ \sigma\upsilon\mu\pi\lambda\acute{\eta}\rho\omega\mu\alpha\ \tau\eta\varsigma\ \gamma\lambda\acute{\omega}\sigma\sigma\alpha\varsigma\ L(M_2)\}$$

Να συμπληρώσετε την παρακάτω απόδειξη (τα κενά κουτιά) για τη μη διαγνωσιμότητα της C_{TM}.

<u>Απόδειξη:</u> Θα δείξουμε ότι η γλώσσα C_{TM} είναι μη διαγνώσιμη κάνοντας αναγωγή από τη γνωστή μη διαγνώσιμη γλώσσα της αποδοχής A_{TM}. Έστω ότι η γλώσσα C_{TM} είναι διαγνώσιμη και έστω R μια TM που τη διαγιγνώσκει. Χρησιμοποιώντας την R, κατασκευάζουμε την TM S που διαγιγνώσκει τη γλώσσα A_{TM} ως εξής:

S = για είσοδο $\langle M, w\rangle$, όπου M είναι μια TM και w μια συμβολοσειρά:

11. Κατασκεύασε την TM M_1, η οποία για είσοδο x, αν η x έχει το ίδιο μήκος με την w τότε αποδέχεται, αλλιώς απορρίπτει.
12. Κατασκεύασε την TM M_2, η οποία για είσοδο x:
13. Εκτέλεσε την TM R με είσοδο $\langle M_1, M_2\rangle$
14. Αν η R αποδεχτεί, τότε απόρριψε
15. Αν η R απορρίψει, τότε αποδέξου

Πράγματι, η S αποτελεί διαγνώστη της γλώσσας A_{TM} αφού:

Καθώς γνωρίζουμε ότι η γλώσσα A_{TM} είναι μη διαγνώσιμη, καταλήγουμε σε άτοπο. Έτσι, έχουμε αποδείξει ότι, αντίθετα με την υπόθεσή μας, η γλώσσα C_{TM} είναι μη διαγνώσιμη.

4. (3) (α) (1) Έστω ένας αλγόριθμος A που διαγιγνώσκει τη γλώσσα L. Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να εντοπίσει αν $x \in L$ σε $|x|^2$ βήματα αλλά αν $x \notin L$ τότε ο αλγόριθμος χρειάζεται $3^{|x|}$ βήματα. Να δείξετε ότι η L μπορεί να διαγνωσθεί σε πολυωνυμικό χρόνο.

(β) (1) Έστω ένα πρόβλημα X που ανήκει στην κλάση NP και δεν έχουμε βρει ως σήμερα έναν αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου. Ένας επιστήμονας ανάγει σε πολυωνυμικό χρόνο το X στο 4SAT. Ένας άλλος επιστήμονας μετά επιλύει το X σε πολυωνυμικό χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι P=NP;

(γ) (1) Να βάλετε σε σειρά από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη κλάση πολυπλοκότητας/υπολογισιμότητας (με την έννοια ότι η μεγαλύτερη κλάση εμπεριέχει πλήρως τη μικρότερη) τις παρακάτω κλάσεις δεδομένου ότι $P \neq NP$: Αναγνωρίσιμες Γλώσσες, P, $NTIME(n^3)$, $coNP$, $TIME(n^n)$, Διαγνώσιμες Γλώσσες, $NTIME(n^2)$, όπου n είναι το μέγεθος της εισόδου.

Οι παραπάνω κόκκινες κλάσεις δεν λαμβάνονται υπόψιν στη βαθμολόγηση μιας και δεν μπορούν να τοποθετηθούν σε σειρά με τις υπόλοιπες.

5. (3) Ορίζουμε τα ακόλουθα προβλήματα απόφασης:

ΚΥΚΛΟΣ HAMILTON: Δοθέντος ενός κατευθυντού γραφήματος $G = (V, E)$, περιέχει το G κύκλο Hamilton; Κύκλος Hamilton είναι μια διαδρομή Hamilton η οποία ξεκινά και τελειώνει στον ίδιο κόμβο. Θυμίζουμε ότι μια διαδρομή Hamilton είναι οποιαδήποτε διαδρομή που διέρχεται από κάθε κόμβο ακριβώς μία φορά.

ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΥΚΛΟΣ: Δοθέντος ενός κατευθυντού γραφήματος $G = (V, E)$ και ενός θετικού ακεραίου $\lambda > 1$, περιέχει το G απλό κύκλο με τουλάχιστον λ κόμβους; Απλός είναι ένας κύκλος C που διέρχεται από κάθε κόμβο του ακριβώς μία φορά.

ΒΕΒΑΡΥΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ HAMILTON: Δοθέντος ενός κατευθυντού γραφήματος $G = (V, E)$ με βάρη (θετικοί ακέραιοι) στις ακμές του, και ενός θετικού ακεραίου λ, υπάρχει κύκλος Hamilton με συνολικό κόστος $< \lambda$ (αυστηρά μικρότερο);

Δοθέντος ότι το πρόβλημα ΚΥΚΛΟΣ HAMILTON είναι NP-πλήρες, αποδείξτε ότι:

(α) (1) Το πρόβλημα ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΥΚΛΟΣ είναι NP-δυσχερές.

(β) (2) Το πρόβλημα ΒΕΒΑΡΥΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ HAMILTON είναι NP-πλήρες με αναγωγή του προβλήματος ΚΥΚΛΟΣ HAMILTON σε αυτό.

Καλή Επιτυχία!!!

Ενδεικτικές Λύσεις

1.

- **i.** **Α**
- **ii.** **Α**
- **iii.** **Α**
- **iv.** **Ψ**
- **v.** **Α**
- **vi.** **Ψ**
- **vii.** **Ψ**
- **viii.** **Ψ**

2. Η ΤΜ Μ δεν είναι διαγνώστης. Αυτό γιατί σε είσοδο 10 εγκλωβίζεται – γενικά εγκλωβίζεται όταν υπάρχει 0 οπουδήποτε αλλού εκτός της αρχής της εισόδου μιας και αναγκάζεται να πάει αριστερά στην κατάσταση q_1 όταν βρίσκει 0. Με είσοδο την κενή λέξη απορρίπτει. Με βάση τα παραπάνω, η γλώσσα της M είναι: $L(M) = (1+0)1^*$.

3. Η ΤΜ Μ2, για είσοδο x:

- αν η x έχει διαφορετικό μήκος από την w, τότε αποδέχεται
- αλλιώς (αν η x έχει ίδιο μήκος με την w), εκτελεί την Μ με είσοδο w. Αν η Μ αποδεχτεί την w τότε η Μ2 αποδέχεται την x, ενώ αν η Μ απορρίψει την w τότε η Μ2 απορρίπτει την x.

Αιτιολόγηση: Αν η Μ αποδέχεται την είσοδο w, τότε w∈L(M2). Επίσης ισχύει w∈L(M1). Συνεπώς η L(M1) δεν είναι το συμπλήρωμα της L(M2) (καθώς και οι δύο περιέχουν την w) και άρα η R απορρίπτει την είσοδο $\langle M_1, M_2\rangle$. Συνεπώς η S αποδέχεται την είσοδο $\langle M, w\rangle$. Αν η Μ δεν αποδέχεται την είσοδο w, τότε οι συμβολοσειρές που έχουν το ίδιο μήκος με την w δεν ανήκουν στην L(M2), ενώ ανήκουν στην L(M1). Επίσης οι συμβολοσειρές που έχουν διαφορετικό μήκος από την w ανήκουν στην L(M2), ενώ δεν ανήκουν στην L(M1). Με βάση τα παραπάνω, κάθε συμβολοσειρά του Σ* ανήκει ακριβώς σε μία από τις L(M1), L(M2) και άρα η L(M1) είναι το συμπλήρωμα της L(M2). Συνεπώς η R αποδέχεται την είσοδο και άρα η S απορρίπτει την $\langle M, w\rangle$.

4. **(α)** Τρέχουμε το A για $|x|^2$ βήματα και αν αποδεχτεί αποδεχόμαστε αλλιώς ξέρουμε ότι ο A θα απορρίψει άρα απορρίπτουμε. Επομένως το πρόβλημα με βάση αυτή την μικρή περιγραφή αλγορίθμου ανήκει στο P.
(β) Όχι διότι η αναγωγή δεν έγινε με την σωστή φορά. Θα έπρεπε να είχε ανάγει το 4SAT στο X ώστε να δείξει ότι P= NP. Επειδή το 4SAT είναι πλήρες, όλα τα προβλήματα ανάγονται στο 4SAT και συνεπώς έτσι θα ανάγονται και στο X. Και επειδή το X επιλύθηκε σε πολυωνυμικό χρόνο τότε όλα τα προβλήματα της NP επιλύονται όμοια.
(γ) $NTIME(n) \leq NTIME(n^3) \leq P \leq coNP \leq NTIME(n^n) \leq$ Διαγνώσιμες Γλώσσες $\leq$ Αναγνωρίσιμες Γλώσσες

5. (Α) Το πρόβλημα ΚΥΚΛΟΣ HAMILTON αποτελεί ειδική περίπτωση του προβλήματος ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΥΚΛΟΣ. Προκύπτει από το πρόβλημα ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΥΚΛΟΣ για λ ίσο με το πλήθος των κόμβων του γραφήματος. Αφού η ειδική περίπτωση είναι δύσκολο πρόβλημα (NP-πλήρες), και η γενίκευση θα είναι τουλάχιστον τόσο δύσκολο πρόβλημα. Άρα το πρόβλημα ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΥΚΛΟΣ είναι NP-δύσκολο.
(Β) Αρχικά θα αποδείξουμε ότι ανήκει στην κλάση NP. Δοθέντος ενός κατευθυντού γραφήματος $G = (V, E)$ με βάρη (θετικοί ακέραιοι) στις ακμές του και ενός θετικού ακεραίου λ, μπορούμε να μαντέψουμε μια ακολουθία κόμβων του G και να επαληθεύσουμε ότι (i) η ακολουθία ξεκινά και τελειώνει με τον ίδιο κόμβο, (ii) η ακολουθία διέρχεται από όλες τους κόμβους του G, (iii) κάθε κόμβος του G (εκτός από αυτόν με τον οποίο ξεκινά και τελειώνει η ακολουθία) εμφανίζεται στην ακολουθία ακριβώς μία φορά και (iv) το συνολικό κόστος της ακολουθίας είναι $< \lambda$. Ο χρόνος που απαιτείται για την επαλήθευση είναι πολυωνυμικός (γραμμικός) στο πλήθος των κόμβων και στο πλήθος των ακμών του γραφήματος. Άρα το πρόβλημα ανήκει στην κλάση NP.

Δοθέντος ενός κατευθυντού γραφήματος $G = (V, E)$ θα κατασκευάσουμε κατευθυντό γράφημα $G' = (V', E')$ με βάρη στις ακμές του και θετικό ακέραιο λ έτσι ώστε το G να περιέχει κύκλο Hamilton αν και μόνο αν το G' περιέχει κύκλο Hamilton συνολικού κόστους $< \lambda$.
Ο G' θα περιέχει τους κόμβους G, οι οποίοι θα συνδέονται ανά δύο με ακμή (πλήρες γράφημα), διατηρώντας την κατεύθυνση των ακμών του G (οι υπόλοιπες έχουν αυθαίρετη κατεύθυνση). Επίσης οι ακμές του G θα έχουν βάρος 1 ενώ οι υπόλοιπες ακμές θα έχουν βάρος 2. Τέλος ο ακέραιος λ ορίζεται ίσος με το πλήθος $n = |V|$ των κόμβων του γραφήματος αυξημένος κατά μία θετική σταθερά $\varepsilon < 1$, δηλαδή $\lambda = n + \epsilon$. Προφανώς η κατασκευή του G' γίνεται σε χρόνο πολυωνυμικό στο μέγεθος του G. Για αυτή την αναγωγή αποδεικνύουμε την εξής ισοδυναμία:

$$G \in ΚΥΚΛΟΣ\ HAMILTON \Leftrightarrow G' \in ΒΕΒΑΡΥΜΜΕΝΟΣ\ ΚΥΚΛΟΣ\ HAMILTON$$

Έστω ότι το G περιέχει κύκλο Hamilton. Τότε αυτός αποτελεί κύκλο Hamilton και στον G' με συνολικό κόστος $n < \lambda = n + \epsilon$.
Έστω ότι το G' περιέχει κύκλο Hamilton με συνολικό κόστος $< \lambda = n + \epsilon$. Τότε υποχρεωτικά σε αυτόν θα περιλαμβάνονται μόνο εκείνες οι ακμές που έχουν βάρος 1 δηλαδή πρόκειται για κύκλο Hamilton στο γράφημα G.
Η αναγωγή είναι ορθή, άρα το πρόβλημα ΒΕΒΑΡΥΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ HAMILTON είναι NP-πλήρες.

*ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «**ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ**»*
*17/06/2024 – **<u>ΟΜΑΔΑ Δ</u>***
Διάρκεια Εξέτασης (2 ώρες και 30 λεπτά)

1. (2) Σας δίνεται η εξής γλώσσα:

$$COMPL_{TM} = \{\langle M_1, M_2\rangle : η\ γλώσσα\ L(M_1)\ είναι\ το\ συμπλήρωμα\ της\ γλώσσας\ L(M_2)\}$$

Να συμπληρώσετε την παρακάτω απόδειξη (τα κενά κουτιά) για τη μη διαγνωσιμότητα της $COMPL_{TM}$.
<u>Απόδειξη:</u> Θα δείξουμε ότι η γλώσσα $COMPL_{TM}$ είναι μη διαγνώσιμη κάνοντας αναγωγή από τη γνωστή μη διαγνώσιμη γλώσσα της αποδοχής A_{TM}. Έστω ότι η γλώσσα $COMPL_{TM}$ είναι διαγνώσιμη και έστω R μια TM που τη διαγιγνώσκει. Χρησιμοποιώντας την R, κατασκευάζουμε την TM S που διαγιγνώσκει τη γλώσσα A_{TM} ως εξής:
S = για είσοδο $\langle M, w\rangle$, όπου M είναι μια TM και w μια συμβολοσειρά:

16. Κατασκεύασε την TM M_1, η οποία για είσοδο x, αν η x έχει το ίδιο μήκος με την w τότε αποδέχεται, αλλιώς απορρίπτει.
17. Κατασκεύασε την TM M_2, η οποία για είσοδο x:

    $\boxed{}$
18. Εκτέλεσε την TM R με είσοδο $\langle M_1, M_2\rangle$
19. Αν η R αποδεχτεί, τότε απόρριψε
20. Αν η R απορρίψει, τότε αποδέξου

Πράγματι, η S αποτελεί διαγνώστη της γλώσσας A_{TM} αφού:

$\boxed{}$

Καθώς γνωρίζουμε ότι η γλώσσα A_{TM} είναι μη διαγνώσιμη, καταλήγουμε σε άτοπο. Έτσι, έχουμε αποδείξει ότι, αντίθετα με την υπόθεσή μας, η γλώσσα $COMPL_{TM}$ είναι μη διαγνώσιμη.

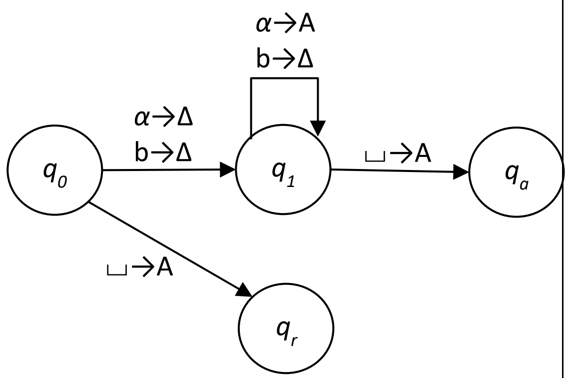
2. (3) Ορίζουμε τα ακόλουθα προβλήματα απόφασης:
ΚΥΚΛΟΣ HAMILTON: Δοθέντος ενός κατευθυντού γραφήματος $G = (V, E)$, περιέχει το G κύκλο Hamilton; Κύκλος Hamilton είναι μια διαδρομή Hamilton η οποία ξεκινά και τελειώνει στον ίδιο κόμβο. Θυμίζουμε ότι μια διαδρομή Hamilton είναι οποιαδήποτε διαδρομή που διέρχεται από κάθε κόμβο ακριβώς μία φορά.
ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΥΚΛΟΣ: Δοθέντος ενός κατευθυντού γραφήματος $G = (V, E)$ και ενός θετικού ακεραίου $m > 1$, περιέχει το G απλό κύκλο με τουλάχιστον m κόμβους; Απλός είναι ένας κύκλος C που διέρχεται από κάθε κόμβο του ακριβώς μία φορά.
ΒΕΒΑΡΥΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ HAMILTON: Δοθέντος ενός κατευθυντού γραφήματος $G = (V, E)$ με βάρη (θετικοί ακέραιοι) στις ακμές του, και ενός θετικού ακεραίου m, υπάρχει κύκλος Hamilton με συνολικό κόστος $< m$ (αυστηρά μικρότερο);
Δοθέντος ότι το πρόβλημα ΚΥΚΛΟΣ HAMILTON είναι NP-πλήρες, αποδείξτε ότι:
(α) (1) Το πρόβλημα ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΥΚΛΟΣ είναι NP-δυσχερές.
(β) (2) Το πρόβλημα ΒΕΒΑΡΥΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ HAMILTON είναι NP-πλήρες με αναγωγή του προβλήματος ΚΥΚΛΟΣ HAMILTON σε αυτό.

3. (3) (α) (1) Έστω ένας αλγόριθμος A που διαγιγνώσκει τη γλώσσα L. Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να εντοπίσει αν $x \in L$ σε $|x|^3$ βήματα αλλά αν $x \notin L$ τότε ο αλγόριθμος χρειάζεται $3^{|x|}$ βήματα. Να δείξετε ότι η L μπορεί να διαγνωσθεί σε πολυωνυμικό χρόνο.
(β) (1) Έστω ένα πρόβλημα X που ανήκει στην κλάση NP και δεν έχουμε βρει ως σήμερα έναν αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου. Ένας επιστήμονας ανάγει σε πολυωνυμικό χρόνο το X στο 5SAT. Ένας άλλος επιστήμονας μετά επιλύει το X σε πολυωνυμικό χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι P=NP;
(γ) (1) Να βάλετε σε σειρά από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη κλάση πολυπλοκότητας/υπολογισιμότητας (με την έννοια ότι η μεγαλύτερη κλάση εμπεριέχει πλήρως τη μικρότερη) τις παρακάτω κλάσεις δεδομένου ότι $P \neq NP$: *Συμπληρωματικά* Αναγνωρίσιμες Γλώσσες, $co-P$, $NTIME(n^5)$, NP, $TIME(n^n)$, Διαγνώσιμες Γλώσσες, $NTIME(n^2)$, όπου n είναι το μέγεθος της εισόδου.
Οι παραπάνω κόκκινες κλάσεις δεν λαμβάνονται υπόψιν στη βαθμολόγηση μιας και δεν μπορούν να τοποθετηθούν σε σειρά με τις υπόλοιπες.

4. (2) Να αναφέρετε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι Αληθής ή Ψευδής.
Εφαρμόζεται αρνητική βαθμολόγηση σε αυτό το θέμα που μεταφέρεται στον τελικό βαθμό του γραπτού. (Σωστή απάντηση: $+0.25$, *Λάθος απάντηση:* -0.25*)*

i. Αν $A \leq_m B$ και η A είναι διαγνώσιμη τότε και η B είναι διαγνώσιμη.
ii. Το 2-SAT ανήκει στην κλάση NPC.
iii. Το αλφάβητο ταινίας Γ δεν μπορεί να συμπίπτει με το αλφάβητο εισόδου Σ.
iv. Αν 4SAT∈P τότε και co-4SAT∈P.
v. Η κλάση των NP-δυσχερών προβλημάτων δεν εμπεριέχει την κλάση NPC.
vi. Η κλάση coNP είναι κλειστή ως προς την πράξη του συμπληρώματος.
vii. Όλοι οι πραγματικοί αριθμοί είναι περιγράψιμοι.
viii. Ένα γραμμικώς φραγμένο αυτόματο διαγιγνώσκει ακριβώς τις ίδιες γλώσσες με μία TM.

5. (2) Έστω η αιτιοκρατική TM M όπου $\Sigma = \{\alpha, b\}$ και $\Gamma = \{\alpha, b, \sqcup\}$ με τη διπλανή συνάρτηση μετάβασης. Έστω ότι η αρχική κατάσταση είναι η q_0, η κατάσταση απόρριψης είναι η q_r και η κατάσταση αποδοχής είναι η q_α. Είναι η M διαγνώστης; Ποια είναι η γλώσσα που αναγνωρίζει η M; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (Α: Αριστερά, Δ: Δεξιά)



Καλή Επιτυχία!!!

Ενδεικτικές Λύσεις

1. Η TM M2, για είσοδο x:

- αν η x έχει διαφορετικό μήκος από την w, τότε αποδέχεται
- αλλιώς (αν η x έχει ίδιο μήκος με την w), εκτελεί την M με είσοδο w. Αν η M αποδεχτεί την w τότε η M2 αποδέχεται την x, ενώ αν η M απορρίψει την w τότε η M2 απορρίπτει την x.

Αιτιολόγηση: Αν η M αποδέχεται την είσοδο w, τότε w∈L(M2). Επίσης ισχύει w∈L(M1). Συνεπώς η L(M1) δεν είναι το συμπλήρωμα της L(M2) (καθώς και οι δύο περιέχουν την w) και άρα η R απορρίπτει την είσοδο $\langle M_1, M_2\rangle$. Συνεπώς η S αποδέχεται την είσοδο $\langle M, w\rangle$. Αν η M δεν αποδέχεται την είσοδο w, τότε οι συμβολοσειρές που έχουν το ίδιο μήκος με την w δεν ανήκουν στην L(M2), ενώ ανήκουν στην L(M1). Επίσης οι συμβολοσειρές που έχουν διαφορετικό μήκος από την w ανήκουν στην L(M2), ενώ δεν ανήκουν στην L(M1). Με βάση τα παραπάνω, κάθε συμβολοσειρά του Σ* ανήκει ακριβώς σε μία από τις L(M1), L(M2) και άρα η L(M1) είναι το συμπλήρωμα της L(M2). Συνεπώς η R αποδέχεται την είσοδο και άρα η S απορρίπτει την $\langle M, w\rangle$.

2. (Α) Το πρόβλημα ΚΥΚΛΟΣ HAMILTON αποτελεί ειδική περίπτωση του προβλήματος ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΥΚΛΟΣ. Προκύπτει από το πρόβλημα ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΥΚΛΟΣ για m ίσο με το πλήθος των κόμβων του γραφήματος. Αφού η ειδική περίπτωση είναι δύσκολο πρόβλημα (NP-πλήρες), και η γενίκευση θα είναι τουλάχιστον τόσο δύσκολο πρόβλημα. Άρα το πρόβλημα ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΥΚΛΟΣ είναι NP-δύσκολο.

(Β) Αρχικά θα αποδείξουμε ότι ανήκει στην κλάση NP. Δοθέντος ενός κατευθυντού γραφήματος $G = (V, E)$ με βάρη (θετικοί ακέραιοι) στις ακμές του και ενός θετικού ακεραίου m, μπορούμε να μαντέψουμε μια ακολουθία κόμβων του G και να επαληθεύσουμε ότι (i) η ακολουθία ξεκινά και τελειώνει με τον ίδιο κόμβο, (ii) η ακολουθία διέρχεται από όλες τους κόμβους του G, (iii) κάθε κόμβος του G (εκτός από αυτόν με τον οποίο ξεκινά και τελειώνει η ακολουθία) εμφανίζεται στην ακολουθία ακριβώς μία φορά και (iv) το συνολικό κόστος της ακολουθίας είναι $< m$. Ο χρόνος που απαιτείται για την επαλήθευση είναι πολυωνυμικός (γραμμικός) στο πλήθος των κόμβων και στο πλήθος των ακμών του γραφήματος. Άρα το πρόβλημα ανήκει στην κλάση NP.

Δοθέντος ενός κατευθυντού γραφήματος $G = (V, E)$ θα κατασκευάσουμε κατευθυντό γράφημα $G' = (V', E')$ με βάρη στις ακμές του και θετικό ακέραιο m έτσι ώστε το G να περιέχει κύκλο Hamilton αν και μόνο αν το G' περιέχει κύκλο Hamilton συνολικού κόστους $< m$.

Ο G' θα περιέχει τους κόμβους G, οι οποίοι θα συνδέονται ανά δύο με ακμή (πλήρες γράφημα), διατηρώντας την κατεύθυνση των ακμών του G (οι υπόλοιπες έχουν αυθαίρετη κατεύθυνση). Επίσης οι ακμές του G θα έχουν βάρος 1 ενώ οι υπόλοιπες ακμές θα έχουν βάρος 2. Τέλος ο ακέραιος m ορίζεται ίσος με το πλήθος $n = |V|$ των κόμβων του γραφήματος αυξημένος κατά μία θετική σταθερά $\varepsilon < 1$, δηλαδή $m = n + \epsilon$. Προφανώς η κατασκευή του G' γίνεται σε χρόνο πολυωνυμικό στο μέγεθος του G. Για αυτή την αναγωγή αποδεικνύουμε την εξής ισοδυναμία:

$$G \in ΚΥΚΛΟΣ\ HAMILTON \Leftrightarrow G' \in ΒΕΒΑΡΥΜΜΕΝΟΣ\ ΚΥΚΛΟΣ\ HAMILTON$$

Έστω ότι το G περιέχει κύκλο Hamilton. Τότε αυτός αποτελεί κύκλο Hamilton και στον G' με συνολικό κόστος $n < m = n + \epsilon$.

Έστω ότι το G' περιέχει κύκλο Hamilton με συνολικό κόστος $< m = n + \epsilon$. Τότε υποχρεωτικά σε αυτόν θα περιλαμβάνονται μόνο εκείνες οι ακμές που έχουν βάρος 1 δηλαδή πρόκειται για κύκλο Hamilton στο γράφημα G.

Η αναγωγή είναι ορθή, άρα το πρόβλημα ΒΕΒΑΡΥΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ HAMILTON είναι NP-πλήρες.

3. (α) Τρέχουμε το A για $|x|^3$ βήματα και αν αποδεχτεί αποδεχόμαστε αλλιώς ξέρουμε ότι ο A θα απορρίψει άρα απορρίπτουμε. Επομένως το πρόβλημα με βάση αυτή την μικρή περιγραφή αλγορίθμου ανήκει στο P.

(β) Όχι διότι η αναγωγή δεν έγινε με την σωστή φορά. Θα έπρεπε να είχε ανάγει το 5SAT στο Χ ώστε να δείξει ότι P= NP. Επειδή το 5SAT είναι πλήρες, όλα τα προβλήματα ανάγονται στο 5SAT και συνεπώς έτσι θα ανάγονται και στο Χ. Και επειδή το Χ επιλύθηκε σε πολυωνυμικό χρόνο τότε όλα τα προβλήματα της NP επιλύονται όμοια.

(γ) $NTIME(n^2) \leq NTIME(n^5) \leq co-P \leq NP \leq TIME(n^n) \leq$ Διαγνώσιμες Γλώσσες $\leq$ *Συμπληρωματικά* Αναγνωρίσιμες Γλώσσες

4.

i. **Ψ**
ii. **Ψ**
iii. **Α**
iv. **Α**
v. **Ψ**
vi. **Ψ**
vii. **Ψ**
viii. **Ψ**

5. Η TM M δεν είναι διαγνώστης. Αυτό γιατί σε είσοδο ba εγκλωβίζεται – γενικά εγκλωβίζεται όταν υπάρχει a οπουδήποτε αλλού εκτός της αρχής της εισόδου μιας και αναγκάζεται να πάει αριστερά στην κατάσταση q_1 όταν βρίσκει a. Με είσοδο την κενή λέξη απορρίπτει. Με βάση τα παραπάνω, η γλώσσα της M είναι: $L(M) = (b + a)b^*$.