Θεωρία Υπολογισιμότητας

Το πρόβλημα Αποδοχής

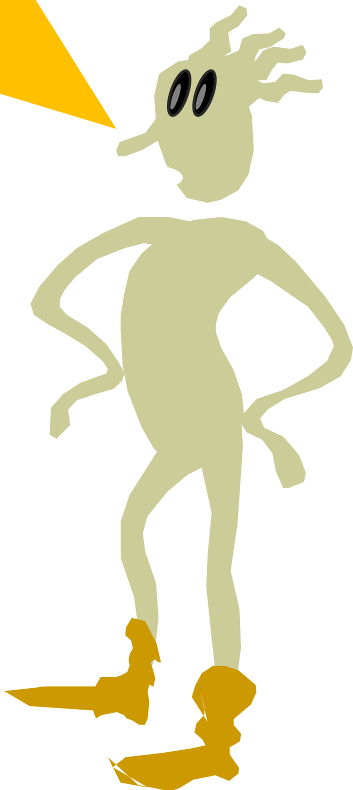
Η Τεχνική της Διαγωνοποίησης

Τα $\mathbb{N}$ και $\mathbb{R}$ έχουν το ίδιο μέγεθος;

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

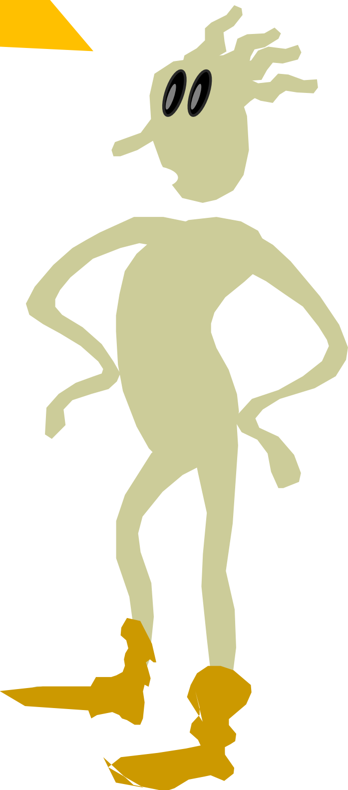
$$\mathbb{R} = \text{Οι πραγματικοί αριθμοί}$$

Αποκλείεται!
Οι φυσικοί αριθμοί θα σου τελειώσουν πολύ πριν απαριθμήσεις όλους τους πραγματικούς.



Όπα στάκα μάγκα.!
Δεν μπορείς να είσαι σίγουρος ότι δεν υπάρχει μία έξυπνη αντιστοιχία που κανείς δεν έχει σκεφτεί ακόμα.

Είμαι σίγουρος!
Ο Cantor το *απέδειξε*.
Ανακάλυψε μία πολύ σημαντική τεχνική που λέγεται ***Διαγωνιοποίηση***.



Θεώρημα

Το σύνολο των πραγματικών στο διάστημα $I=[0,1]$ δεν είναι αριθμήσιμο – είναι υπεραριθμήσιμο.

Απόδειξη με εις άτοπο.

Έστω ότι το I είναι αριθμήσιμο. Έστω f μία αντιστοιχία από το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$. Απαριθμούμε το I με την f ως εξής:

- 0: .33333333333333333333…
- 1: .314159265657839593859498 2..
- …
- k: .345322214243555345221123235..
- …

Η Λίστα L

L	0	1	2	3	4	…
0	d_{00}	d_{01}	d_{02}	d_{03}	d_{04}	…
1	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	…
2	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	…
3	d_{30}	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}	…
…	…	…	…	…	…	…

Μερικά ψηφία…

L	0	1	2	3	4	…
0	d_{00}	d_{01}	d_{02}	d_{03}	d_{04}	…
1	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	…
2	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	…
3	d_{30}	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}	…
…	…	…	…	…	…	…

Μην Μπερδευτείτε…

L	0	1	2	3	4	…
0	d_{00}	d_{01}	d_{02}	d_{03}	d_{04}	…
1	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	…
2	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	…
3	d_{30}	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}	…
…	…	…	…	…	…	…

Μπέρδεμα$_L$ =

.$C_0C_1C_2C_3$…

Ορισμός του Μπερδέματος

L	0	1	2	3	4	…
0	d_{00}	d_{01}	d_{02}	d_{03}	d_{04}	…
1	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	…
2	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	…
3	d_{30}	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}	…
…	…	…	…	…	…	…

$\text{Μπέρδεμα}_L =$

$.C_0C_1C_2C_3\ldots$

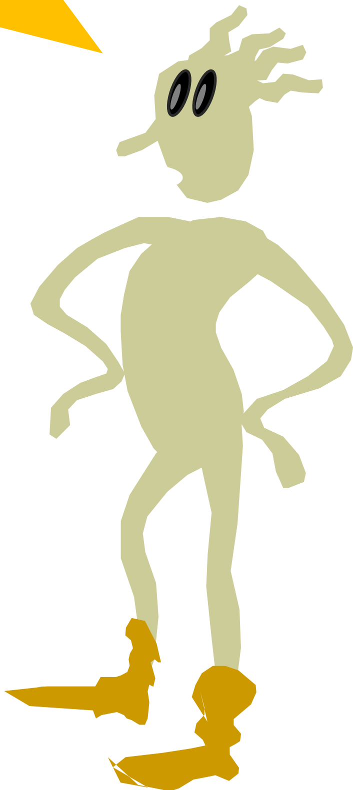
$$C_k = \begin{cases} 5, \text{ αν } d_{kk} = 6 \\ 6, \text{ διαφορετικά} \end{cases}$$

Άτοπο!!!

L	0	1	2	3	4	…
0	d_{00}	d_{01}	d_{02}	d_{03}	d_{04}	…
1	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	…
2	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	…
3	d_{30}	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}	…
…	…	…	…	…	…	…

Δεν υπάρχει φυσικός αριθμός που να αντιστοιχεί στον αριθμό Μπέρδεμα$_L$. Γιατί;

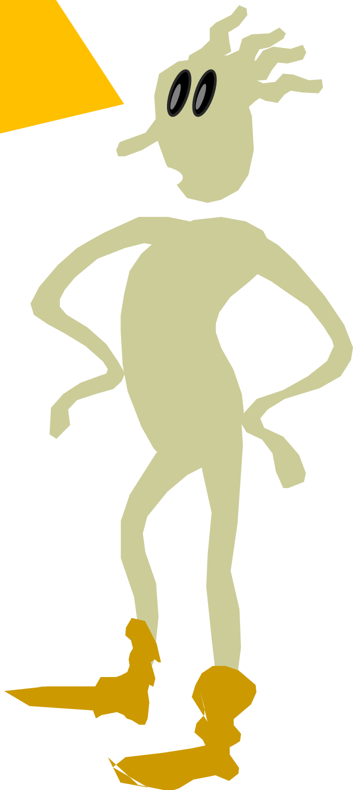
Το σύνολο των πραγματικών είναι υπεραριθμήσιμο.



Στάκα πάλι!

Γιατί δεν μπορώ να χρησιμοποιήσω το ίδιο επιχείρημα για να δείξω ότι το σύνολο των ρητών είναι υπεραριθμήσιμο;

Το επιχείρημα δουλεύει με τον ίδιο τρόπο για τους ρητούς αριθμούς μέχρι τον ορισμό της Μπέρδεμα$_L$ μιας και ο αριθμός που προκύπτει μπορεί να μην είναι ρητός και άρα δεν υπάρχει άτοπο.



Θεώρημα

Κάθε (άπειρο) υποσύνολο S του Σ^* είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη:

Απαριθμούμε το S σε λεξικογραφική σειρά. Την πρώτη λέξη την αντιστοιχούμε στο 0, την δεύτερη στο 1, κοκ…

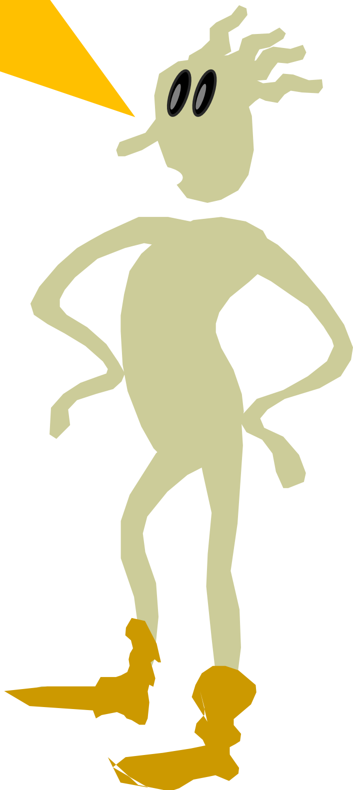
<u>Άρα:</u>

Το σύνολο όλων των δυνατών προγραμμάτων είναι αριθμήσιμο.

Ομοίως, το σύνολο όλων των προτάσεων είναι αριθμήσιμο.

Άρα:

Οι πραγματικοί αριθμοί *δεν είναι* περιγράψιμοι στο σύνολό τους.



Μη-αναγνωρισιμότητα

Θεώρημα: Υπάρχουν μη-αναγνωρίσιμες γλώσσες.

Το δείξαμε πριν λίγο.

Απόδειξη:

1. Υπάρχουν αριθμήσιμα πολλές TM
2. Υπάρχουν υπεραριθμήσιμα πολλές γλώσσες

Θα το δείξουμε σε λίγο :-)

Υπεραριθμήσιμα Πολλές Γλώσσες

Έστω *B* το σύνολο όλων των απείρων σε μήκος δυαδικών ακολουθιών. Το *B* είναι υπεραριθμήσιμο.

Απόδειξη:

Χρησιμοποιούμε διαγωνιοποίηση αντίστοιχα με αυτά που κάναμε στους πραγματικούς αριθμούς.

Αντιστοιχία *B* και Γλωσσών

Έστω L το σύνολο όλων των γλωσσών στο Σ.

Η αντιστοιχία: $\chi : L \to B$

ονομάζεται χαρακτηριστική ακολουθία της γλώσσας.

- Έστω $\Sigma^*=\{\varepsilon, s_1, s_2, s_3, \ldots\}$ (σε λεξικογραφική σειρά)
- Κάθε γλώσσα $A \in L$ αντιστοιχείται σε μία μοναδική ακολουθία $\chi(A) \in B$:
  - Το i-οστό bit της $\chi(L)$ είναι 1 αν και μόνο αν $s_i \in L$.

Υπεραριθμήσιμα Πολλές Γλώσσες

Σ^*	$\{\varepsilon,$	$0,$	$1,$	$00,$	$01,$	$10,$	$11,$	000	$\ldots\}$
A	$\{$	$0,$		$00,$	$01,$			000	$\ldots\}$
$\chi(A)$	$\{0,$	$1,$	0	$1,$	$1,$	$0,$	$0,$	1	$\ldots\}$

Η αντιστοίχηση: $\chi : L \to B$

- είναι 1-1 και επί,
- Και άρα είναι αντιστοιχία.
- Άρα η L είναι ***<u>υπεραριθμήσιμη</u>***.

Τι Δείξαμε;

- Το σύνολο των TM είναι αριθμήσιμο.
- Το σύνολο των γλωσσών στο Σ είναι υπεραριθμήσιμο.

- Άρα, υπάρχουν γλώσσες που δεν αναγνωρίζονται από μία TM.
- **Απόδειξη ύπαρξης:** δεν καθορίζει μία τέτοια γλώσσα

Η A_{TM} είναι μη-διαγνώσιμη

$A_{TM} = \{\langle M,w\rangle \mid$ η M αποδέχεται τη λέξη $w\}$

Απόδειξη:

1. Έστω *H* μία TM που διαγιγνώσκει την A_{TM}
2. Κατασκευάζουμε μία TM *ΚΛΑΨΕ*:

   ΚΛΑΨΕ για είσοδο $\langle M\rangle$, όπου *M* μία TM:
   1. Εκτελούμε την *H* για είσοδο $\langle M,\langle M\rangle\rangle$
   2. Αν *H* αποδέχεται τότε η *ΚΛΑΨΕ* απορρίπτει
   3. Αν *H* απορρίπτει τότε η *ΚΛΑΨΕ* αποδέχεται

Συνέχεια Απόδειξης

Τι έξοδο παράγει η *ΚΛΑΨΕ*(*ΚΛΑΨΕ*);

ΚΛΑΨΕ(⟨ΚΛΑΨΕ⟩)=αποδοχή, εάν η ΚΛΑΨΕ δεν αποδέχεται την ΚΛΑΨΕ

ΆΤΟΠΟ

ΚΛΑΨΕ(⟨ΚΛΑΨΕ⟩)=απόρριψη, εάν η ΚΛΑΨΕ αποδέχεται την ΚΛΑΨΕ

Αυτή ήταν μία Απόδειξη Διαγωνιοποίησης

	$\langle \mathbf{M_1} \rangle$	$\langle \mathbf{M_2} \rangle$	$\langle \mathbf{M_3} \rangle$	$\langle \mathbf{M_4} \rangle$	**…**
M_1	Αποδοχή		Αποδοχή		…
M_2	Αποδοχή	Αποδοχή	Αποδοχή	Αποδοχή	…
M_3					…
M_4	Αποδοχή	Αποδοχή			…
…	…	…	…	…	…

Το κελί (i,j) αποδέχεται αν η M_i αποδέχεται την $\langle M_j \rangle$.

Η ΤΜ Η

	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$	$\langle M_4 \rangle$	…
M_1	Αποδοχή	Απόρριψη	Αποδοχή	Απόρριψη	…
M_2	Αποδοχή	Αποδοχή	Αποδοχή	Αποδοχή	…
M_3	Απόρριψη	Απόρριψη	Απόρριψη	Απόρριψη	…
M_4	Αποδοχή	Αποδοχή	Απόρριψη	Απόρριψη	…
…	…	…	…	…	…

Η ΤΜ ΚΛΑΨΕ;;;;;

	⟨M_1⟩	⟨M_2⟩	⟨M_3⟩	⟨M_4⟩	…	⟨ΚΛΑΨΕ⟩	…
M_1	Αποδοχή	Απόρριψη	Αποδοχή	Απόρριψη	…	Αποδοχή	…
M_2	Αποδοχή	Αποδοχή	Αποδοχή	Αποδοχή	…	Απόρριψη	…
M_3	Απόρριψη	Απόρριψη	Απόρριψη	Απόρριψη	…	Απόρριψη	…
M_4	Αποδοχή	Αποδοχή	Απόρριψη	Απόρριψη	…	Αποδοχή	…
…	…	…	…	…	…	…	…
ΚΛΑΨΕ	**Απόρριψη**	**Απόρριψη**	**Αποδοχή**	**Αποδοχή**	…	**;;;;;;;**	…
…	…	…	…	…	…	…	…

Αυτό-αναφορά Και μη-υπολογισιμότητα

Μεταγλωττιστές

Οτιδήποτε

λέει είναι ψέμα!

Το Θεώρημα μη Πληρότητας του GÖDEL