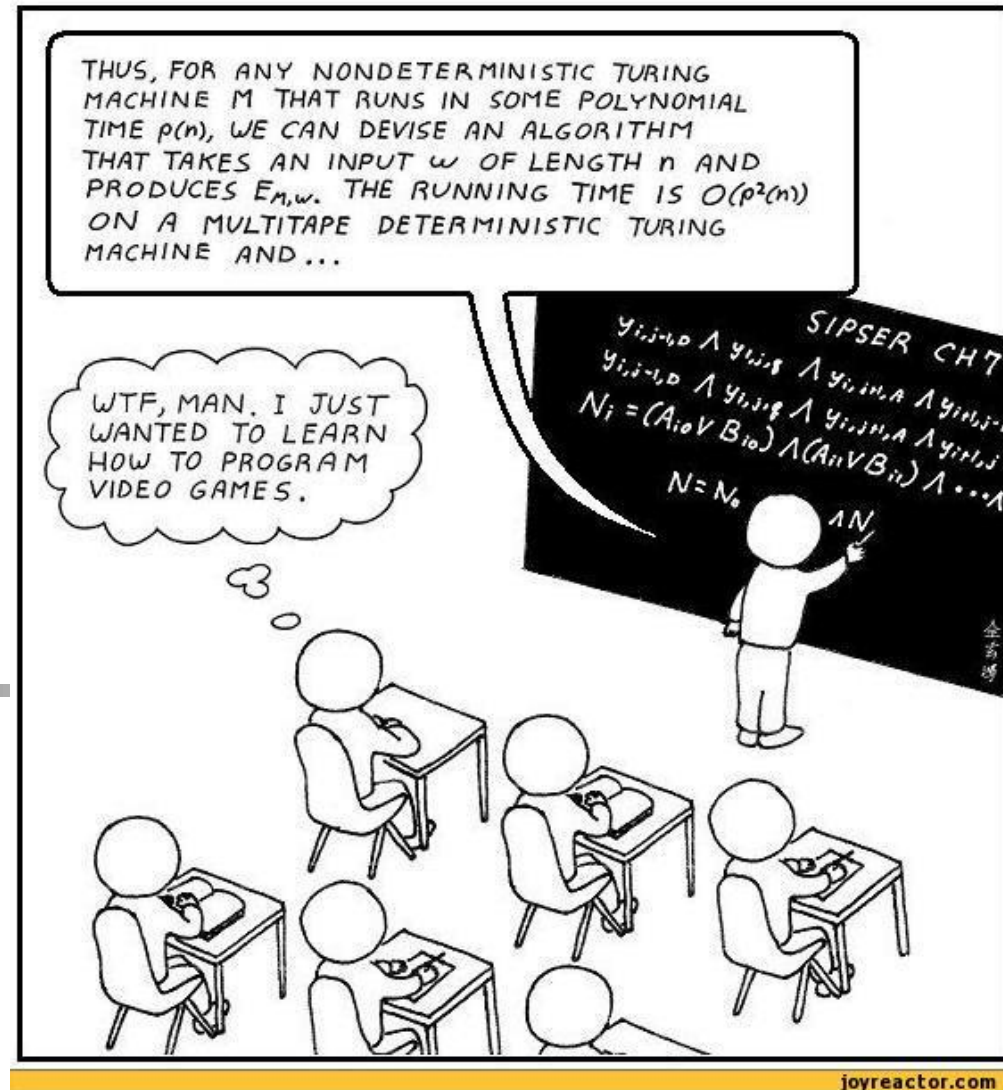


Θεωρία Υπολογισμού



Παραλλαγές Μηχανών Turing

Υπενθύμιση: Γλώσσα ΤΜ

Τσίχλας



*Τί γλώσσα μιλάς
ρε μάστορα;*

*Όλες τις ελληνικές λέξεις από το
λεξικό του Μπαμπινιώτη τις ξέρω
και τις αποδέχομαι ως σωστές –
και μόνο αυτές!!!!!!*

*Άρα η γλώσσα που
αναγνωρίζεις είναι
αυτές που περιέχονται
σε αυτό το λεξικό.*

*Δεν μίλησα για το αν είσαι
διαγνώστης ή όχι. Είσαι;*

*ΤΜ
Μήτσος*



*Τι θέλετε να πείτε κύριε;
Μήπως ότι στις άλλες
κολλάω;*

*Τώρα που το λες δεν
ξέρω!!!*



Παραλλαγές TM

- Δημιουργούν διαφορετικές TM κλάσεις
- Κάθε κλάση έχει την ίδια ισχύ με την απλή TM

Δύο κλάσεις έχουν ίδια ισχύ όταν αναγνωρίζουν/διαγιγνώσκουν τις ίδιες γλώσσες.

Για κάθε μηχανή M_1 της 1^{ης} κλάσης υπάρχει μηχανή M_2 της 2^{ης} κλάσης ώστε $L(M_1) = L(M_2)$ και αντίστροφα.

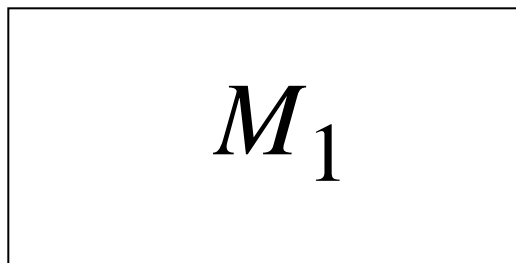


Εξομοίωση

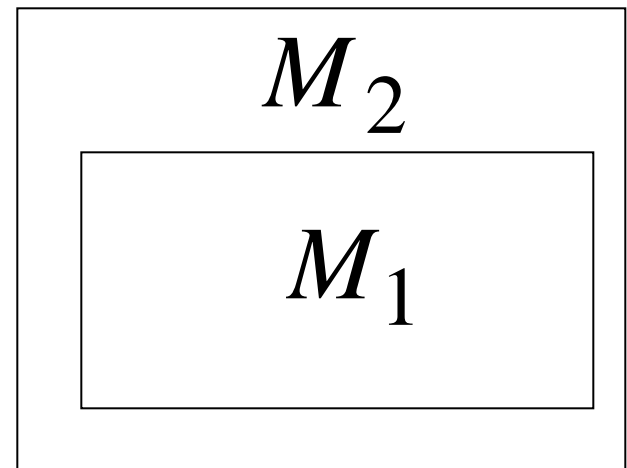
Μία τεχνική για να αποδεικνύουμε ίδια ισχύ:

Εξομοίωση της μίας μηχανής από την άλλη.

1^η Κλάση
Αρχική Μηχανή



2^η Κλάση
Εξομοίωση





Παραλλαγές TM

Η TM είναι *ευσταθές*
μοντέλο υπολογισμού

Υποθέστε ότι η κεφαλή μπορεί να μείνει στάσιμη.

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{A, \Delta, I\}$$

- **Ερώτηση:** Προσθέτει καθόλου *ισχύ* στη μηχανή;
- **Απάντηση:** Όχι. Αντικατέστησε κάθε I μετάβαση με δύο μεταβάσεις: Δ και έπειτα A . (Γιατί όχι αντίστροφα;)

Βασική ιδέα: Εξομοίωση δύο δρόμων (το μοντέλο A μπορεί να εξομοιώσει το B και αντίστροφα).

Turing-Completeness

(πηγή: Wikipedia)

Some games and other software are Turing-complete by accident, i.e. not by design.

Software:

- [Microsoft Excel](#)^[7]
- [Microsoft PowerPoint](#)^[8]

Video games:

- [Dwarf Fortress](#)
- [OpenTTD](#)^[citation needed]
- [Terraria](#)^[citation needed]
- [Minecraft](#)^[10]^[self-published source]
- [Minesweeper](#)^[11]^[self-published source]
- [LittleBigPlanet](#)^[10]
- [Baba is You](#)^[12]^[13]
- [Factorio](#)^[14]
- [Cities: Skylines](#)^[15]
- [Opus Magnum](#)^[16]
- [Portal 2](#)^[17]^[self-published source]
- [Geometry Dash](#)^[18]

Social media:

- [Habbo Hotel](#)^[19]

Card games:

- [Magic: The Gathering](#)^[10]^[20]

Zero-person games (simulations):

- [Conway's Game of Life](#)^[21]^[self-published source]^[22]

Computational languages:

- [C++ templates](#)^[23]^[24]

Computer hardware:

- x86 MOV instruction^[25]

Biology:

- [Chemical reaction networks](#)^[26]^[27]^[28]^[29] and [enzyme-based DNA computers](#)^[30] have been shown to be Turing-equivalent

Πολυταινιακή ΤΜ



- Κάθε ταινία έχει την δική της κεφαλή
- Αρχικά, η είσοδος είναι στην ταινία 1 και οι υπόλοιπες είναι κενές

Για την συνάρτηση μετάβασης:

$$\delta : Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{A, \Delta, I\}^k,$$

όπου η έκφραση $\delta(q_i, a_1, \dots, a_k) = (q_j, b_1, \dots, b_k, A, \Delta, \dots, I)$

δηλώνει ότι:

- Η μηχανή ξεκινά από την κατάσταση q_i
- Αν οι κεφαλές 1 έως k διαβάζουν a_1, \dots, a_k ,
- τότε η μηχανή πηγαίνει στην κατάσταση q_j ,
- οι κεφαλές 1 έως k γράφουν b_1, \dots, b_k ,
- και τις μετακινεί αριστερά ή δεξιά ή να μένει στάσιμη.

Παλίνδρομα ($w = w^R$) με TM 2 ταινιών

Σε είσοδο w ,

- Διατρέχουμε την είσοδο στην ταινία 1. Τοποθέτησε την κεφαλή στο τέλος της εισόδου.
- Διατρέχουμε την είσοδο στην ταινία 1 από δεξιά προς αριστερά και την αντιγράφουμε στην ταινία 2.

(Σε αυτό το σημείο η ταινία 2 περιέχει το w^R)

- Μετακίνησε την κεφαλή 2 στο αριστερό άκρο της ταινίας 2.
- Διατρέχουμε τις ταινίες 1 και 2 αριστερά προς δεξιά και ελέγχουμε για ισότητα.
- Αν $w = w^R$ αποδεχόμαστε αλλιώς απορρίπτουμε.

Αυτή είναι μία απλή περιγραφή της TM και όχι μία τυπική περιγραφή.



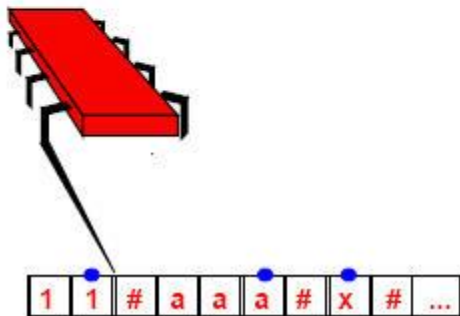
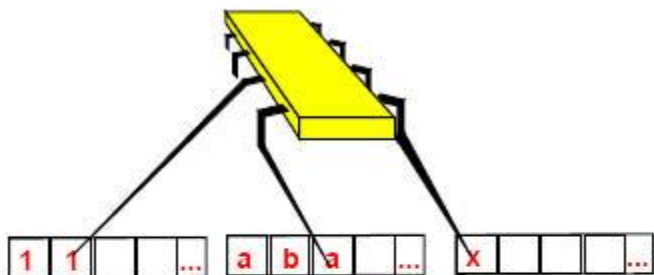
Ισοδυναμία

Θεώρημα: Μία γλώσσα είναι αναγνωρίσιμη αν και μόνο αν υπάρχει μία πολυταινιακή ΤΜ που να την αναγνωρίζει.

Η μία κατεύθυνση είναι τετριμμένη (Γιατί;)

Για την απόδειξη της άλλης κατεύθυνσης θα δείξουμε πως να εξομοιώσουμε μία πολυταινιακή ΤΜ M με μία ΤΜ με μία ταινία, S .

Εξομοίωση (1)



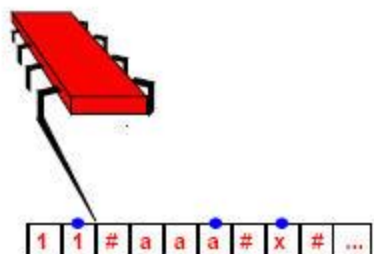
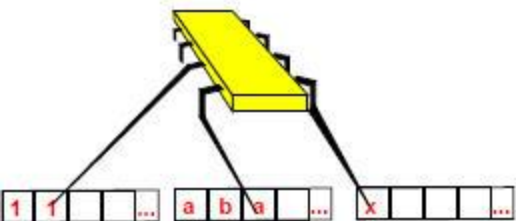
Καινούργια σύμβολα
στο αλφάβητο ταινίας

- Η S εξομοιώνει k ταινίες της M αποθηκεύοντάς τις σε μία μόνο ταινία με διαχωριστικό $\#$.
- Η S σηματοδοτεί τις θέσεις των k κεφαλών τοποθετώντας ένα • «πάνω» από τα σύμβολα στις συγκεκριμένες θέσεις. Ξέρει κάθε σύμβολο • σε ποια ταινία ανήκει «μετρώντας» τα $\#$ από τα αριστερά.

Εξομοίωση (2)

Σε είσοδο $w = w_1 \cdot \cdot \cdot w_n$, η S :

- Γράφει στην ταινία $\# \cdot w_1 w_2 \cdot w_n \# \cdot \# \cdot \# \cdot \cdot \cdot \#$
- Διατρέχει την ταινία από το πρώτο $\#$ στο $k+1$ $\#$ για να διαβάσει τα σύμβολα στις εικονικές κεφαλές.
- Επαναδιατρέχει ώστε να γράψει τα νέα σύμβολα και να μετακινήσει τις κεφαλές.
- Η S προσπαθεί να μετακινήσει την εικονική κεφαλή στο $\#$ όταν η M προσπαθεί να μετακινήσει την κεφαλή σε κενή θέση της ταινίας. Η S γράφει το κενό στην ταινία και μετακινεί κατά μία θέση δεξιά την υπόλοιπη ταινία.



Ανταιτιοκρατικές TM (non-deterministic TM)

Συνάρτηση Μετάβασης:

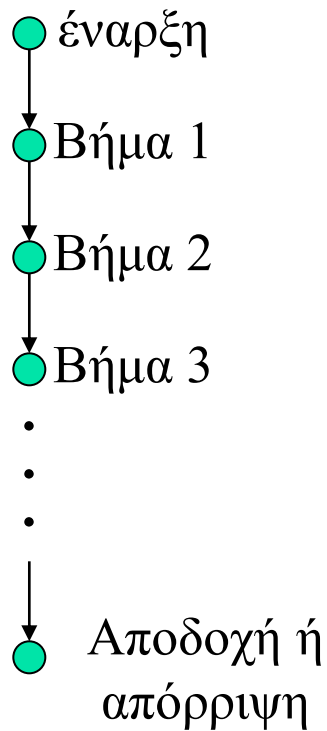
$$\delta: Q \times \Gamma \rightarrow P(Q \times \Gamma \times \{A, \Delta\})$$

- $P(Q)$ είναι το δυναμοσύνολο του Q
(μέγεθος $2^{|Q| \cdot |\Gamma| \cdot 2}$)
- Ο υπολογισμός είναι ένα δέντρο.
- Αποδέχεται αν υπάρχει (E) ένα κλαδί που αποδέχεται.

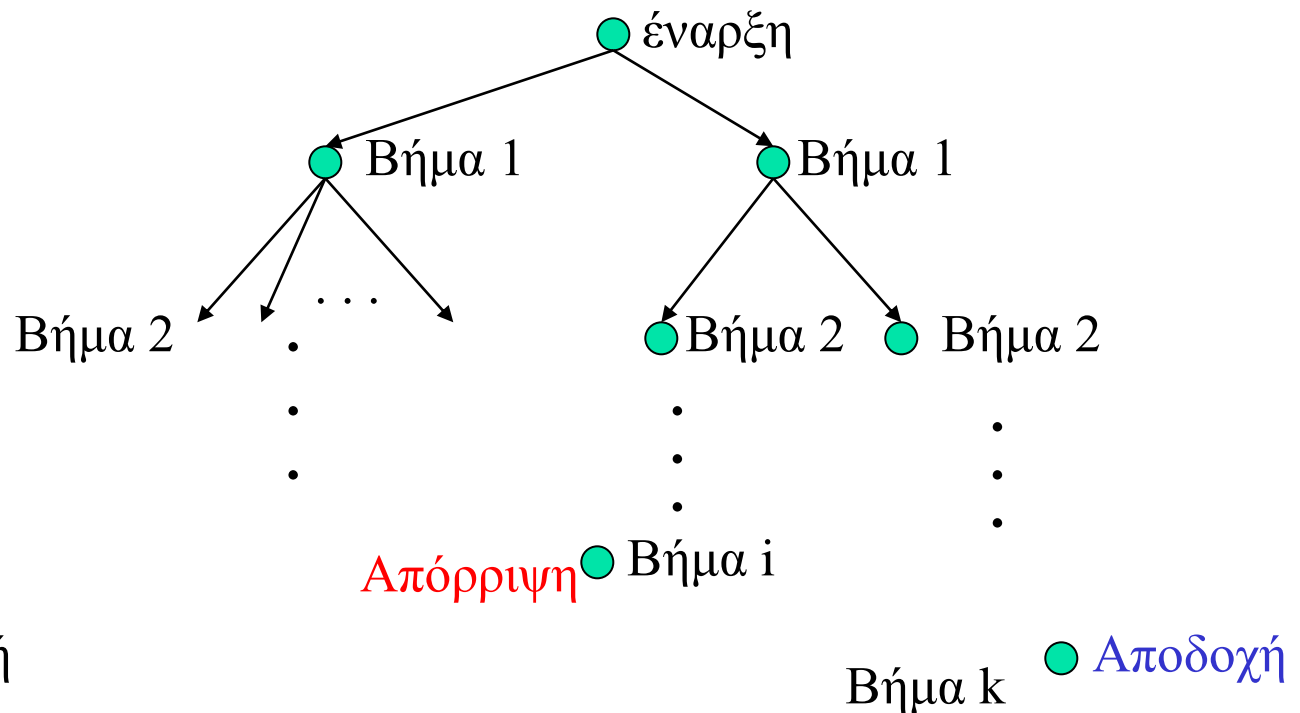
Ανταιτιοκρατικότητα vs Αιτιοκρατικότητα

Υπολογισμός

Αιτιοκρατικός



Ανταιτιοκρατικός



Παράδειγμα



Το πρόβλημα απόφασης του **Περιοδεύοντος Πωλητή:**

1. Η είσοδος είναι ένα γράφημα με βάρη. Παράγονται όλες οι δυνατές **TM_s** με λύση μία ακολουθία ίση σε μέγεθος με το πλήθος των κόμβων.

2. Καθεμία **TM** ελέγχει αν η ακολουθία είναι αναδιάταξη των πόλεων και αν έχει κόστος $< B$ (χρησιμοποιείτε για απλότητα **2** ταινίες).

Αν ναι **ΑΠΟΔΟΧΗ**, αλλιώς **ΑΠΟΡΡΙΨΗ**.

Παράδειγμα 2 (Σύνθετοι Αριθμοί)

Αναγνωρίζει ή
διαγιγνώσκει τη
συγκεκριμένη
γλώσσα;

Να αποφασίζουμε αν ένας αριθμός x είναι σύνθετος ή όχι.

- Παρήγαγε όλες τις δυνατές δυνάδες αριθμών (y, z) με το πολύ $\log x$ δυαδικά ψηφία.
- Αν $y \cdot z = x$ τότε ο αριθμός είναι σύνθετος και άρα ΑΠΟΔΟΧΗ, αλλιώς ΑΠΟΡΡΙΨΗ



Αναγνωρισιμότητα

Θεώρημα: Μία γλώσσα είναι αναγνωρίσιμη αν και μόνο αν υπάρχει ανταιοκρατική TM που την αναγνωρίζει.

(Ίδιο θεώρημα και για διαγνωσιμότητα)

- Η μία κατεύθυνση είναι τετριμμένη (Γιατί;)
- Για να αποδείξουμε την άλλη κατεύθυνση θα δείξουμε πως να μετατρέψουμε μία ανταιοκρατική TM N σε μία ισοδύναμη αιτιοκρατική TM D .



Εξομοίωση – Βασικές Ιδέες

- Η D εκτελεί όλα τα δυνατά κλαδιά υπολογισμού
- Αν η D ανακαλύψει ένα κλαδί που οδηγεί σε αποδοχή τότε αποδέχεται.
- Αν όλα τα κλαδιά οδηγούν σε απόρριψη, τότε απορρίπτει.
- Αν όλα τα κλαδιά απορρίπτονται ή εγκλωβίζονται τότε, η D θα εγκλωβιστεί.

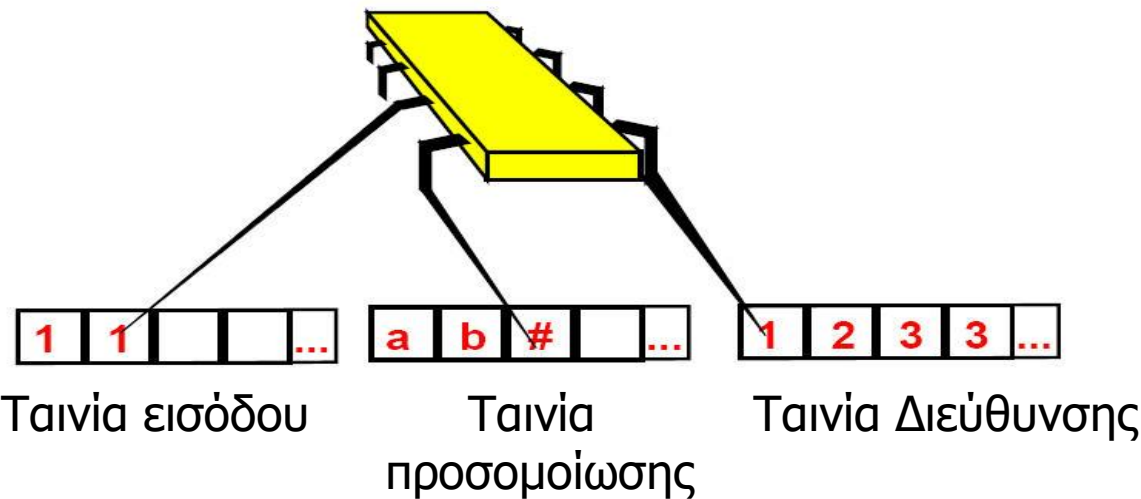


Εξομοίωση (1)

Ο υπολογισμός της N είναι ένα δέντρο.

- Κάθε κλαδί δέντρου είναι ένας αιτιοκρατικός υπολογισμός της N
- Κάθε κόμβος του δέντρου είναι μία διαμόρφωση της N
- Η ρίζα είναι η εναρκτήρια διαμόρφωση
- Το πλήθος παιδιών κάθε κόμβου, έστω b , είναι το πολύ ίσο με το πλήθος των καταστάσεων της N επί το μέγεθος του Γ επί 2 (Αριστερά/Δεξιά).
- Αναζήτηση κατά βάθος δεν λειτουργεί (Γιατί;)
- Αναζήτηση κατά πλάτος λειτουργεί όπως θα δούμε.

Εξομοίωση (2)



Η D έχει τρεις ταινίες

- Η ταινία εισόδου δεν αλλάζει ποτέ
- Η ταινία προσομοίωσης που είναι αντίγραφο της ταινίας της N
- Η ταινία διεύθυνσης που αποθηκεύει την θέση στο δέντρο υπολογισμού της N

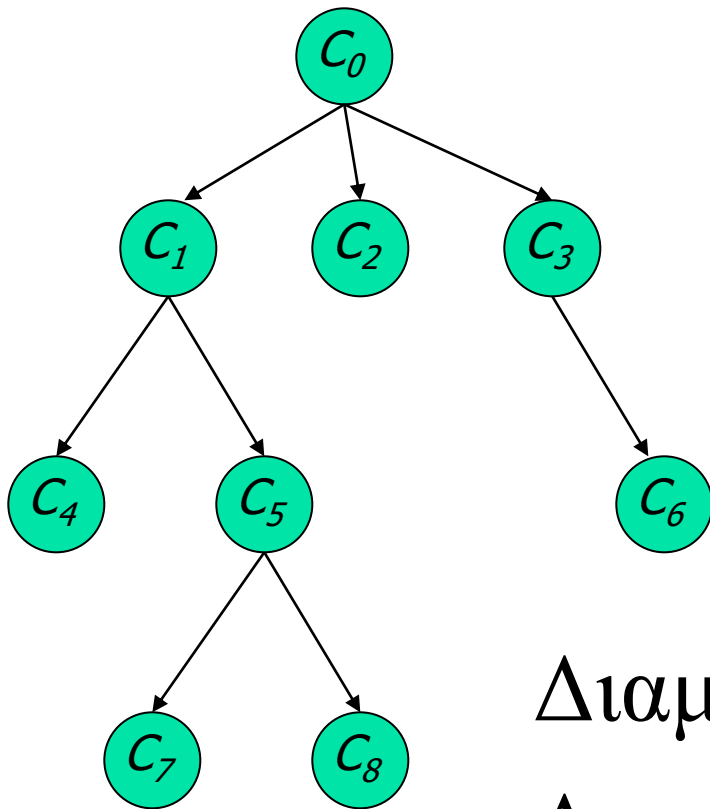


Εξομοίωση (3)

Η ταινία διεύθυνσης:

- Κάθε κόμβος του δέντρου έχει το πολύ b παιδιά
- Κάθε κόμβος στο δέντρο έχει μία διεύθυνση που είναι μία λέξη στο αλφάβητο $\Sigma_b = \{1, 2, \dots, b\}$
- Για να πάτε στον κόμβο με διεύθυνση **231**:
 - Ξεκίνα από τη ρίζα
 - Ακολουθή το **δεύτερο** παιδί της ρίζας
 - Ακολουθή το **τρίτο** παιδί του τρέχοντος κόμβου
 - Ακολουθή το **πρώτο** παιδί του τρέχοντος κόμβου
- Μην λαμβάνεις υπόψη διευθύνσεις χωρίς νόημα (επιλογές που δεν είναι διαθέσιμες για τη διαμόρφωση στο κλαδί υπολογισμού)

Αναπαριστώντας κλάδους ως λέξεις

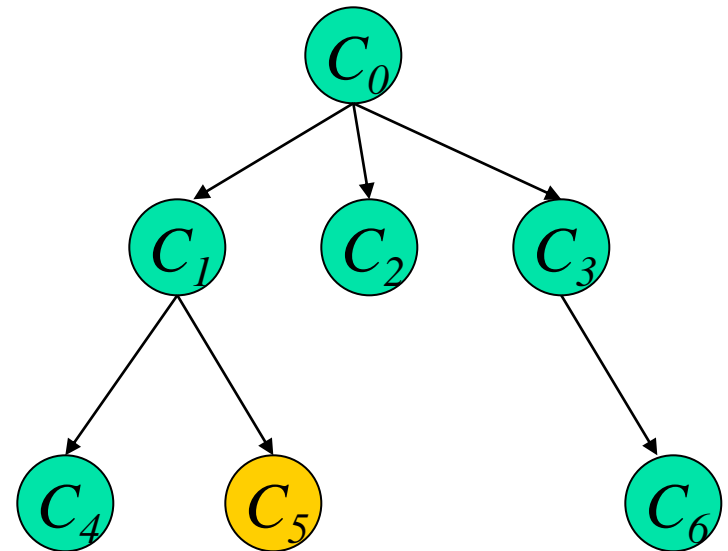


Διαμόρφωση C6 → λέξη “3 1”

Διαμόρφωση C7 → λέξη “1 2 1”

Παραδείγματα Διαμορφώσεων

- Έστω ότι η είσοδος της N είναι 11010
- Στη διαμόρφωση C_5 η ταινία της N περιέχει 10\$a0b\$1



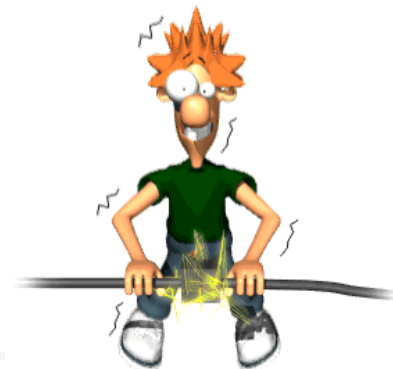
Μία πιθανή διαμόρφωση της D :

Ταινία Εισόδου: 1 1 0 1 0

Ταινία Προσομοίωσης: 1 0 \$ a 0 b \$ 1

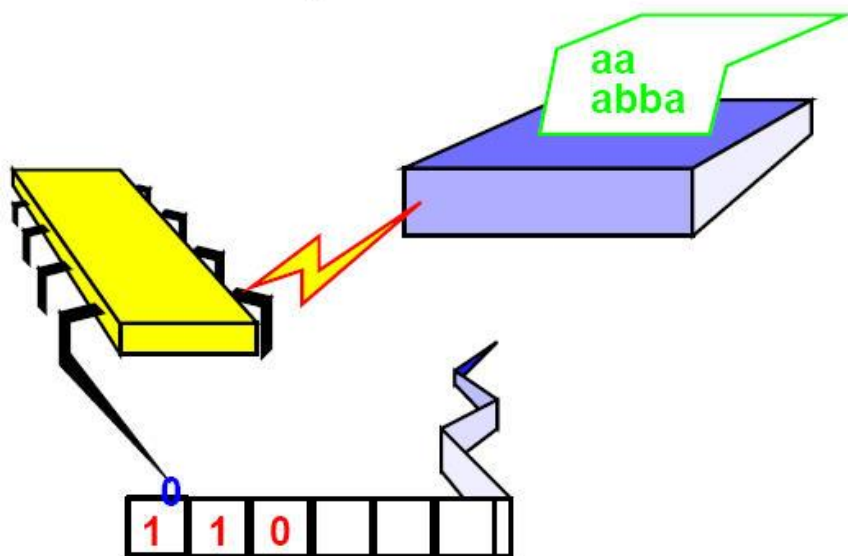
Ταινία Διεύθυνσης: 1 2

Εξομοίωση (4)



1. Αρχικά η ταινία εισόδου περιέχει το w , ενώ οι άλλες δύο ταινίες είναι άδειες.
2. Αντέγραψε την ταινία εισόδου στην ταινία εξομοίωσης.
3. Χρησιμοποίησε την ταινία εξομοίωσης για την εξομοίωση της N σε είσοδο w για ένα πεπερασμένο κομμάτι του ανταιτιοκρατικού κλάδου. Σε κάθε επιλογή, διαβάζουμε το επόμενο σύμβολο από την ταινία διεύθυνσης. Αποδεχόμαστε αν βρούμε μία αποδεκτική διαμόρφωση. Διαφορετικά πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα αν
 1. Τα σύμβολα στην ταινία διεύθυνσης τελείωσαν
 2. Η ανταιτιοκρατική επιλογή είναι άκυρη
 3. Βρέθηκε απορριπτική διαμόρφωση
4. Αντικαθιστούμε την λέξη στην ταινία διεύθυνσης με την επόμενη λεξικογραφικά λέξη. Μεταβαίνουμε στο Βήμα 2 για την εξομοίωση του συγκεκριμένου κλάδου του υπολογισμού της N .

Απαριθμητές



- Μία γλώσσα είναι **αναδρομικά απαριθμητή** αν είναι αναγνωρίσιμη από κάποια TM.
- Γιατί όμως απαριθμητή;

Ορισμός: Ένας απαριθμητής είναι μία TM με εκτυπωτή.

- ✓ Η TM στέλνει λέξεις στον εκτυπωτή
- ✓ Μπορεί να δημιουργήσει μία άπειρη λίστα λέξεων
- ✓ Η TM απαριθμεί μία γλώσσα L : όλες οι λέξεις της L εκτυπώνονται.



Ισοδυναμία

Θεώρημα: Μία γλώσσα είναι *αναγνωρίσιμη* από μία TM αν και μόνο αν κάποιος απαριθμητής την απαριθμεί.

Θα δείξουμε ότι:

- Αν ο E απαριθμεί την γλώσσα L , τότε και μία TM αναγνωρίζει την L .
- Αν η M αναγνωρίζει την L , τότε κάποιος απαριθμητής E την απαριθμεί.



Ισοδυναμία

Αν η E απαριθμεί την γλώσσα L , τότε κάποια TM M την αναγνωρίζει.

Σε είσοδο w , η TM M :

- Τρέχει τον E . Κάθε φορά που ο E βγάζει στην έξοδο μία λέξη v , η M την συγκρίνει με το w .
- Αν $v = w$, η M αποδέχεται.
- Αν $v \neq w$, η M συνεχίζει να τρέχει την E .



Ισοδυναμία

Αν η M αναγνωρίζει την L , τότε υπάρχει κάποιος απαριθμητής E που την απαριθμεί.

Έστω s_1, s_2, s_3, \dots μία λίστα από όλες τις λέξεις στο Σ^* . Ο απαριθμητής E κάνει:

- Επανάλαβε τα κατωτέρω για $i = 1, 2, 3, \dots$
 - Τρέξε την M για i βήματα σε κάθε είσοδο s_1, s_2, \dots, s_i .
 - Αν κάποιος υπολογισμός αποδέχεται στα πρώτα i βήματα, τότε εκτύπωσε το αντίστοιχο s .

Προσέξτε ότι με αυτή τη διαδικασία κάθε έξοδος εκτυπώνεται άπειρες φορές. Πώς μπορούμε να αποφύγουμε τα διπλότυπα;



Άσκηση 3.6

- Γιατί δεν χρησιμοποιούμε τον παρακάτω αλγόριθμο;
- Για κάθε $i = 1, 2, 3, \dots$, επανέλαβε τα εξής:
 - Τρέξε την M σε είσοδο s_i .
 - Εάν η M αποδεχθεί εκτυπώνουμε το s_i .



RAM

(Στοιχεία Θεωρίας Υπολογισμού, σελ. 281.)

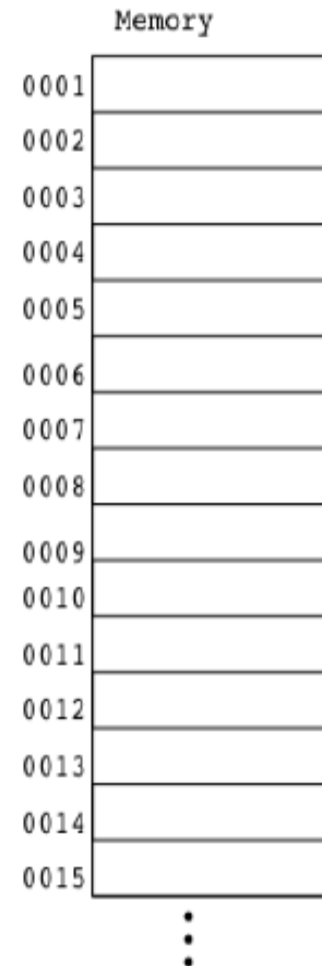
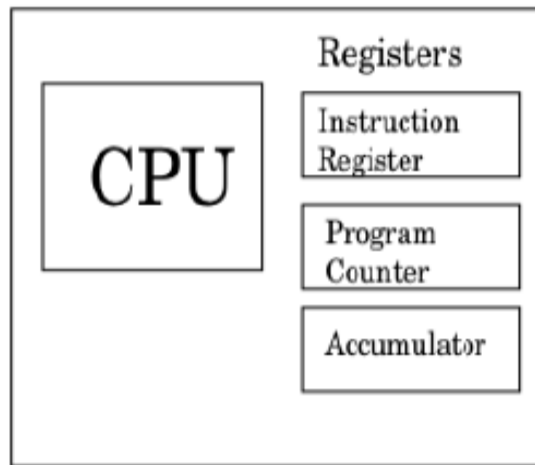
Πιο κοντά σαν μοντέλο στους
σύγχρονους Η/Υ



RAM (Random Access Machine)

- CPU
- 3 Καταχωρητές (Καταχ. Εντολών (IR), Μετρητής Προγράμματος (PC), Συσσωρευτής (ACC))
- Μνήμη
- Κύκλος Πράξης:
 - Θέσε $IR \leftarrow MEM[PC]$
 - Αύξησε κατά ένα τον PC
 - Εκτέλεση πράξη στον IR
 - Επανάλαβε

H RAM





Πρόγραμμα σε RAM

	Εντολή	Νόημα
00	HALT	Stop Computation
01	LOAD x	$ACC \leftarrow MEM[x]$
02	LOADI x	$ACC \leftarrow x$
03	STORE x	$MEM[x] \leftarrow AC$
04	ADD x	$ACC \leftarrow ACC + MEM[x]$
05	ADDI x	$ACC \leftarrow ACC + x$
06	SUB x	$ACC \leftarrow ACC - MEM[x]$
07	SUBI x	$ACC \leftarrow ACC - x$
08	JUMP x	$IP \leftarrow x$
09	JZERO x	$IP \leftarrow x$ if $ACC = 0$
10	JGT x	$IP \leftarrow x$ if $ACC > 0$

Εξομοίωση

Θεώρημα: Μία πολυταινιακή ΤΜ μπορεί να εξομοιώσει το μοντέλο RAM.

Ιδέα:

- Μία ταινία για κάθε καταχωρητή (IR, IP, ACC)
- Μία ταινία για την Μνήμη
- Η ταινία της μνήμης θα έχει καταχωρήσεις της μορφής
<διεύθυνση> <περιεχόμενα>

Οι λεπτομέρειες σε εσάς (τα παραπάνω δεν είναι δεσμευτικά)



Θέμα (Επί Διπλώματι 2022)

2 Μονάδες



Μία κυκλική TM είναι μία TM με μία ταινία άπειρου μήκους προς τη μία κατεύθυνση (δεξιά – όπως δηλαδή και στις κλασσικές TM) με την διαφορά ότι συμπεριφέρεται διαφορετικά στο αριστερότερο άκρο. Όταν η κεφαλή της ταινίας βρίσκεται στο αριστερότερο άκρο αντί να μένει στο ίδιο όταν προσπαθεί να κάνει κίνηση προς τα αριστερά, στην κυκλική TM η κεφαλή μεταφέρεται στο αριστερότερο κενό κελί. Να αποδείξετε ότι η κλάση γλωσσών που διαγιγνώσκονται από την κυκλική TM είναι ίδια με την κλάση γλωσσών που διαγιγνώσκονται από την κλασσική TM.