Θεωρία Υπολογισιμότητας

Διαγνωσιμότητα – Διαγωνοποίηση – Πρόβλημα Αποδοχής

Γιατί Επιλέγουμε Προβλήματα Απόφασης (αφορά υπολογισιμότητα);

- Λόγω Απλότητας
- Τα προβλήματα υπολογισμού τιμής συνάρτησης μπορούν να μετατραπούν σε αντίστοιχα απόφασης και αντίστροφα
- Τα προβλήματα βελτιστοποίησης

- Έστω $y = f(x)$. Έστω το πρόβλημα απόφασης D που ορίζεται πάνω στο γράφημα συσχέτισης της f (υπάρχει ακμή από x σε y αν $y = f(x)$). Αν D διαγνώσιμο τότε f υπολογίσιμη.
- Έστω ένα πρόβλημα απόφασης D. Αν υπάρχει υπολογίσιμη συνάρτηση που να υπολογίζει τη χαρακτηριστική συνάρτηση της D τότε το D είναι διαγνώσιμο.

Μερικές Διαγνώσιμες Γλώσσες

Διαγνωσιμότητα σε Κανονικές Γλώσσες

- ΑΠΟΔΟΧΗ/DFA
- ΚΕΝΟΤΗΤΑ/DFA
- ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/DFA

Διαγνωσιμότητα σε Ασυμφραστικές Γλώσσες

- ΑΣΥΜΦΡΑΣΤΙΚΗ= ΔΙΑΓΝΩΣΙΜΗ

Διαγνωσιμότητα και Αναγνωρισιμότητα

- Η διαγνωσιμότητα είναι πιο αυστηρή έννοια σε σχέση με την αναγνωρισιμότητα.
- Αν μία γλωσσα L είναι διαγνώσιμη τότε είναι και αναγνωρίσιμη (η άλλη κατεύθυνση δεν ισχύει).
- Είναι σαφές ότι αν η L είναι διαγνώσιμη τότε και η L' είναι διαγνώσιμη και άρα είναι και αναγνωρίσιμη.
- Έστω ότι με *RE* αναπαριστούμε την κλάση γλωσσών που είναι αναγνωρίσιμες και με co*RE* την κλάση γλωσσών των οποίων το συμπλήρωμα είναι αναγνωρίσιμο.
- Έστω ότι *R* είναι η κλάση των διαγνώσιμων γλωσσών. Τότε από αυτά που αναφέραμε:

$$R \subseteq RE \cap coRE.$$

Πιο Τυπικά....

Θεώρημα: Μία γλώσσα είναι διαγνώσιμη αν και μόνο αν είναι αναγνωρίσιμη και συμπληρωματικά αναγνωρίσιμη.

Απόδειξη: Αποδεικνύουμε ως προς δύο κατευθύνσεις:

- Αν η *L* είναι διαγνώσιμη, τότε τόσο η *L* όσο και η *L´* είναι αναγνωρίσιμες.
- Αν τόσο η *L* όσο και η *L´* είναι αναγνωρίσιμες, τότε η *L* είναι διαγνώσιμη.

Μία κατεύθυνση

Ισχυρισμός: Αν η *L* είναι διαγνώσιμη, τότε οι *L* και *L*´ είναι αναγνωρίσιμες.

Απόδειξη:

Αν η L είναι διαγνώσιμη τότε είναι και αναγνωρίσιμη. Επίσης και η L´ είναι αναγνωρίσιμη αφού…?

Η άλλη Κατεύθυνση

Ισχυρισμός: Αν τόσο η L όσο και η $L´$ είναι αναγνωρίσιμες, τότε η L είναι διαγνώσιμη,

Έστω M_1 ο αναγνωριστής της L, και M_2 ο αναγνωριστής της $L´$.

M = Σε είσοδο w

1. Τρέξε τις M_1 και M_2 ταυτόχρονα.

2. Αν η M_1 αποδέχεται, η M αποδέχεται; Αν η M_2 αποδέχεται, η M απορρίπτει.

Παράλληλα;

Ερώτηση: Τι σημαίνει οι M_1 και M_2 να τρέχουν παράλληλα;

Η M έχει δύο ταινίες

Η M εναλλακτικά εκτελεί βήματα μεταξύ των M_1 και M_2.

Τέλος Απόδειξης

Ισχυρισμός: Η *M* διαγιγνώσκει την *L*.

- Κάθε λέξη είναι είτε στην *L* ή στην *L΄*.
- Είτε η M_1 ή η M_2 αποδέχεται την είσοδο *w*.
- Επομένως, η *M* τερματίζει όταν μία από τις δύο TM αποδέχεται
- Άρα η *M* τερματίζει πάντα και άρα είναι διαγνώστης.
- Επιπλέον, η *M* αποδέχεται λέξεις στην *L* και απορρίπτει λέξεις της *L΄*.
- Άρα η *M* διαγιγνώσκει την *L*, και επομένως η *L είναι διαγνώσιμη.*

Πρόβλημα Τερματισμού

Ένα από τα πιο σημαντικά θεωρήματα της Θεωρίας Υπολογισμού.

Οι υπολογιστές δεν είναι παντοδύναμοι – έχουν θεμελιώδεις περιορισμούς

Πολλά προβλήματα είναι ανεπίλυτα:

- Ένα δοθέν πρόγραμμα ταξινομεί έναν πίνακα ακεραίων;
  - Το πρόβλημα αυτό είναι αυστηρά καθορισμένο.
  - Αλλά είναι ανεπίλυτο…

Πρόβλημα Αποδοχής

$A_{TM} = \{\langle M,w\rangle \mid M$ είναι μία TM που αποδέχεται την $w\}$

Η γλώσσα A_{TM} είναι **<u>μη διαγνώσιμη</u>**.

Οι αντίστοιχες γλώσσες για κανονικές και ασυμφραστικές γραμματικές είναι διαγνώσιμες!

Η A_{TM} είναι Αναγνωρίσιμη

U=Για είσοδο ⟨*M*,*w*⟩, όπου *M* είναι μία TM και *w* μία λέξη:

Η *U* είναι η καθολική TM

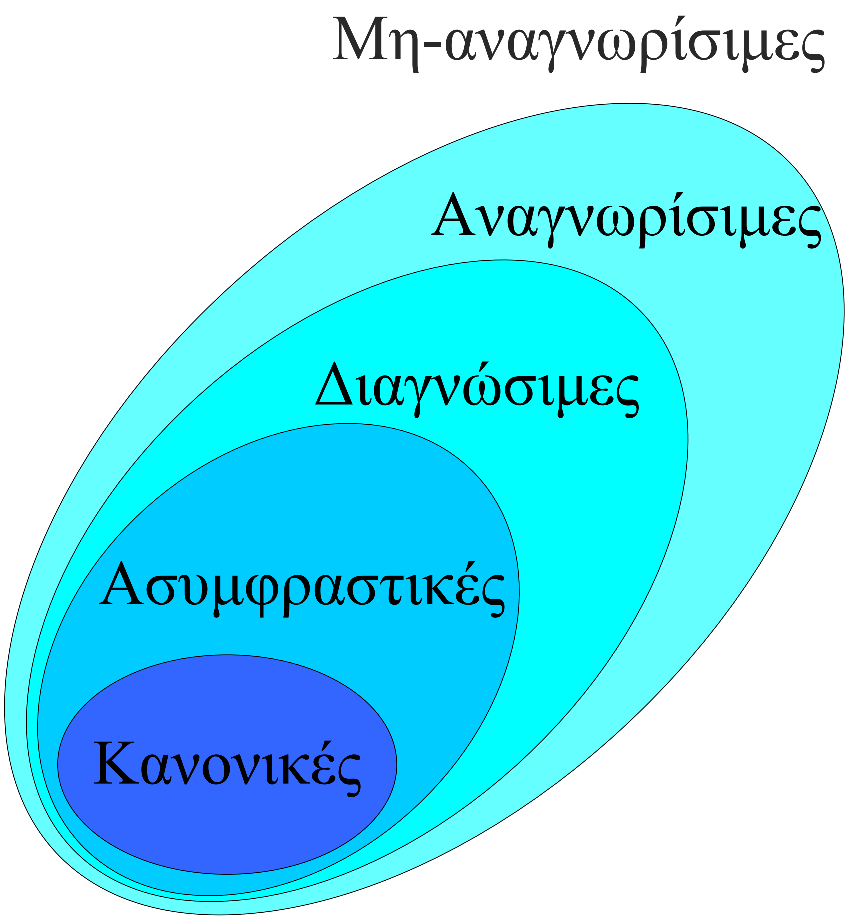
Αν η *M* εγκλωβίζεται τότε και η *U* εγκλωβίζεται

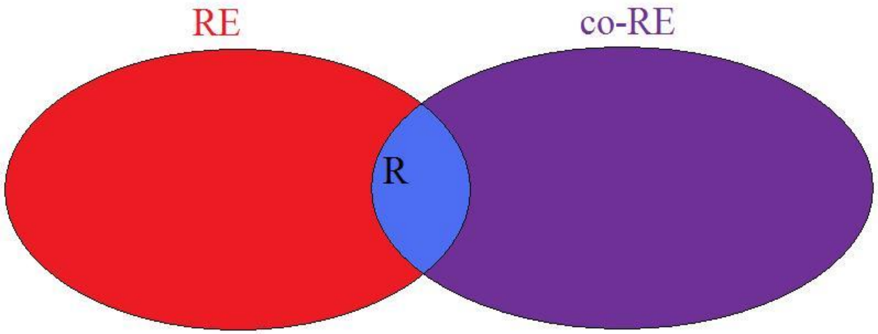
1. Προσομοιώνουμε την *M* για είσοδο *w*.
2. Εάν η *M* μεταβεί ποτέ στην κατάσταση αποδοχής, αποδεχόμαστε, εάν μεταβεί στην κατάσταση απόρριψης, απορρίπτουμε.

Μία γλώσσα…

- Είναι η γλώσσα co-A_{TM} αναγνωρίσιμη;
  - Γνωρίζουμε ότι η A_{TM} είναι αναγνωρίσιμη
  - Εάν και η co-A_{TM} είναι αναγνωρίσιμη τότε η A_{TM} θα είναι διαγνώσιμη
  - Άτοπο, αφού θα δείξουμε ότι η A_{TM} είναι μη-διαγνώσιμη

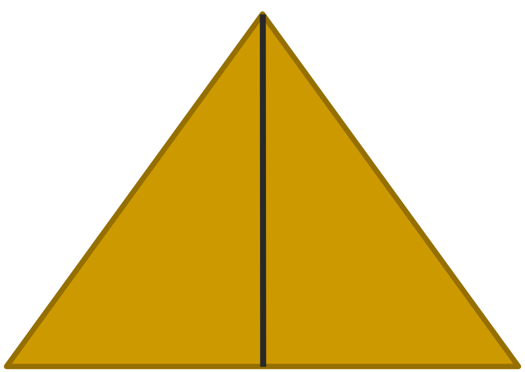
Ιεραρχία Γλωσσών





Η A_{TM} είναι μη Διαγνώσιμη

Η Τεχνική της Διαγωνιοποίησης



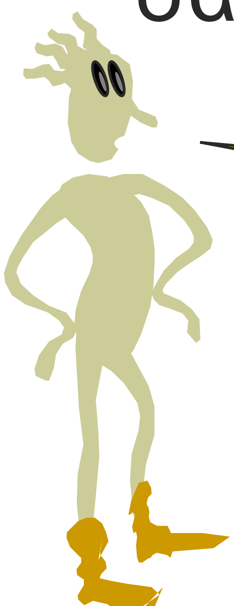
Αυτό-αναφορά Και μη-υπολογισιμότητα

Ένας ιδεατός Η/Υ μπορεί να προγραμματιστεί ώστε να εκτυπώνει:

- π: 3.14159265358979323846264…
- 2: 2.00000000000000000000000…
- e: 2.71828182845590452353336…
- 1/3: 0.3333333333333333333333….
- ϕ: 1.61803398874989484482045…

Υπολογίσιμοι Πραγματικοί Αριθμοί

- Ένας πραγματικός *r* είναι <u>υπολογίσιμος</u> αν υπάρχει πρόγραμμα που εκτυπώνει τα ψηφία του από αριστερά προς δεξιά. Άρα, κάθε ψηφίο του *r* θα εκτυπωθεί σαν μέρος μίας άπειρης ακολουθίας.



Είναι όλοι οι πραγματικοί υπολογίσιμοι;

Περιγραφόμενοι Αριθμοί

- Ένας πραγματικός *r* είναι <u>περιγραφόμενος</u> αν μπορεί να περιγραφεί με λέξεις.

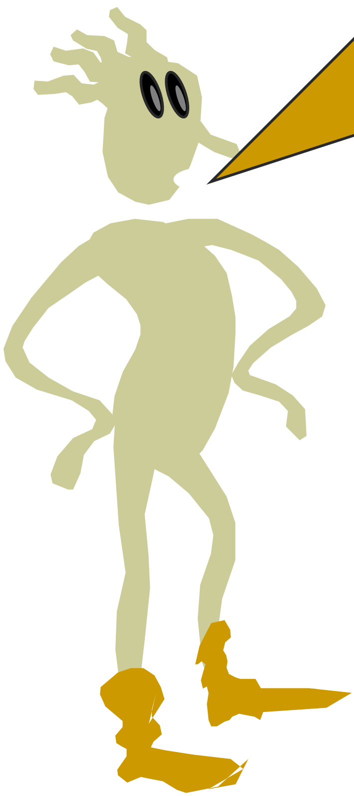
- 2: “Δύο”
- π: “Η επιφάνεια κύκλου ακτίνας ένα.”

Θεώρημα: Κάθε υπολογίσιμος είναι επίσης περιγραφόμενος

Απόδειξη:

Έστω *r* υπολογίσιμος πραγματικός που είναι έξοδος ενός προγράμματος *P*. Η παρακάτω πρόταση περιγράφει τον *r*.

«Ο *r* είναι ο πραγματικός αριθμός που παράγεται από το *P*»



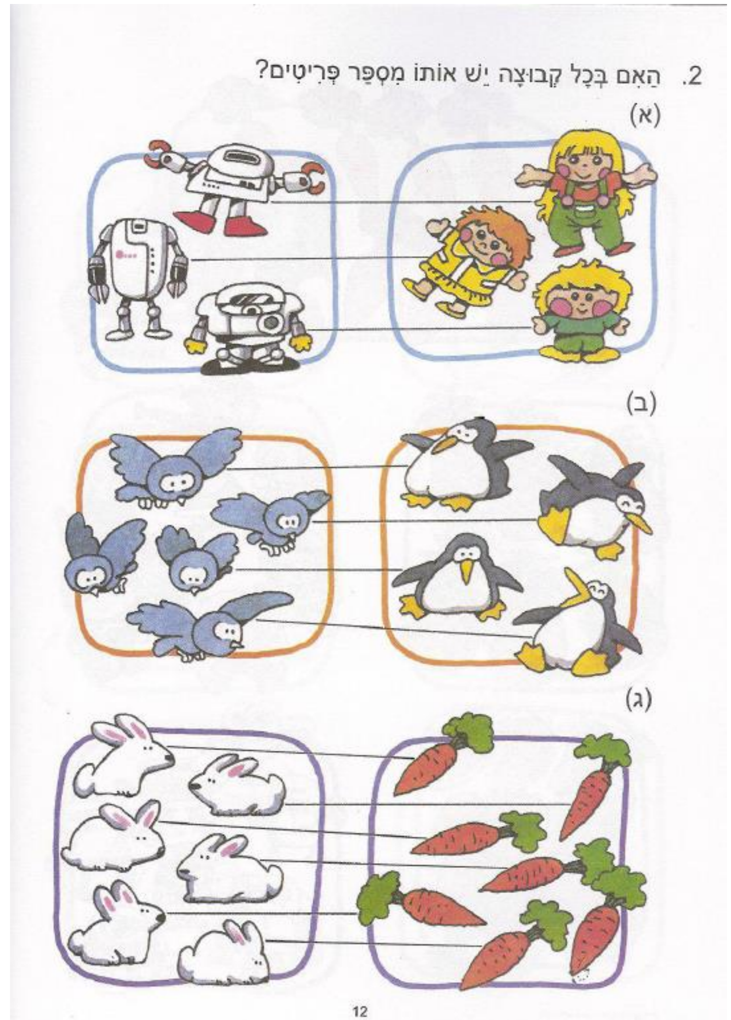
Είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί περιγράψιμοι;

Σύγκριση Μεγέθους Συνόλων

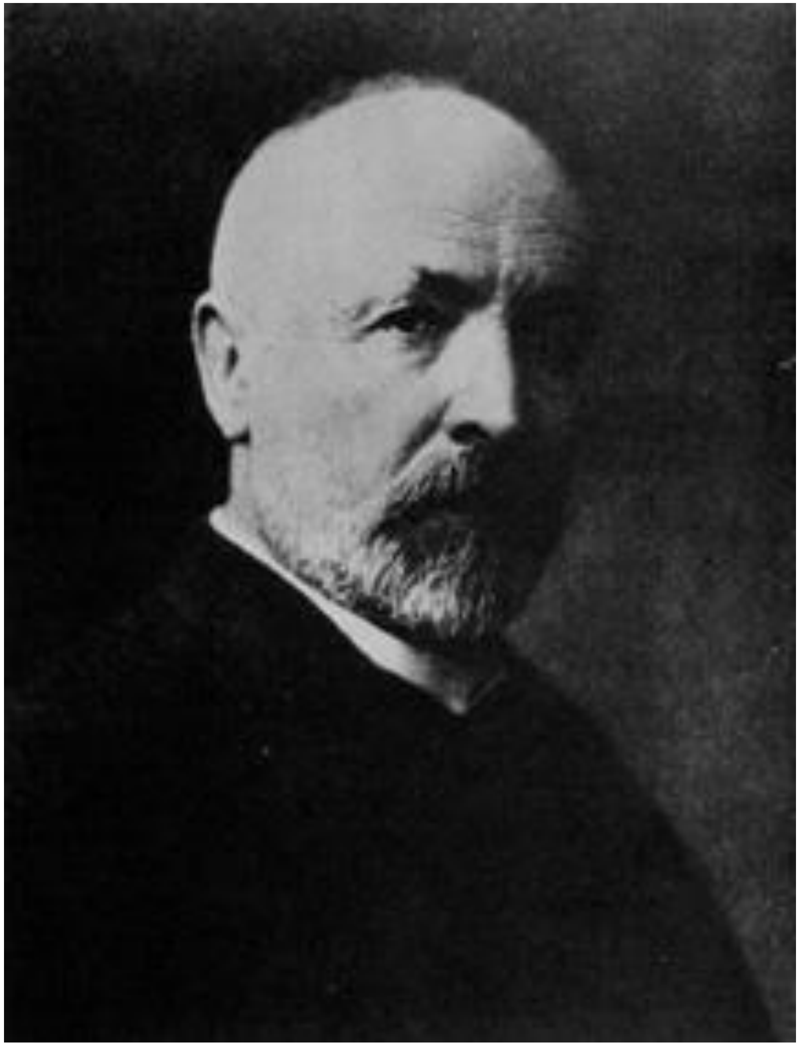
- Έστω *A* και *B* δύο σύνολα που θέλουμε να συγκρίνουμε ως προς μέγεθος.
- Αν τα *A* και *B* είναι πεπερασμένα, απλά συγκρίνουμε τους πληθάριθμούς τους.
- *Τι γίνεται αν τα σύνολα είναι άπειρα;*

Η αρχή της αντιστοίχησης

- Αν δύο σύνολα μπορούν να τοποθετηθούν σε μία 1-1 και επί αντιστοίχηση τότε έχουν ίδιο μέγεθος



Georg Cantor (1845-1918)



Τι σημαίνει ότι δύο άπειρα σύνολα έχουν ίδιο μέγεθος;

- Μία συνάρτηση $f : A \to B$ είναι αντιστοιχία αν η f:
  - f είναι 1-1: αν $\alpha_1 \neq \alpha_2$ τότε $f(a_1) \neq f(\alpha_2)$.
  - f είναι επί: για κάθε $b \in B$, υπάρχει $a \in A$ έτσι ώστε $f(a) = b$.
- **Ερώτηση:** Τι σημαίνει ότι δύο σύνολα έχουν το ίδιο μέγεθος?
- **Απάντηση:** Δύο σύνολα έχουν ίδιο μέγεθος αν υπάρχει μία αντιστοιχία από το ένα σύνολο στο άλλο.

Τα σύνολα *N* και *E* έχουν το ίδιο μέγεθος;

- $N = \{\ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots.\ \}$
- E = Οι ζυγοί φυσικοί αριθμοί.

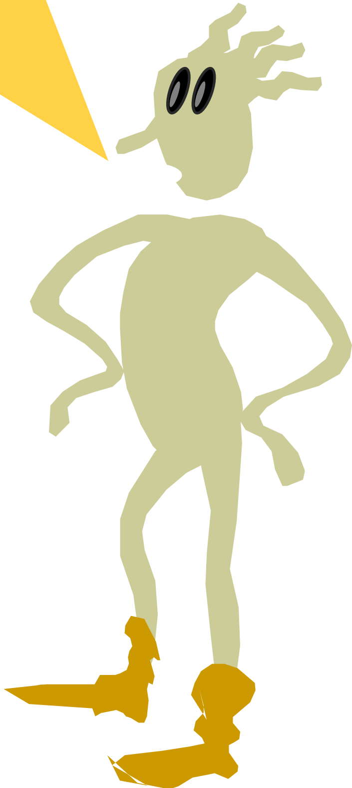
Τα E και N δεν έχουν το ίδιο μέγεθος! Το E είναι ένα γνήσιο υποσύνολο του N.

Η αντιστοιχία $f(x)=x$ δεν είναι *επί* από το E στο N.

Τα E και N έχουν το ίδιο μέγεθος!

0, 1, 2, 3, 4, 5, …….
0, 2, 4, 6, 8,10,   ….

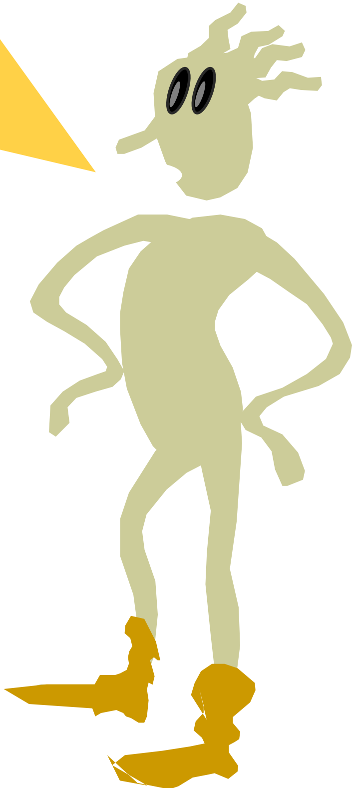
$f(x) = 2x$ είναι 1-1 και επί.



Δίδαγμα:

Ο ορισμός του Cantor απαιτεί ***ύπαρξη*** μίας αντιστοιχίας μεταξύ των δύο συνόλων.

Αυτό δεν είναι πρόβλημα όταν τα σύνολα είναι πεπερασμένα.



Αριθμήσιμα Σύνολα

Ένα σύνολο A είναι ***αριθμήσιμο*** αν το A είναι ***πεπερασμένο*** ή αν το A έχει ***ίδιο μέγεθος*** με το $\mathbb{N}$.

- Ένα αριθμήσιμο σύνολο Α λέμε ότι έχει μέγεθος $\aleph_0$.

Ισχυρισμός: Το σύνολο των ακεραίων είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη:

Ορίζουμε $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f(i) = \begin{cases} i/2 & i \text{ ζυγός} \\ -(\lfloor i/2 \rfloor + 1) & i \text{ μονός} \end{cases}$

Το παράδοξο του Hilbert: Το Μέγα Ξενοδοχείο

Στον Παράδεισο υπάρχει ένα ξενοδοχείο με άπειρο και αριθμήσιμο πλήθος δωματίων.

Μία μέρα, η σέκτα των Προφητών Ερευνητών ΤΝ διοργανώνει ένα συνέδριο και το ξενοδοχείο γεμίζει.

Έπειτα φτάνει ακόμα ένας επισκέπτης που απαιτεί δωμάτιο, αφού ισχυρίζεται ότι ανακάλυψε την LISP. Αν είστε ο διαχειριστής του ξενοδοχείου τι κάνετε;

Απάντηση: Λέμε στον φιλοξενούμενο του δωματίου *i* να μετακινηθεί στο δωμάτιο *i+1* και βάζουμε τον νεοαφιχθέντα στο δωμάτιο 1.

Έπειτα ένα *αριθμήσιμο* πλήθος επισκεπτών φτάνει και απαιτεί δωμάτιο. Τι κάνετε;
Απάντηση: Λέμε στον φιλοξενούμενο του δωματίου *i* να μετακινηθεί στο δωμάτιο *2i* και βάζουμε κάθε νέο επισκέπτη στο δωμάτιο *2i+1*.

Τα $\mathbb{N}$ και $\mathbb{Q}$ έχουν το ίδιο μέγεθος;

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

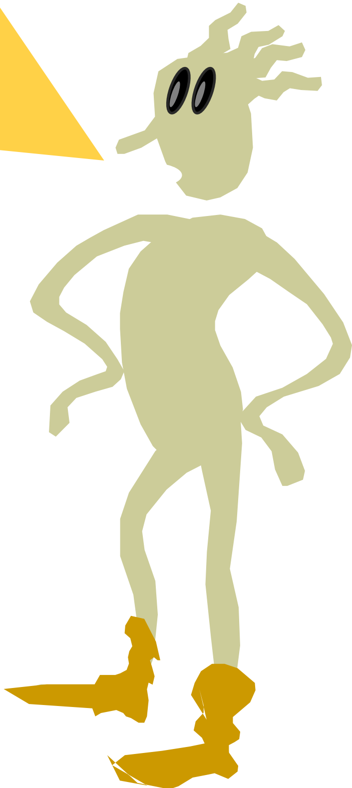
$$\mathbb{Q} = \text{Οι ρητοί αριθμοί}$$

Αποκλείεται!

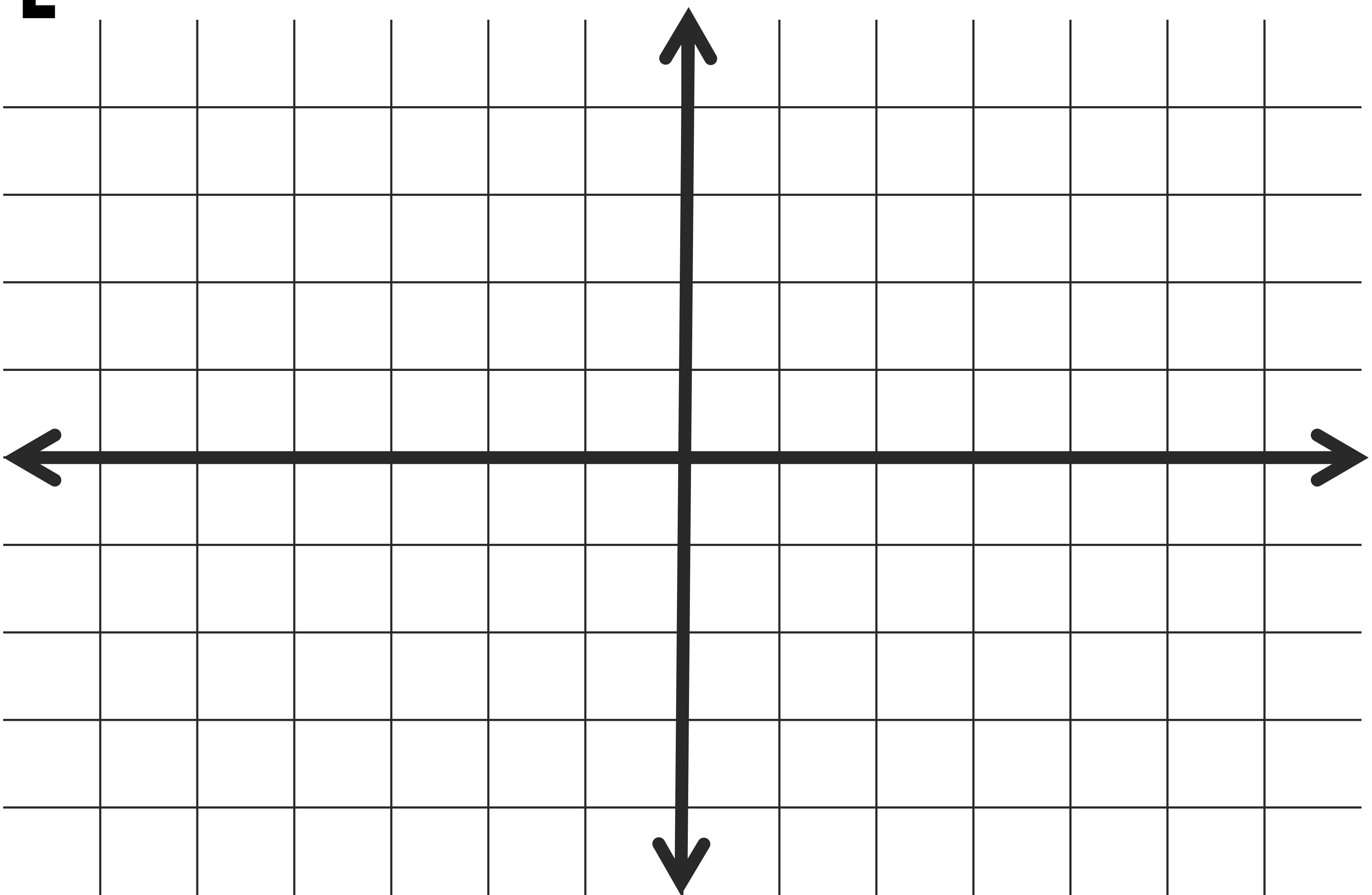
Οι ρητοί αριθμοί είναι *πυκνοί*: μεταξύ δύο αριθμών πάντα υπάρχει ένας τρίτος. Δεν μπορείς να τους απαριθμήσεις χωρίς να αφήσεις έξω ένα άπειρο πλήθος τους.

Για στάκα ρε μάστορα!!!!

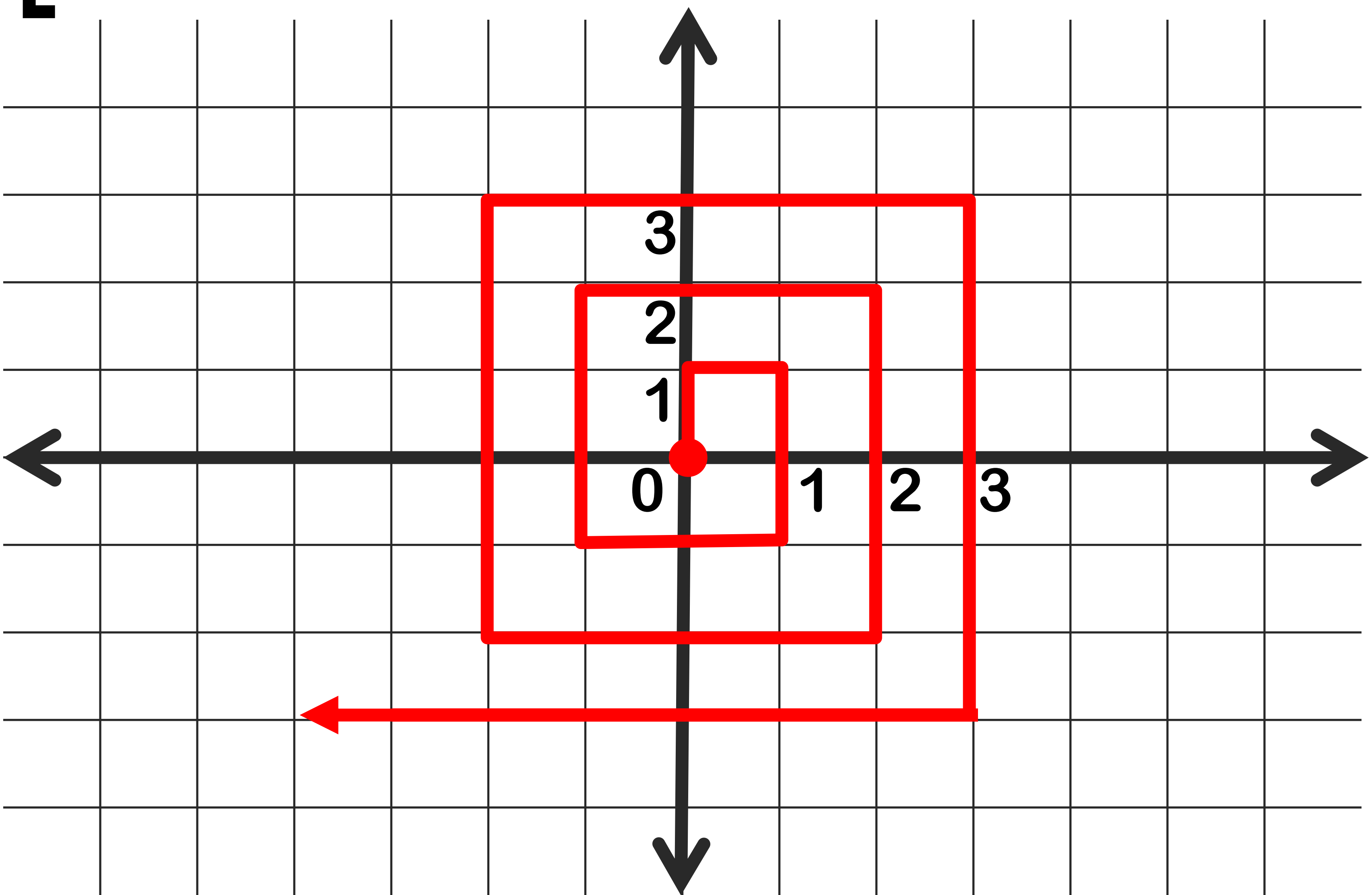
Υπάρχει ένας έξυπνος τρόπος να απαριθμήσουμε όλους τους ρητούς χωρίς να αφήσουμε κανέναν έξω!



Το σημείο (x,y) αναπαριστά το x/y



Το σημείο (*x*,*y*) αναπαριστά το *x*/*y*



Ένας άλλος τρόπος…