Θεωρία Υπολογισιμότητας

Of course, A_{TM} reduces to most of them (the ones that can be defined formally), and thus Google can provide you with other kinds of answers while ChatGPT can provide you with more advanced kinds of answer…

Αναγωγές

Αν. Καθηγητής Τσίχλας Κωνσταντίνος

Αποδείξεις Διαγνωσιμότητας

Πως αποδεικνύεται ότι μία γλώσσα είναι διαγνώσιμη;

Για να δείξουμε ότι μία γλώσσα είναι διαγνώσιμη, αρκεί να κατασκευάσουμε μία TM που αποδεδειγμένα την διαγιγνώσκει.

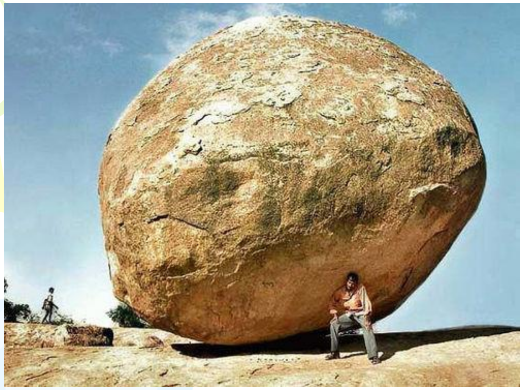
Αποδείξεις Ανεπιλυσιμότητας

Πώς αποδεικνύουμε ότι μία γλώσσα είναι μη-διαγνώσιμη;

Για να αποδείξουμε ότι μία γλώσσα είναι ανεπίλυτη, πρέπει να δείξουμε ότι *δεν υπάρχει* ΤΜ που να την διαγιγνώσκει.

Χρησιμοποιούμε την έννοια της αναγωγής

Η Έννοια της Αναγωγής



Το πρόβλημα της μετακίνησης βράχου.

Το πρόβλημα της εύρεσης μοχλού και υπομοχλίου.

Man lifting a stone with a lever

Δυνατότητα επίλυσης μετακίνησης δεδομένης της εύρεσης μοχλού

Άλλο Παράδειγμα

- Το ταξίδι από την Αθήνα στο Παρίσι …
- *<u>ανάγεται</u>* στην αγορά αεροπορικού εισιτηρίου …

- το οποίο *<u>ανάγεται</u>* στην εύρεση χρημάτων για την αγορά του εισιτηρίου …

- το οποίο *<u>ανάγεται</u>* στην εύρεση εργασίας

- (ή τα πληρώνει ο μπαμπάς και η μαμά…)

Ακόμα Ένα Παράδειγμα (από την ανάποδη όμως)

Θέλουμε να μιλήσουμε με τον *Μήτσο* τον ντουντούκαρο αλλά δεν έχουμε το τηλ. του. Το έχει όμως ο *Μπάμπης* ο σουγιάς και **μόνο αυτός**!!!

(εύρεση τηλ. *Μήτσου* ***ανάγεται*** στην επικοινωνία με τον *Μπάμπη*)

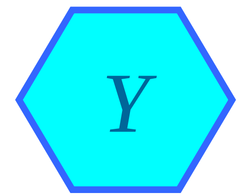
Αν όμως κάποιος μάντης μας έλεγε ότι δεν μπορούμε με τίποτα να βρούμε το τηλ. του *Μήτσου* τότε θα μπορούσαμε να επικοινωνήσουμε με τον *Μπάμπη*;

Απόδειξη με Αναγωγή

A ανάγεται στο *B*

1. Ξέρουμε ότι η *X* που λύνει το *A* δεν υπάρχει. (π.χ., *X* = μία TM που διαγιγνώσκει την A_{TM})

2. Έστω ότι η *Y* υπάρχει. (*Y* = μία TM που διαγιγνώσκει την *B*)



3. Δείξτε πως η *Y* συνεπάγεται τη *X*.

4. Αφού η *X* δεν υπάρχει, αλλά η *Y* θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για τη *X*, τότε η *Y* δεν μπορεί να υπάρχει.

Το πρόβλημα Περάτωσης

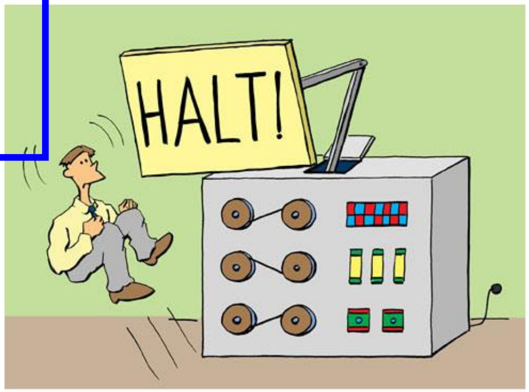
$$\textit{Περάτωση}_{\mathrm{TM}} = \{\langle M,w\rangle \mid \text{η } M \text{ τερματίζει σε είσοδο } w\}$$

Είναι η *Περάτωση*$_{TM}$ διαγνώσιμη;

Δείξτε ότι καμία TM δεν διαγιγνώσκει την Περάτωση$_{\mathrm{TM}}$

Σχεδιάστε μία TM που διαγιγνώσκει την Περάτωση$_{\mathrm{TM}}$

Δείξτε ότι μία TM που θα διαγνώσει την Περάτωση$_{\mathrm{TM}}$ θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να διαγνώσει την A_{TM} που ήδη έχουμε δείξει ότι είναι μη-διαγνώσιμη.



Alan designed the perfect computer

Αναγωγή με την Γλώσσα Αποδοχής

$A_{\text{TM}} = \{\langle M, w\rangle \mid$ η M είναι μία TM που αποδέχεται το $w\}$

Δείξαμε ότι η A_{TM} είναι μη-διαγνώσιμη

Αφού ξέρουμε ότι η A_{TM} είναι μη-διαγνώσιμη, μπορούμε να δείξουμε ότι μία νέα γλώσσα B είναι μη-διαγνώσιμη αν μία TM που διαγιγνώσκει την B θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να διαγνώσει την A_{TM}.

Διαγνωστής για την A_{TM}

- Έστω ότι η *ΠΕΡΑΤΩΣΗ*$_{TM}$ είναι διαγνώσιμη.
- Έστω *R* η TM που διαγιγνώσκει την *ΠΕΡΑΤΩΣΗ*$_{TM}$.
- Χρησιμοποιούμε την *R* για να φτιάξουμε μία νέα TM που διαγιγνώσκει την A_{TM}:
  1. Δίνουμε είσοδο στην *R* το $\langle M,w\rangle$
  2. Αν η *R* απορρίπτει, σημαίνει ότι η *M* δεν τερματίζει: ΑΠΟΡΡΙΨΗ
  3. Αν η *R* αποδέχεται, σημαίνει ότι η *M* τερματίζει:
     - Εξομοίωσε την *M* στο *w* και αποδέξου/απόρριψε με βάση αν η *M* αποδέχεται/απορρίπτει σε είσοδο *w*.

Αφού η TM για την *ΠΕΡΑΤΩΣΗ*$_{TM}$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διαγνώσει την A_{TM} (που είναι αδύνατο) προκύπτει ότι τέτοια TM δεν μπορεί να υπάρχει για την *ΠΕΡΑΤΩΣΗ*$_{TM}$.

Κενότητα

Για μία TM υπάρχει λέξη *w* που να την αποδέχεται;

$KENOTHTA_{TM}$ = {⟨M⟩ | η *M* είναι μία TM και L(*M*)=∅}

<u>Θεώρημα:</u> Η $KENOTHTA_{TM}$ είναι μη-διαγνώσιμη.

Δομή απόδειξης:

- Με εις άτοπο
- Υποθέτουμε ότι η $KENOTHTA_{TM}$ είναι διαγνώσιμη.
- Έστω *R* η TM που διαγιγνώσκει την $KENOTHTA_{TM}$.
- Χρησιμοποιούμε την *R* για να κατασκευάσουμε την *S*, που διαγιγνώσκει την A_{TM}.

Πρώτη Προσπάθεια

$KENOTHTA_{TM} = \{\langle M \rangle \mid$ η M είναι μία TM και $L(M)=\emptyset\}$

Όταν η S δέχεται είσοδο $\langle M,w \rangle$ καλεί την R με είσοδο $\langle M \rangle$.

- Αν η R αποδέχεται, τότε απορρίπτουμε, αφού η M δεν αποδέχεται καμία λέξη και άρα και την w.
- Τι γίνεται αν η R απορρίψει;

Ιδέες;

Ας αλλάξουμε την M.

Ορισμός Διαφορετικής M

$KENOTHTA_{TM} = \{\langle M \rangle \mid$ η M είναι μία TM και $L(M)=\emptyset\}$

Ορίζουμε την $M1$ σε είσοδο x:

1. Αν $x \neq w$, απέρριψε
2. Αν $x=w$, εκτέλεσε την M σε w και αποδέξου αν η M αποδέχεται.

Η $M1$

- Αποδέχεται μόνο την w, ή
- Δεν αποδέχεται καμία λέξη

Μη Διαγνωσιμότητα

$KENOTHTA_{TM} = \{\langle M \rangle \mid$ η M είναι μία ΤΜ και $L(M)=\emptyset\}$

Θεώρημα: Η $KENOTHTA_{TM}$ είναι μη διαγνώσιμη.

Ορίζουμε την S ως εξής:

Σε είσοδο $\langle M,w \rangle$:

1. Κατασκεύασε την $M1$ από την M και w.
2. Τρέξε την R σε είσοδο $\langle M1 \rangle$
3. Αν η R αποδεχτεί, απόρριψε – Αν η R απορρίψει, αποδέξου.

Η S διαγιγνώσκει την A_{TM} – άτοπο.

Ισοδυναμία

Είναι δύο TMς ισοδύναμες;

$ΙΣΟΔ_{TM}$ = {⟨M1,M2⟩ | οι M1,M2 είναι TMς και L(M1)=L(M2)}

<u>Θεώρημα:</u> Η $ΙΣΟΔ_{TM}$ είναι μη διαγνώσιμη.

- Βαρεθήκαμε να ανάγουμε την A_{TM} σε όλα.
- Θα κάνουμε μία αναγωγή από την $ΚΕΝΟΤΗΤΑ_{TM}$ στην $ΙΣΟΔ_{TM}$.

Μη-Διαγνωσιμότητα

$I\Sigma O\Delta_{TM}$ = {⟨*M*1,*M*2⟩ | οι *M*1,*M*2 είναι TMς και L(*M*1)=L(*M*2)}

Θεώρημα: Η $I\Sigma O\Delta_{TM}$ είναι μη-διαγνώσιμη.

Έστω ότι η *R* αποφασίζει την $I\Sigma O\Delta_{TM}$. Κατασκευάζουμε την TM *S* όπου για είσοδο ⟨*M*⟩:

1. Εκτέλεσε την *R* σε είσοδο ⟨*M*,*M0*⟩, όπου *M*0 είναι μία μηχανή που απορρίπτει όλες τις εισόδους.
2. Αν η *R* αποδέχεται, η *S* αποδέχεται – αν η *R* απορρίψει, η *S* απορρίπτει.

Αν η *R* διαγιγνώσκει την $I\Sigma O\Delta_{TM}$ τότε η *S* διαγιγνώσκει την $KENOTHTA_{TM}$.

Κανονικότητα – Ένα Παράδειγμα ακόμα

Μία TM αποδέχεται μία κανονική γλώσσα;

$KANON_{TM} = \{\langle M \rangle \mid$ η M είναι μία TM και $L(M)$ είναι κανονική$\}$

Δομή απόδειξης:

- Με εις άτοπο
- Υποθέτουμε ότι η $KANON_{TM}$ είναι διαγνώσιμη.
- Έστω R η TM που διαγιγνώσκει την $KANON_{TM}$.
- Χρησιμοποιούμε την R για να κατασκευάσουμε την S, που διαγιγνώσκει την A_{TM}.

Διαίσθηση

$KANON_{TM} = \{\langle M \rangle \mid$ η M είναι μία TM και L(M) είναι κανονική$\}$

Αλλάζουμε την M έτσι ώστε η νέα TM να αποδέχεται μία κανονική γλώσσα αν και μόνο αν η M αποδέχεται το w.

Σχεδιάζουμε την $M2$ έτσι ώστε:

- Αν η M δεν αποδέχεται την w, τότε η $M2$ αποδέχεται την $\{0^n1^n | n \geq 0\}$ (μη-κανονική)
- Αν η M αποδέχεται την w, τότε η $M2$ αποδέχεται την Σ^* (κανονική).

Ποια είναι η $M2$;

Δοθέντων των M και w, κατασκευάζουμε την $M2$:

Σε είσοδο x:

1. Αν το x έχει τη μορφή $0^n 1^n$, αποδεχόμαστε
2. Διαφορετικά, τρέχουμε την M σε είσοδο w και αποδεχόμαστε το x αν η M αποδέχεται το w.

<u>Ισχυρισμός:</u>

- Αν η M δεν αποδέχεται την w, τότε η $M2$ αποδέχεται την $\{0^n 1^n | n \geq 0\}$.
- Αν η M αποδέχεται την w, τότε η $M2$ αποδέχεται την Σ^*.
- Η συνάρτηση: Σε είσοδο $\langle M,w \rangle$ παίρνουμε έξοδο $M2$, είναι υπολογίσιμη.

Μη-Διαγνωσιμότητα

$KANON_{TM} = \{\langle M \rangle \mid$ η M είναι μία TM και $L(M)$ είναι κανονική$\}$

<u>Θεώρημα:</u> Η $KANON_{TM}$ είναι μη-διαγνώσιμη.

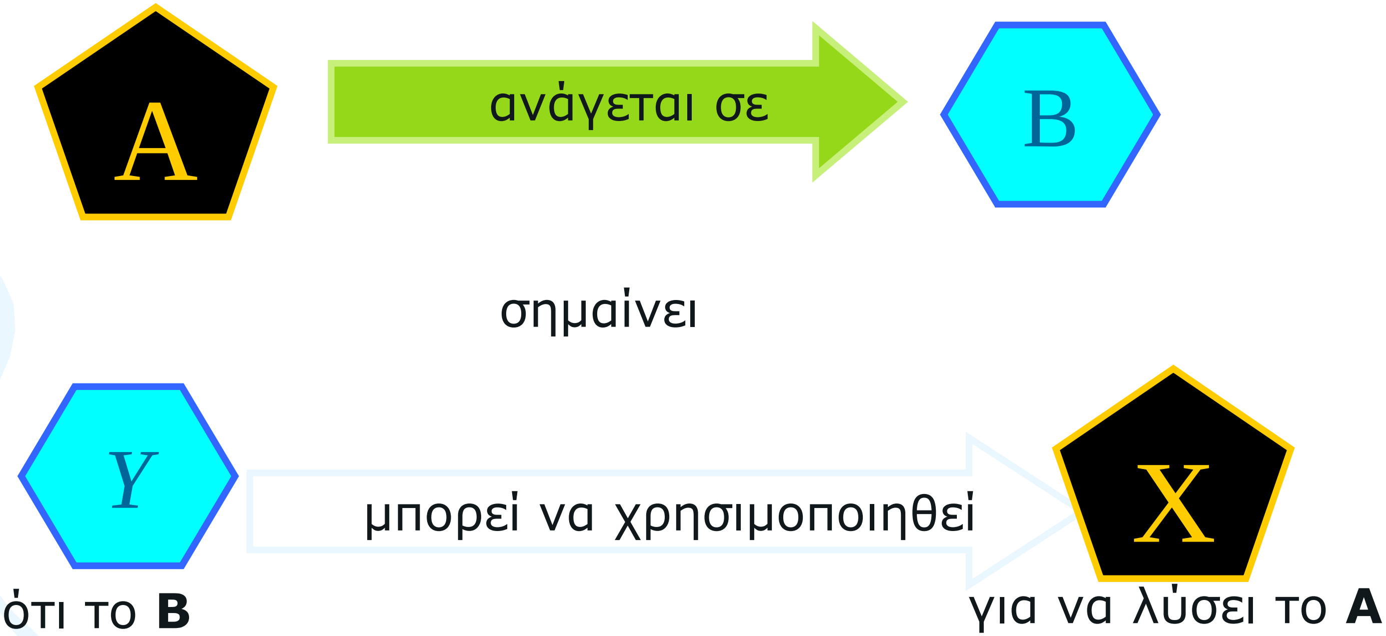
Ορίζουμε S:

Σε είσοδο $\langle M,w \rangle$:

1. Κατασκευάζουμε την $M2$ στην M και w.
2. Εκτέλεσε την R σε είσοδο $\langle M2 \rangle$.
3. Αν η R αποδέχεται, η S αποδέχεται – αν η R απορρίπτει, η S απορρίπτει.

Η S διαγιγνώσκει την A_{TM} – άτοπο.

Αποδείξεις με Αναγωγή



Άρα, το **A δεν είναι πιο δύσκολο πρόβλημα από το B.**

Αντίστροφο;

Το A ανάγεται στο B

που λύνει το ***B*** για το ***A***

Άρα, το ***A* δεν είναι πιο δύσκολο πρόβλημα από το *B*.**

Αυτό σημαίνει ότι το ***B*** είναι ίδιας δυσκολίας με το ***A***;

Όχι! Η ***Y*** μπορεί να είναι οποιαδήποτε λύση του **B**. Η ***X*** είναι μία λύση του ***A***. Μπορεί να υπάρχουν πιο εύκολες λύσεις για το ***A***.

Αν αποδείξεις ότι και η *B* ανάγεται στο *A* τότε OK (υπό προϋποθέσεις). ☹

Επικίνδυνα Σημεία

- Προσοχή: η κατεύθυνση παίζει ρόλο (A ανάγεται σε B)
  - Δείχνοντας ότι η TM που διαγιγνώσκει την B μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διαγνώσει την A, δείχνουμε ότι και η A είναι διαγνώσιμη.
  - Αν η A είναι μη-διαγνώσιμη τότε και η B πρέπει να είναι μη-διαγνώσιμη.

- Η μετατροπή θα πρέπει να περιλαμβάνει *ενέργειες που επιτρέπονται*: διαφορετικά, το άτοπο μπορεί να προέλθει από κάτι άλλο που έχουμε χρησιμοποιήσει.

Τι σημαίνει «επιτρέπονται»;

- Οι μετατροπές σε απόδειξη αναγωγής περιορίζονται από αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε
- Για μη-διαγνωσιμότητα: οι μετατροπές αναγωγής είναι οτιδήποτε μπορεί να κάνει μία TM που *εγγυημένα όμως τερματίζει*
- Για αποδείξεις πολυπλοκότητας (αργότερα) αποδεικνύουμε σχετικά με το πόσους πόρους (π.χ. χρόνο) χρειαζόμαστε: σε αυτή την περίπτωση *ο πόρος για την μετατροπή είναι περιορισμένος*

Θέμα Ιούνιος 2022

3. (25 μονάδες) Έστω η γλώσσα $\Lambda = \{\langle M\rangle | \eta\ L(M)\ \pi\varepsilon\rho\iota\varepsilon\chi\varepsilon\iota\ \tau\eta\ \lambda\varepsilon\xi\eta\ "KA\Lambda O"\}$. Να αποδείξετε ότι η Λ είναι μη-διαγνώσιμη. Με $L(M)$ συμβολίζουμε τη γλώσσα της ΤΜ M.

Θέμα Σεπτέμβριος 2022

3. (30 μονάδες) Θα ονομάζουμε ***άχρηστη*** μία κατάσταση σε μία TM M αν για οποιαδήποτε είσοδο η M δεν διέρχεται από αυτή την κατάσταση ποτέ. Έστω το πρόβλημα καθορισμού του αν μία δοθείσα κατάσταση είναι άχρηστη.

α) (4) Να εκφράσετε τυπικά το συγκεκριμένο πρόβλημα ως γλώσσα (ονοματίστε τη γλώσσα ως UL – δείτε ως παράδειγμα την εκφώνηση της άσκησης 2(Α)).

β) (15) Να αποδείξετε ότι η συγκεκριμένη γλώσσα είναι μη-διαγνώσιμη (προτείνεται – χωρίς να είναι δεσμευτικό – να χρησιμοποιήσετε για την αναγωγή τη γλώσσα $KENOTHTA_{TM} = \{\langle M \rangle : L(M) = \emptyset\}$)

γ) (4) Η συμπληρωματική γλώσσα $co-UL$ είναι διαγνώσιμη ή μη-διαγνώσιμη (με αιτιολόγηση);

δ) (7) Η UL είναι αναγνωρίσιμη, συμπληρωματικά αναγνωρίσιμη ή τίποτα από τα δύο (με αιτιολόγηση); (Σε επόμενη διάλεξη…)

Άσκηση

Δοθείσης μίας ΤΜ Μ, μίας εισόδου w και ενός συμβόλου $X \in \Gamma$, μπορεί ποτέ η Μ να γράψει Χ στην ταινία της; Δείξτε ότι το πρόβλημα αυτό είναι μη-διαγνώσιμο. Είναι αυτό το πρόβλημα αναγνωρίσιμο;

Άσκηση

Να αποδείξετε ότι η γλώσσα $L = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) \subseteq L(M_2)\}$ είναι μη διαγνώσιμη.

Άσκηση

Δείξτε ότι η γλώσσα $H = \{\langle M \rangle | \text{η } M \text{ τερματίζει σε κενή είσοδο}\}$ είναι μη διαγνώσιμη.

Άσκηση

Έστω $L_3 = \{ <M> : |L(M)| = 3 \}$. Η L_3 περιέχει όλες τις ΤΜ των οποίων η γλώσσα περιέχει ακριβώς τρεις λέξεις. Να δείξετε ότι η L_3 είναι μη-διαγνώσιμη.

Άσκηση

(Γ) Δεδομένου ενός μη-αρνητικού ακεραίου n και ενός αλφαβήτου Σ, ορίζουμε την γλώσσα:

$$L_n = \{\mathrm{w} \in \Sigma^* \mid |\mathrm{w}| \leq n\}.$$

(1) Η γλώσσα L_n και η συμπληρωματική της $\overline{L_n}$ είναι αποφασίσιμες.

(2) Δεδομένης μιας μηχανής Turing M και μιας γλώσσας L_n, υπάρχει αλγόριθμος που απαντά ως εξής (αποφασίζει) για την γλώσσα L(M): ΝΑΙ αν και μόνον αν $L_n \subseteq L(\mathrm{M})$), διαφορετικά απαντά ΟΧΙ.