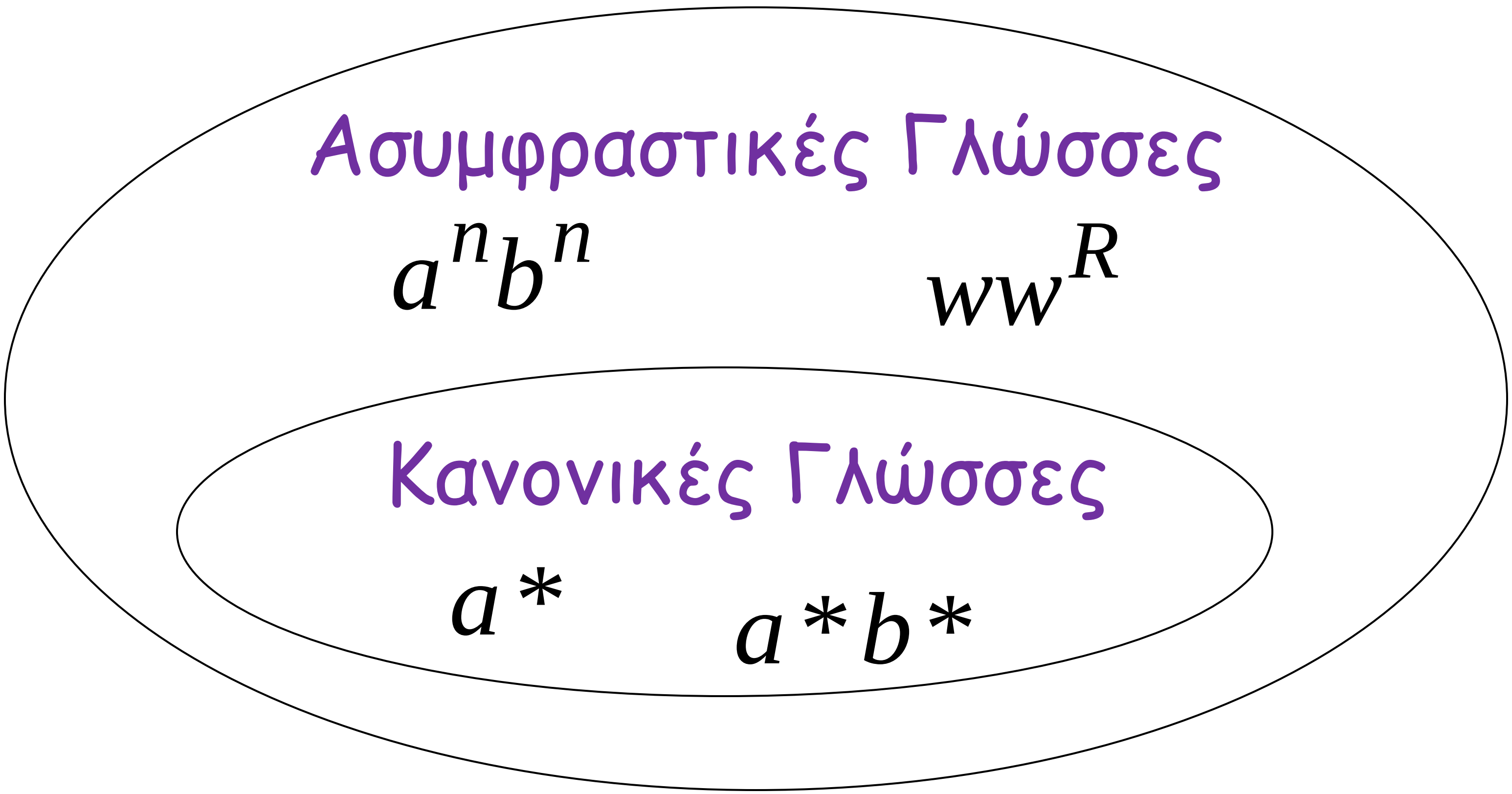
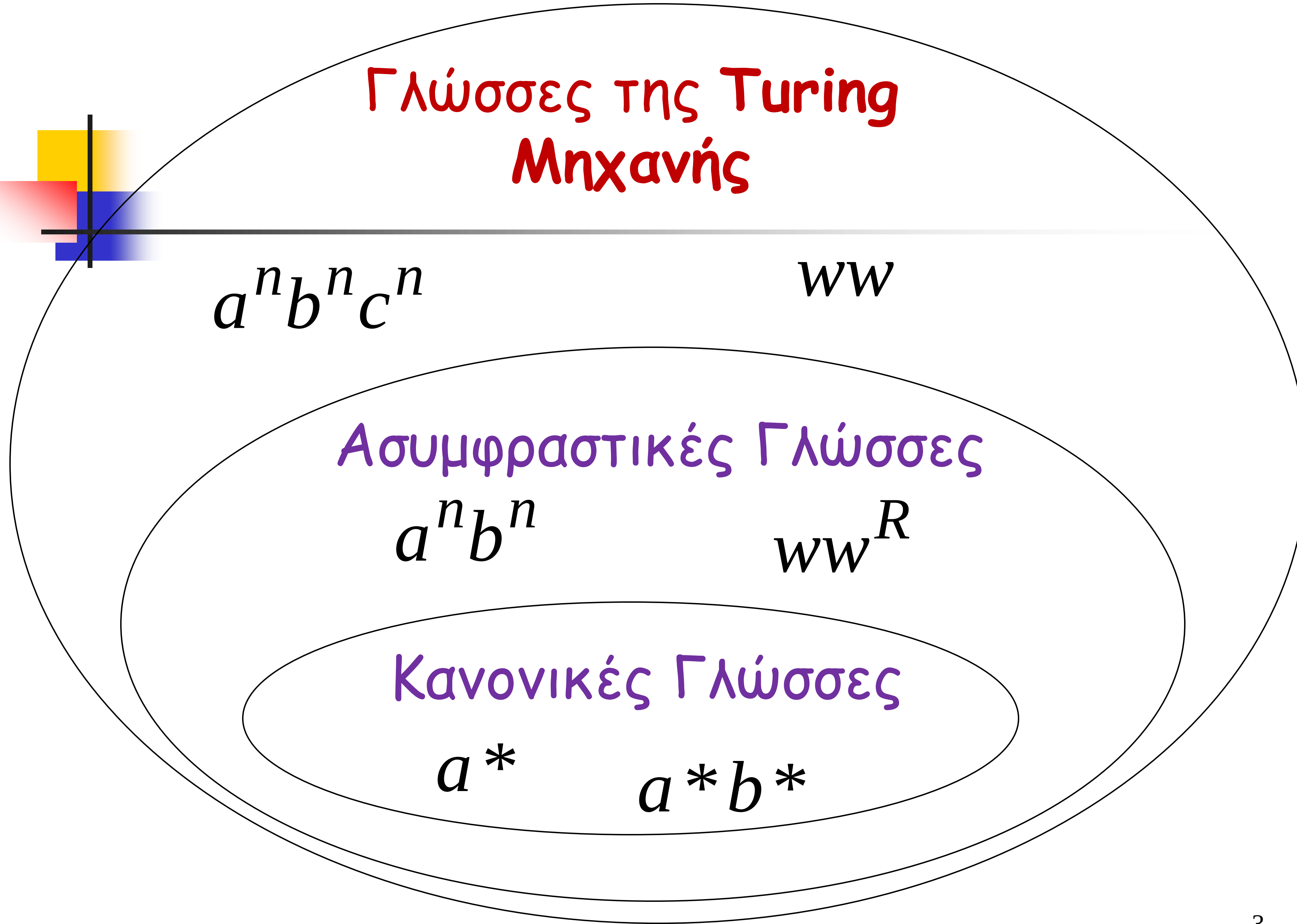
Θεωρία Υπολογισμού

Turing Machines

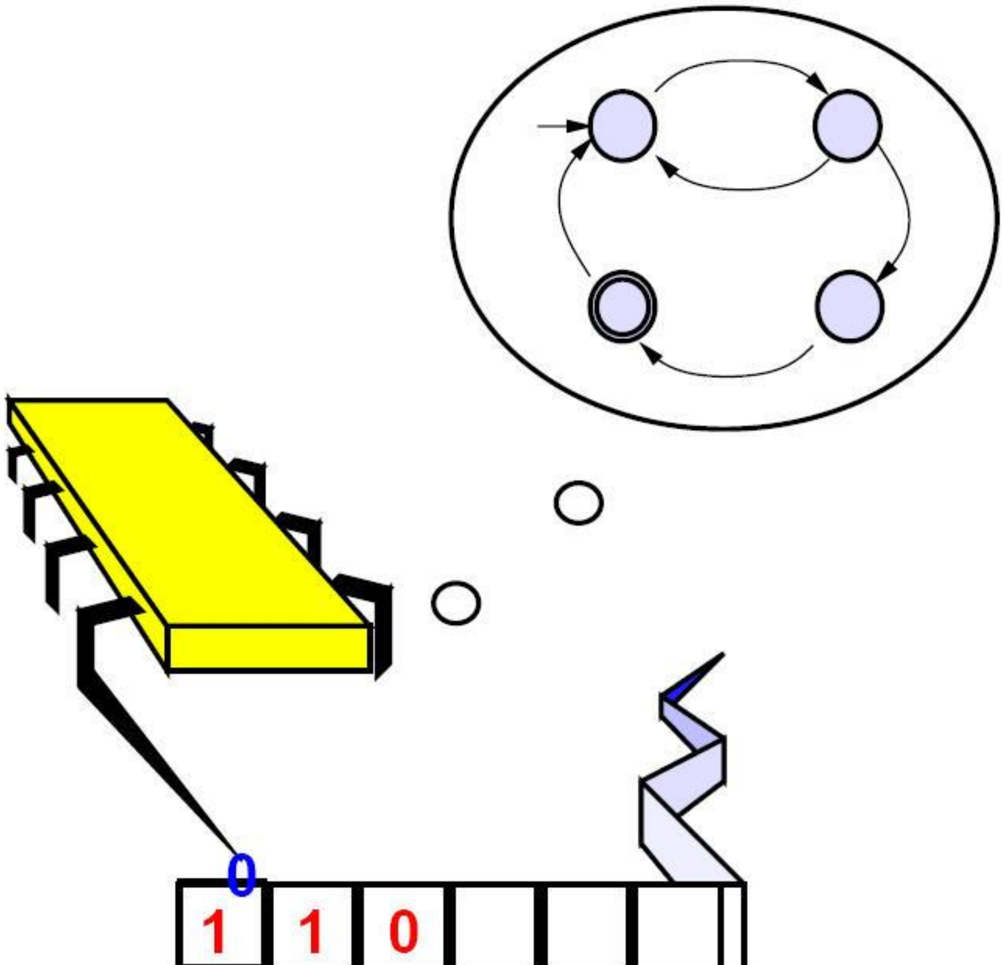
Ιεραρχία Γλωσσών

$a^n b^n c^n$ **?** ww **?**




Γλώσσες της Turing Μηχανής
$a^n b^n c^n$
ww
Ασυμφραστικές Γλώσσες
$a^n b^n$
ww^R
Κανονικές Γλώσσες
a^*
$a^* b^*$

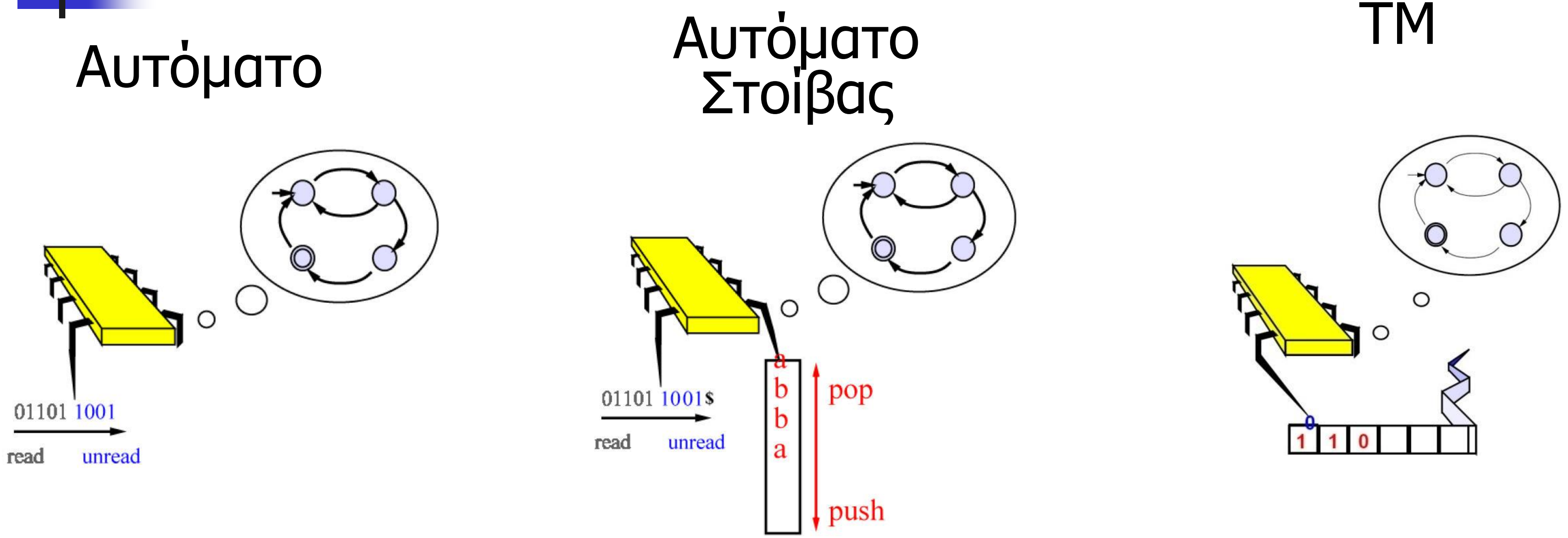
Μηχανές Turing (TM – Turing Machines)



Ουσιαστικά είναι ένα πεπερασμένο αυτόματο που προσπελαύνει μία απείρου μήκους ταινία με όποιο τρόπο θέλει.

Είναι το μοντέλο υπολογισμού για αλγόριθμους...

Σύγκριση με Αυτόματα



Τα αυτόματα και αυτόματα στοίβας μπορούν να διαβάσουν την είσοδο μόνο μία φορά.

Οι TM:

α) Μπορούν να ξαναδιαβάσουν την είσοδο και να την «γράψουν»

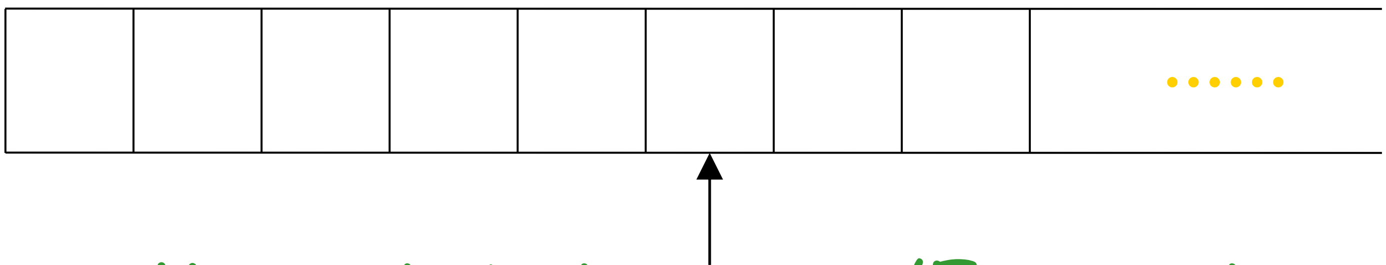
β) Η κεφαλή μπορεί να κινείται δεξιά-αριστερά

γ) Μπορούν να αποθηκεύσουν πληροφορία και να την ανακτήσουν αργότερα

δ) Έχουν *"άπειρη"* μνήμη

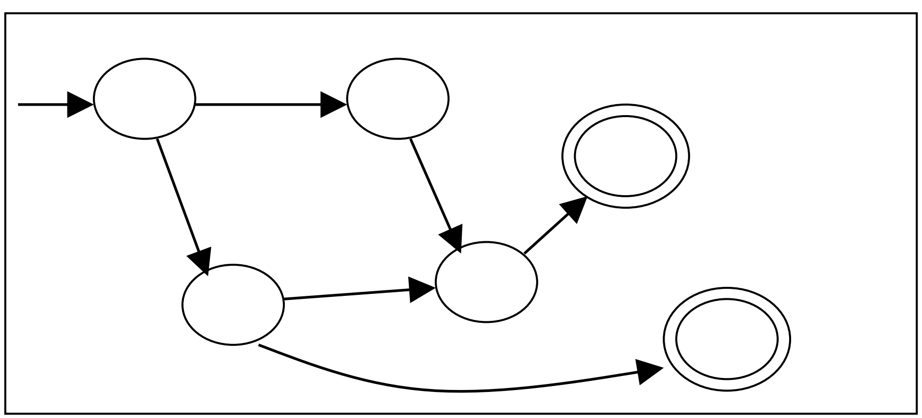
Η Turing Μηχανή (TM)

Ταινία

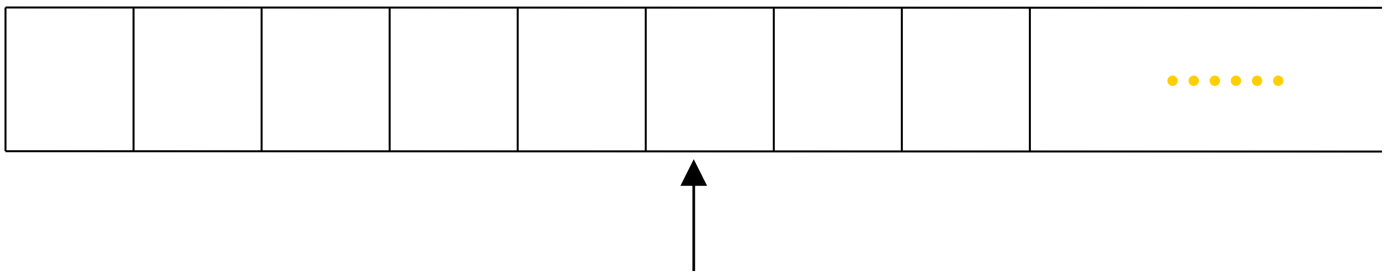


Κεφαλή Ανάγνωσης/Εγγραφής

Μονάδα Ελέγχου



Η Ταινία



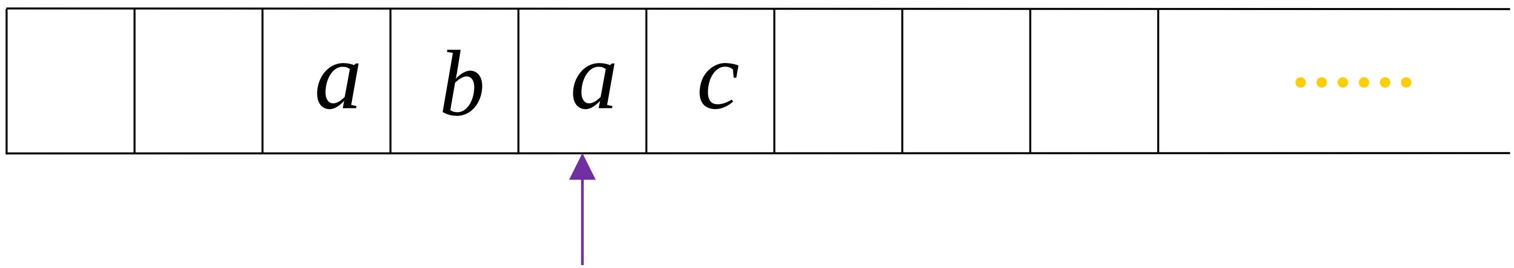
Κεφαλή Ανάγνωσης/Εγγραφής

Η κεφαλή σε κάθε βήμα:

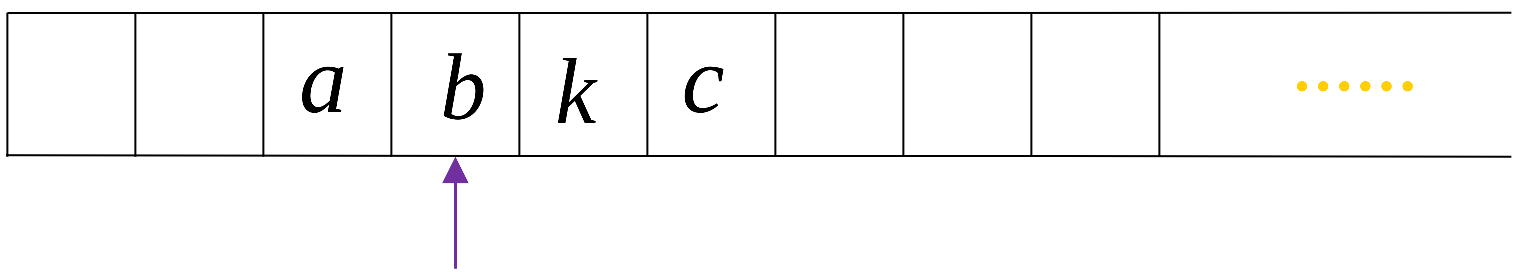
1. Διαβάζει ένα σύμβολο
2. Γράφει ένα σύμβολο
3. Μετακινείται Αριστερά (Α) ή Δεξιά (Δ)

Παράδειγμα

Βήμα i

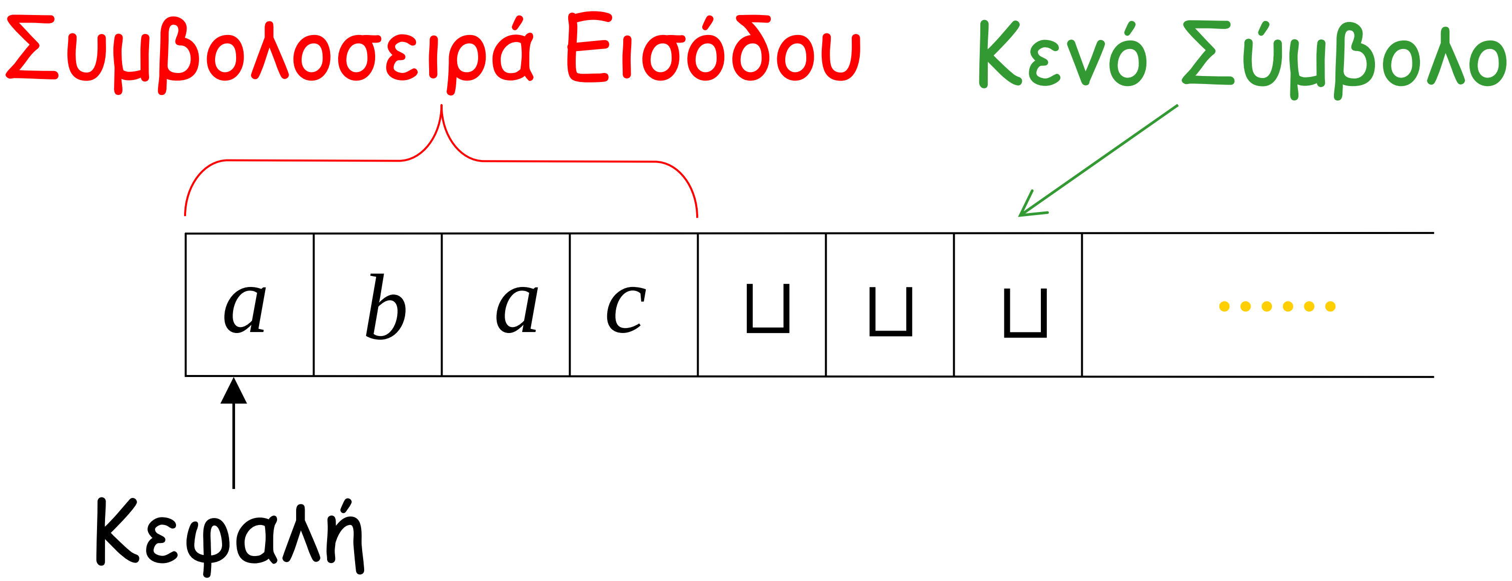


Βήμα i+1



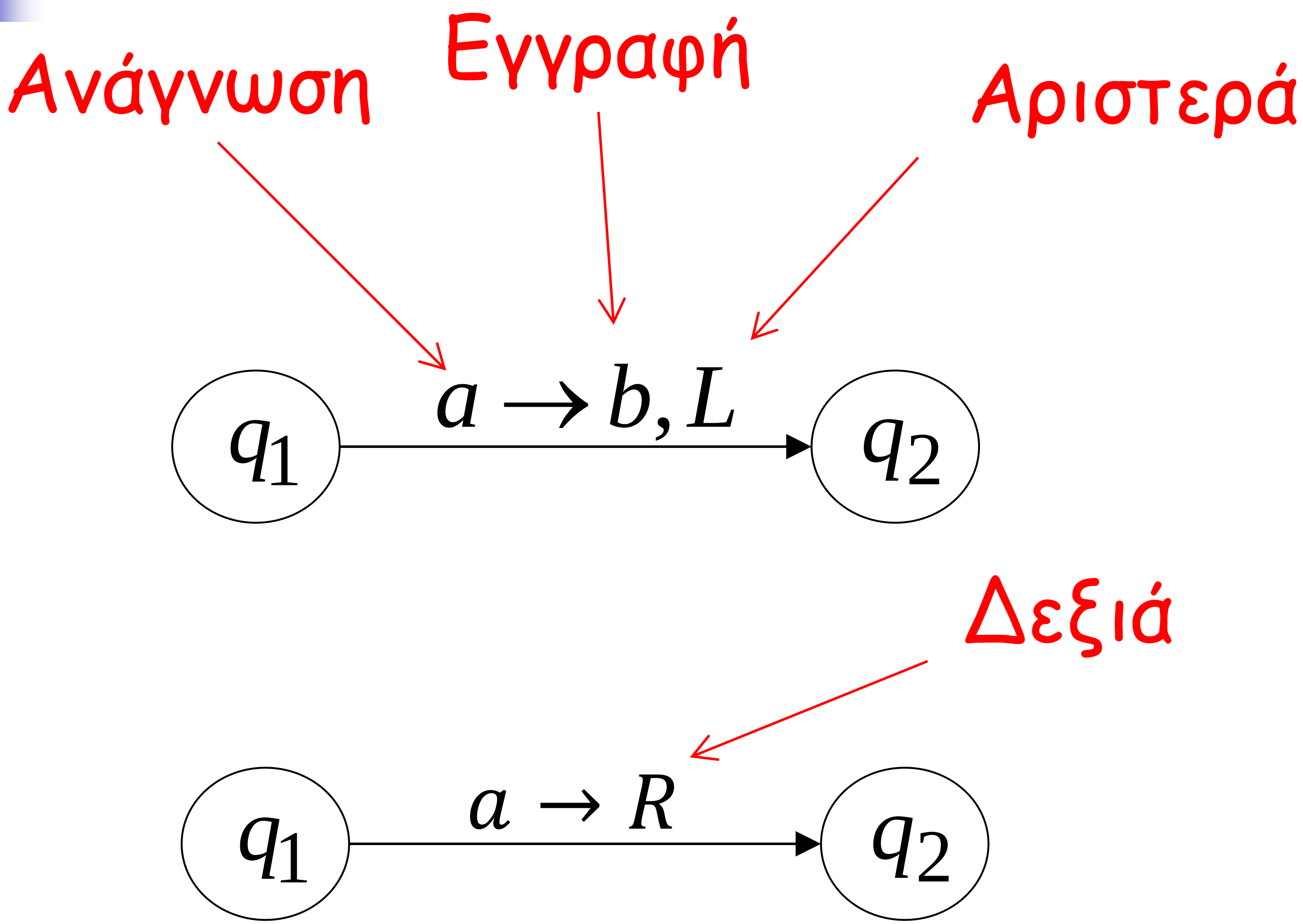
1. Ανάγνωση a
2. Εγγραφή του k
3. Μετακίνηση Αριστερά

Η Είσοδος



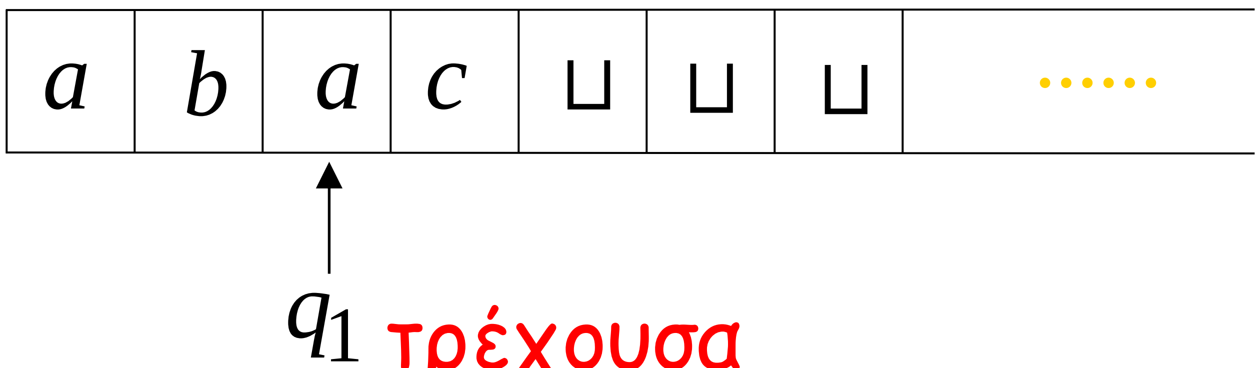
Η κεφαλή ξεκινά από την αριστερότερη θέση της ταινίας που περιέχει την είσοδο μέχρι το πρώτο κενό.

Καταστάσεις & Μεταβάσεις



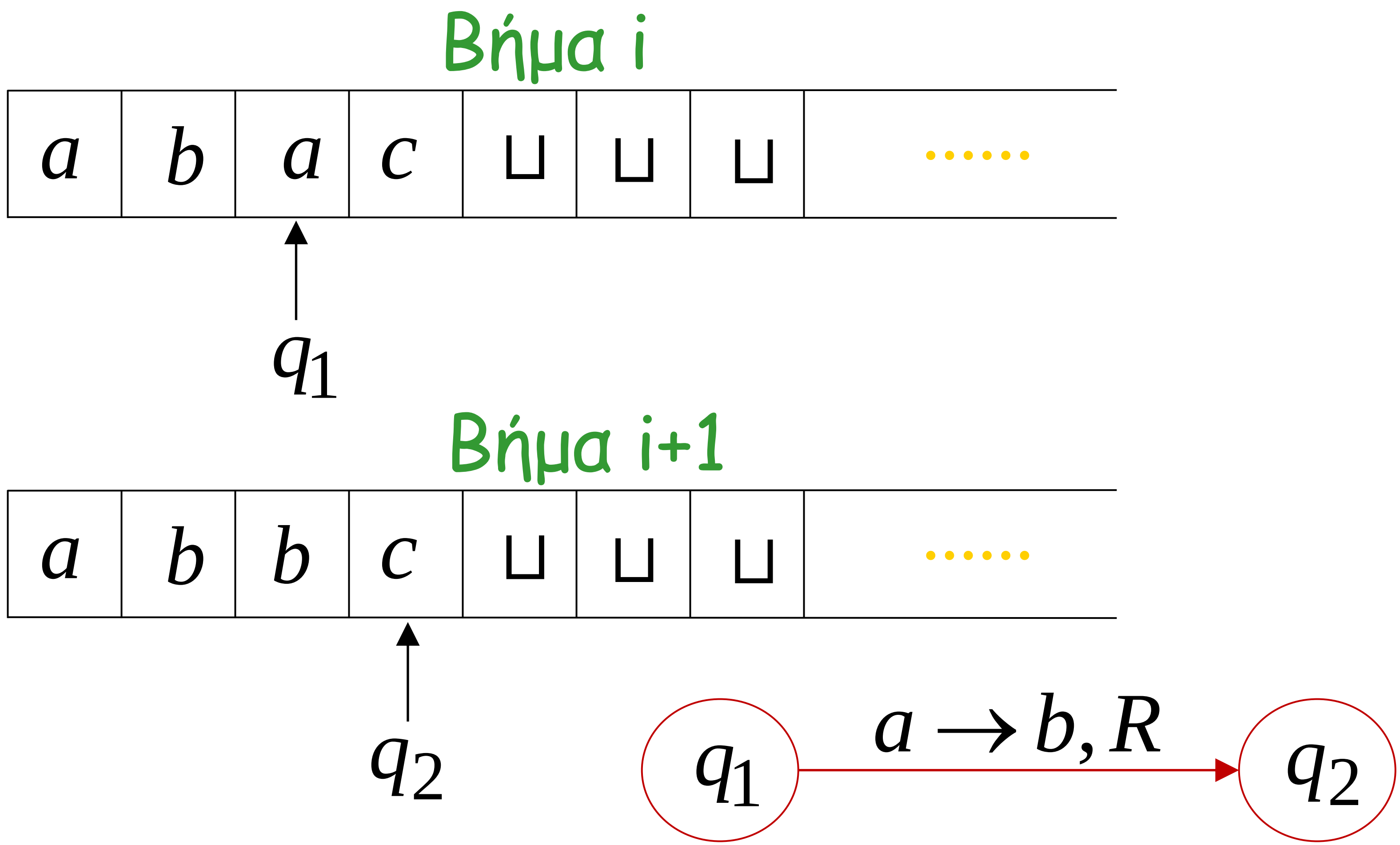
Παράδειγμα

Βήμα i

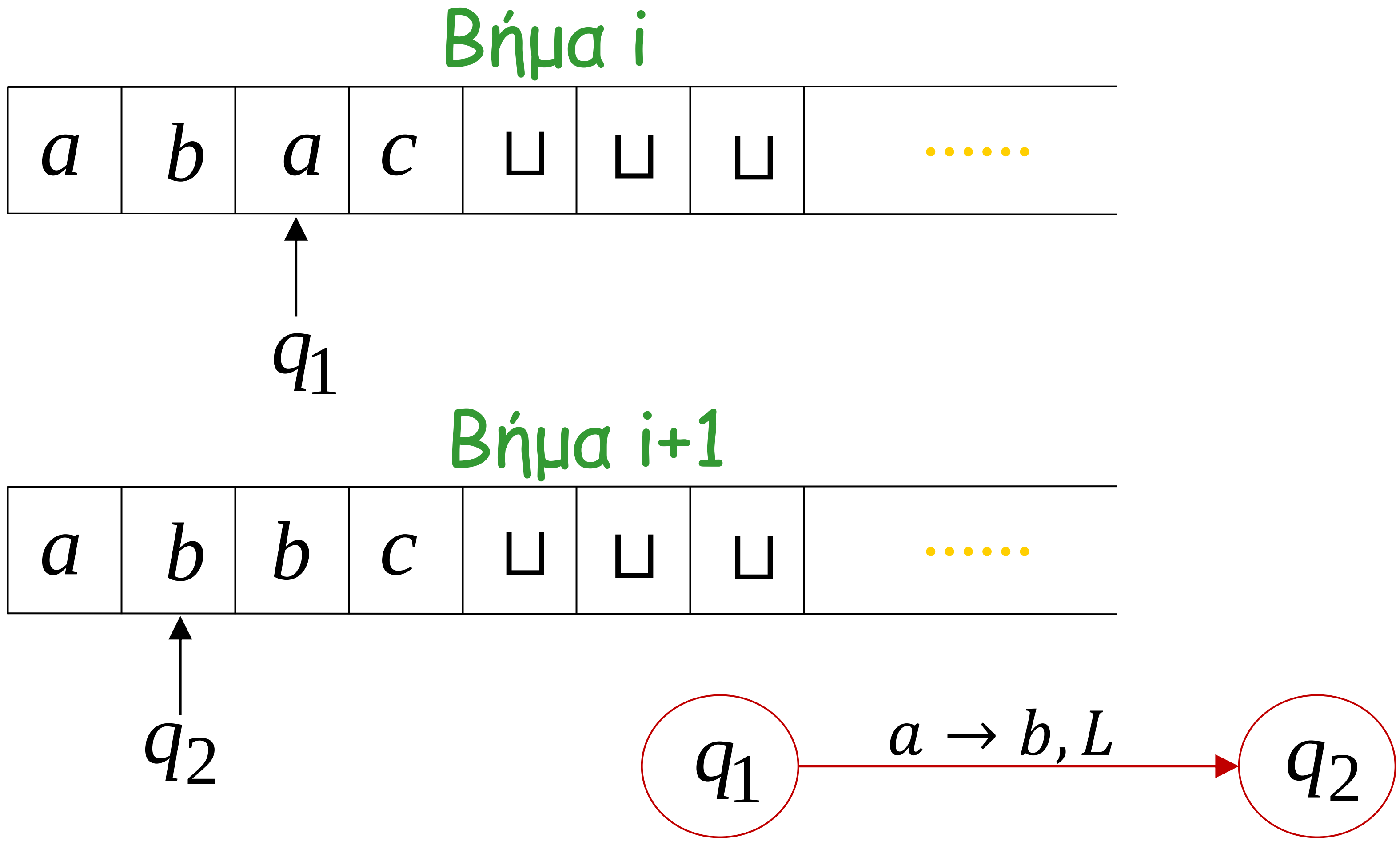


τρέχουσα κατάσταση

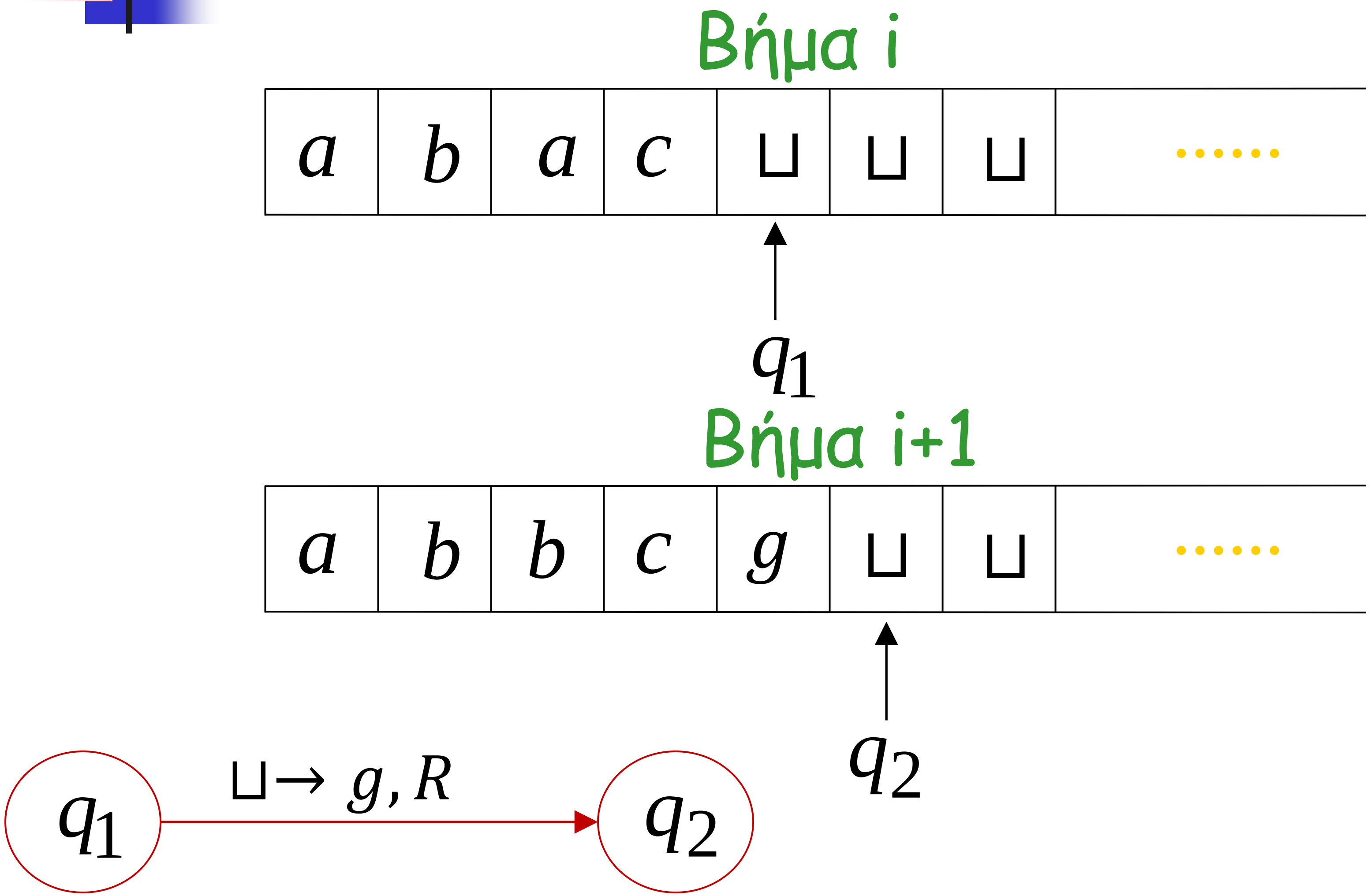
Παράδειγμα (2)



Παράδειγμα (2)



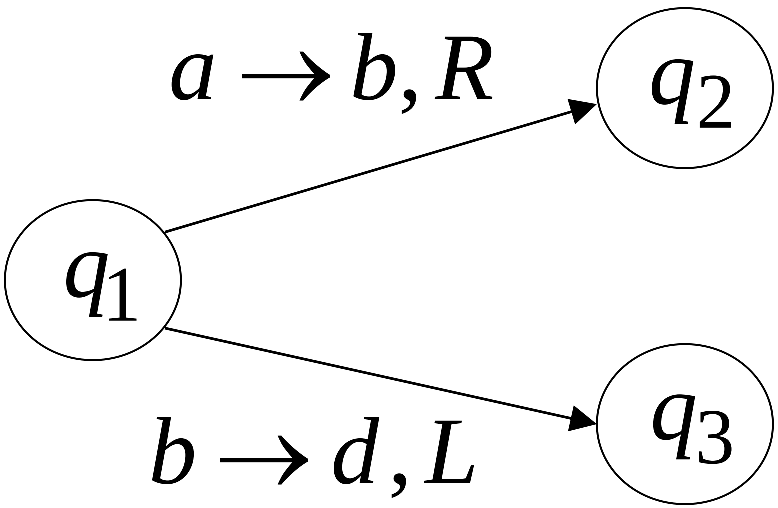
Παράδειγμα (3)



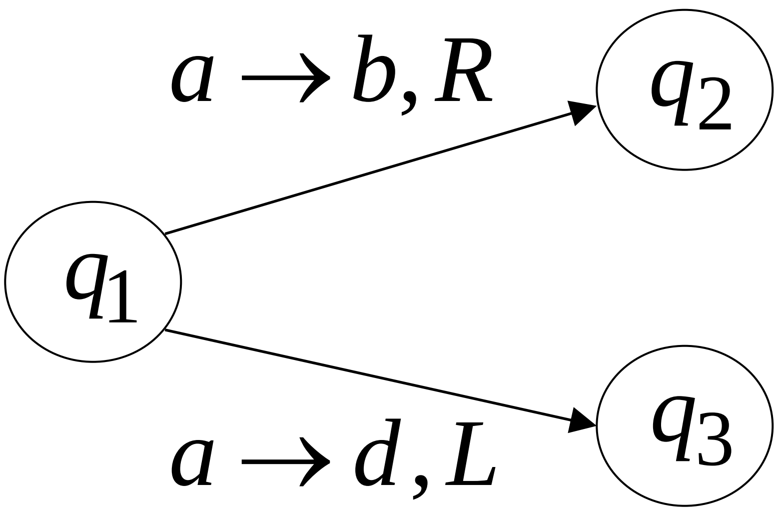
Αιτιοκρατία - Ντετερμινισμός

Για την ώρα ασχολούμαστε με αιτιοκρατικές TM.

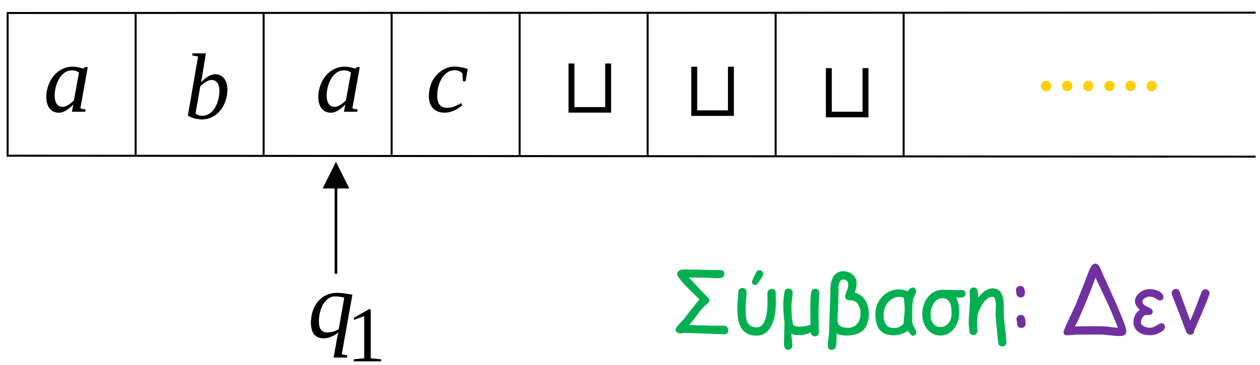
Επιτρέπεται

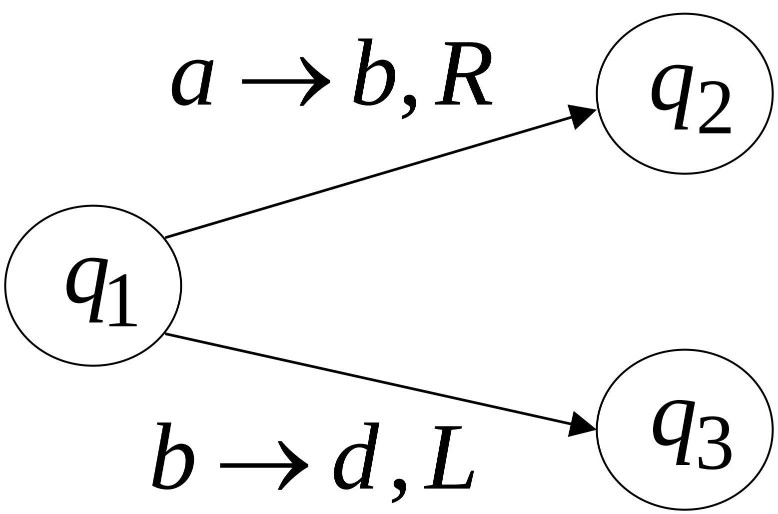


Δεν Επιτρέπεται



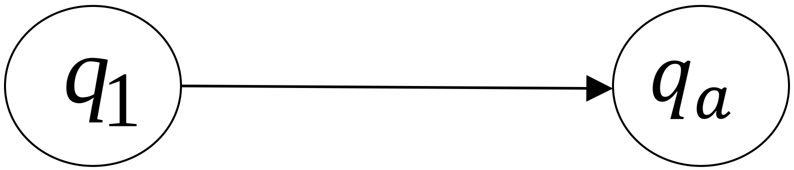
Συνάρτηση Μετάβασης



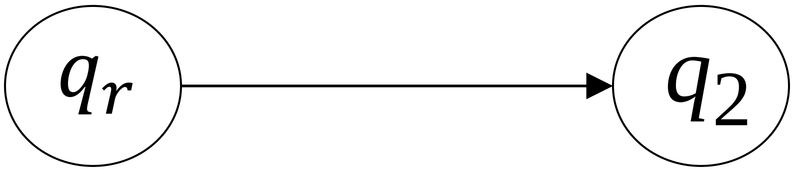


Σύμβαση: Δεν υπάρχει μετάβαση για το σύμβολο c. Θεωρείται ότι η μετάβαση είναι σε κατάσταση απόρριψης

Τερματικές Καταστάσεις



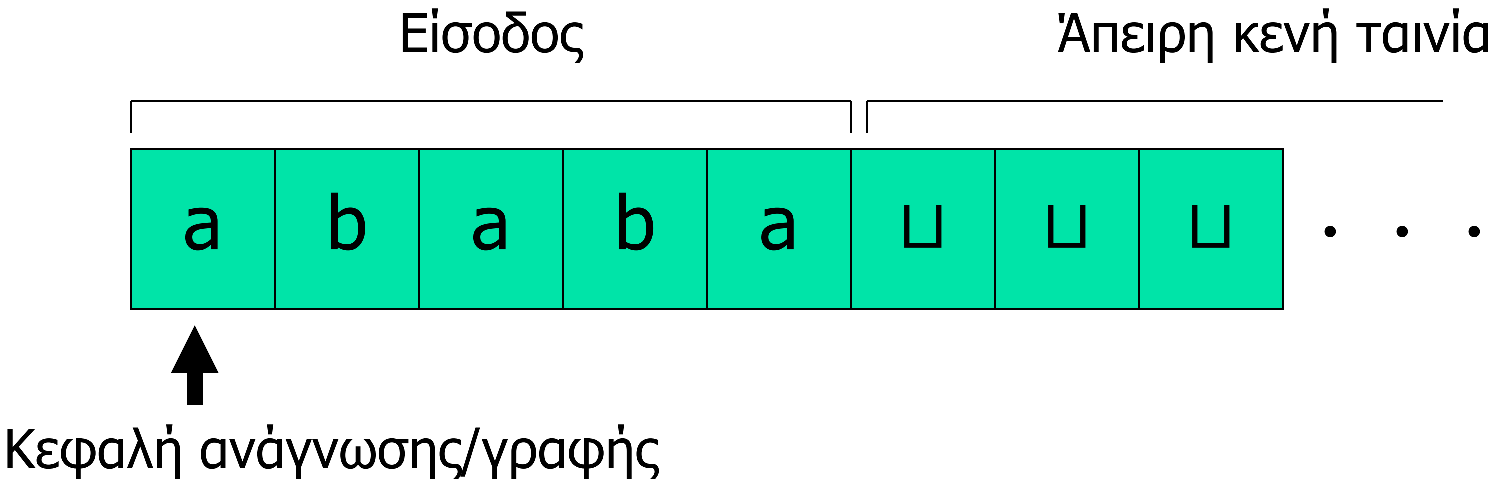
Επιτρέπεται



Δεν Επιτρέπεται

- Σε τερματική κατάσταση η TM τερματίζει:
  - Η q_a ή $q_{\alpha\pi o\delta}$ είναι η κατάσταση αποδοχής
  - Η q_r ή $q_{\alpha\pi o\rho}$ είναι η κατάσταση απόρριψης

Χαρακτηριστικά TM



Σε κάθε βήμα, η μηχανή διαβάζει ένα σύμβολο και έπειτα:

- γράφει ένα νέο σύμβολο και
- είτε μετακινεί την κεφαλή προς τα δεξιά,
- ή προς τα αριστερά

Turing Μηχανή:

Καταστάσεις

Αλφάβητο Εισόδου

Αλφάβητο Ταινίας

$$M = (Q,\ \Sigma,\ \Gamma,\ \delta,\ q_0,\ q_a,\ q_r)$$

Συνάρτηση Μετάβασης

Αρχική Κατάσταση

Κατάσταση Αποδοχής

Κατάσταση Απόρριψης

Τυπικός Ορισμός TM

TM είναι μία 7-άδα $(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{αποδ},q_{απορ})$, όπου Q, Σ και Γ είναι πεπερασμένα σύνολα και:

- Q είναι το σύνολο καταστάσεων
- Σ είναι το αλφάβητο εισόδου χωρίς το $\sqcup$ (κενό)
- Γ είναι το αλφάβητο της ταινίας, με $\sqcup \in \Gamma$ και $\Sigma \subset \Gamma$
- $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{Α,Δ\}$ είναι η συνάρτηση μεταβάσεων
- $q_0 \in Q$ είναι η εναρκτήρια κατάσταση
- $q_{αποδ} \in Q$ είναι η κατάσταση αποδοχής και
- $q_{απορ} \in Q$ είναι η κατάσταση απόρριψης και $q_{απορ} \neq q_{αποδ}$

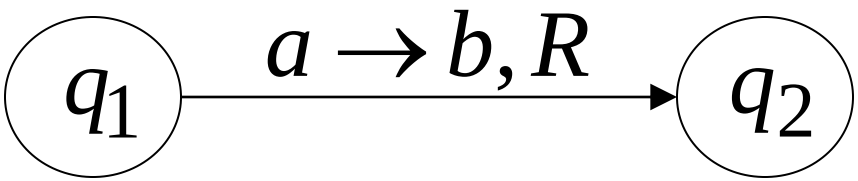
Η Συνάρτηση Μετάβασης

$$\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{\mathrm{A}, \Delta\}$$

δ(q,α) = (q΄,β,A) σημαίνει τα εξής:

- Στην κατάσταση q όπου η κεφαλή διαβάζει από την ταινία α,
- η TM γράφει β στην θέση του α
- μεταβαίνει στην κατάσταση q΄
- και μετακινεί την κεφαλή μία θέση Αριστερά (Δεξιά αν Δ)

Η Συνάρτηση Μετάβασης



$$\delta(q_1, a) = (q_2, b, R)$$

Υπολογισμός (1)

Η TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$ υπολογίζει ως εξής:

- η είσοδος μήκους n, $w = w_1 w_2 \ldots w_n \in \Sigma^*$ είναι στα n αριστερότερα κελιά της ταινίας
- η υπόλοιπη ταινία περιέχει κενά
- η κεφαλή είναι στο αριστερότερο κελί της ταινίας
- αφού $\sqcup \notin \Sigma$, το αριστερότερο κενό δηλώνει το τέλος της εισόδου

Υπολογισμός (2)

Έστω $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$. Όταν ο υπολογισμός ξεκινήσει:

- Η M συνεχίζει σύμφωνα με τη συνάρτηση μετάβασης δ.
- Αν η M προσπαθήσει να μετακινήσει την κεφαλή αριστερά του αριστερότερου κελιού δεν γίνεται τίποτα (η M πάντως δεν θα κρεμάσει).
- Ο υπολογισμός συνεχίζει μέχρι να φτάσει στις καταστάσεις q_a *ή* q_r,
- διαφορετικά η M τρέχει για πάντα.

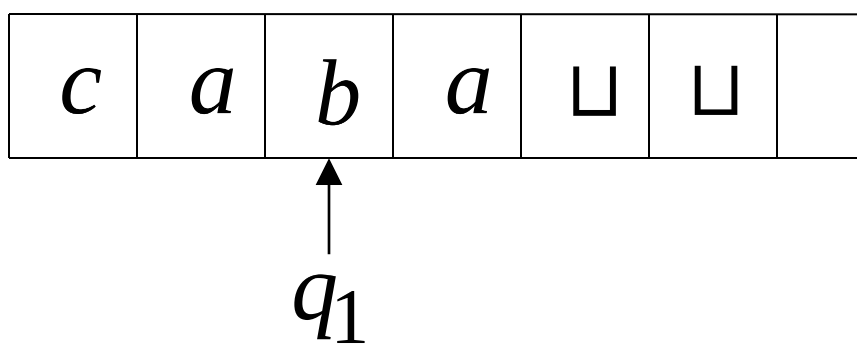
Οι Διαμορφώσεις της ΤΜ

Η διαμόρφωση μίας ΤΜ είναι ένας εύκολος τρόπος για την αναπαράσταση της ΤΜ μία συγκεκριμένη στιγμή.

Για παράδειγμα, η διαμόρφωση $1011q_7 0111$ σημαίνει:

- Η τρέχουσα κατάσταση είναι η q_7,
- Το αριστερό μέρος της ταινίας είναι το 1011,
- Το δεξί μέρος είναι το 0111,
- και η κεφαλή δείχνει στο 0 (αριστερότερο κελί του δεξιού μέρους).

Διαμόρφωση



Περιγραφή της TM σε κάποιο βήμα της:

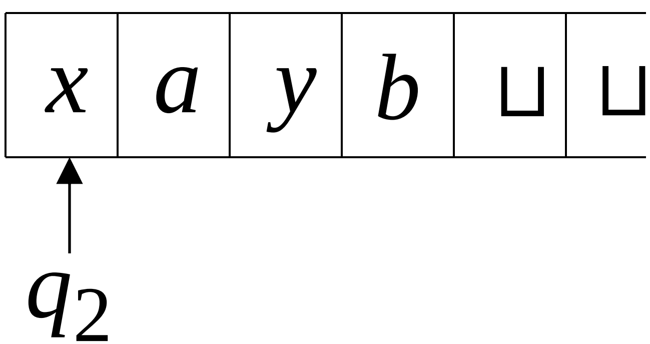
$$ca\ q_1\ ba$$

Η Σχέση *ΑΠΟΦΕΡΕΙ* για τις Διαμορφώσεις

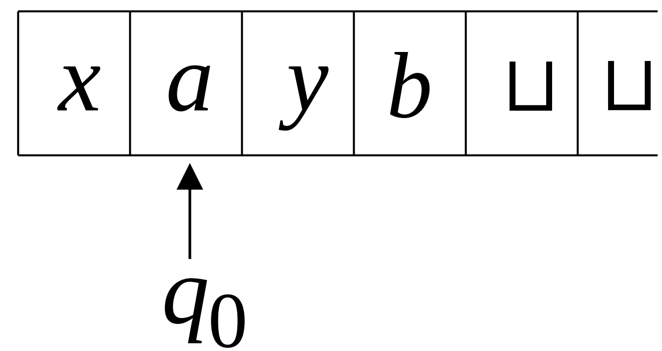
- Αν $\delta(q_i, b) = (q_j, c, A)$ τότε η διαμόρφωση uaq_ibv *αποφέρει* τη διαμόρφωση uq_jacv.
- Αν $\delta(q_i, b) = (q_j, c, \Delta)$ τότε η διαμόρφωση uaq_ibv *αποφέρει* τη διαμόρφωση $uacq_jv$.
- Ειδική Περίπτωση (1): Όταν η κεφαλή είναι στην αριστερότερη θέση και προσπαθεί να κινηθεί προς τα αριστερά τότε αυτή η μετακίνηση δεν γίνεται. Επομένως, αν $\delta(q_i, b) = (q_j, c, A)$ τότε η διαμόρφωση q_ibv *αποφέρει* την διαμόρφωση q_jcv.
- Ειδική Περίπτωση (2): Τι συμβαίνει όταν η κεφαλή είναι στο δεξιότερο σημείο; Οι διαμορφώσεις wq_i και $wq_i\sqcup$ δηλώνουν ακριβώς το ίδιο πράγμα.

Παράδειγμα

Βήμα 4



Βήμα 5

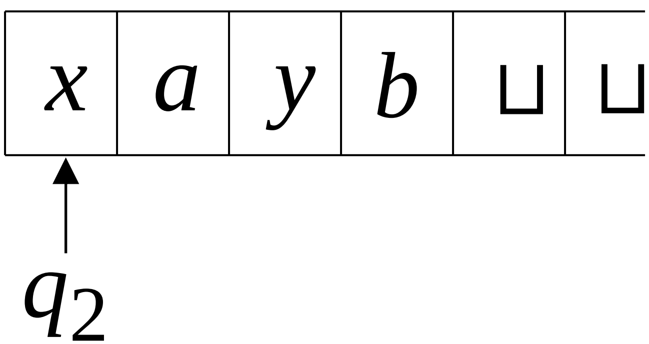


Μία κίνηση: η q_2xayb ***<u>αποφέρει</u>*** την xq_0ayb

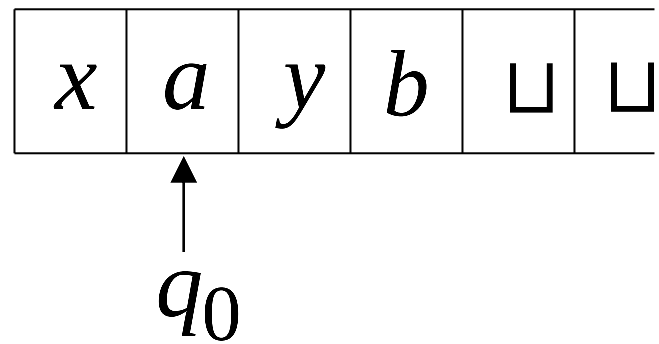
Παράδειγμα (2)

$$q_2 xayb \succ xq_0 ayb \succ xxq_1 yb \succ xxyq_1 b$$

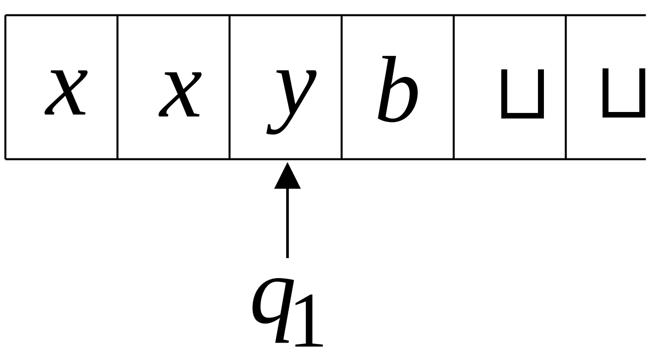
Βήμα 4



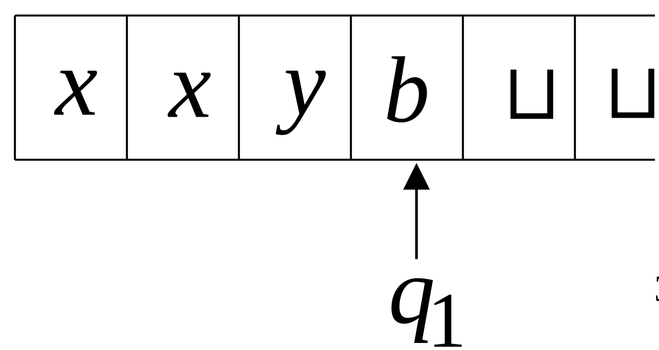
Βήμα 5



Βήμα 6

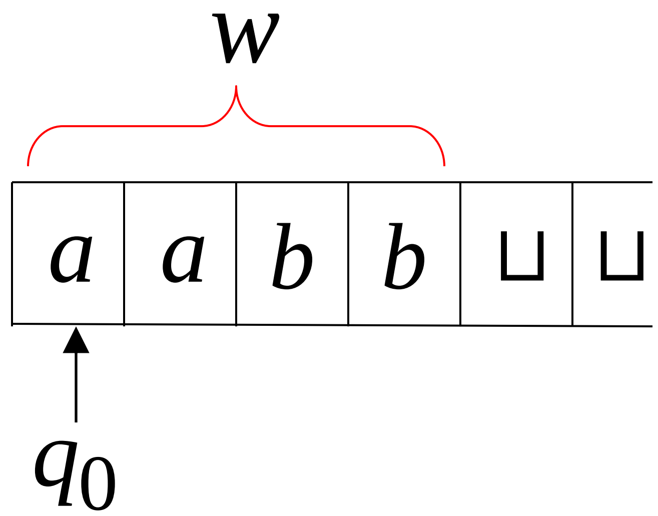


Βήμα 7



Αρχική/Εναρκτήρια Διαμόρφωση: $q_0 w$

Συμβολοσειρά Εισόδου



Κάποιες Βασικές Διαμορφώσεις

- αρχική/εναρκτήρια διαμόρφωση $q_0 w$
- αποδεκτική διαμόρφωση $w_0 q_a w_1$
- απορριπτική διαμόρφωση $w_0 q_r w_1$
- τερματικές διαμορφώσεις $w_0 q_a w_1$ και $w_0 q_r w_1$

Η L(M) είναι η γλώσσα που *αναγνωρίζεται* από την TM *M*

Μία γλώσσα λέγεται αναγνωρίσιμη αν υπάρχει TM που να την αναγνωρίζει (αναδρομικά απαριθμητές γλώσσες)

Η γλώσσα μιας

Μία TM *M* ***αποδέχεται*** την είσοδο *w* αν υπάρχει μία ακολουθία διαμορφώσεων $C_1, C_2, \ldots, C_k$ *έτσι ώστε*

- C_1 είναι η εναρκτήρια διαμόρφωση της *M* στο *w*,
- κάθε C_i αποφέρει τη διαμόρφωση C_{i+1},
- C_k είναι αποδεκτική διαμόρφωση.

Η συλλογή λέξεων που γίνονται αποδεκτές από την *M* αποκαλείται *γλώσσα της M*, και συμβολίζεται με L(M).

Η ΤΜ *M*....

σε μία είσοδο w μπορεί να

- Αποδέχεται $\left(w \in L(M)\right)$
- Απορρίψει
- Εγκλωβιστεί

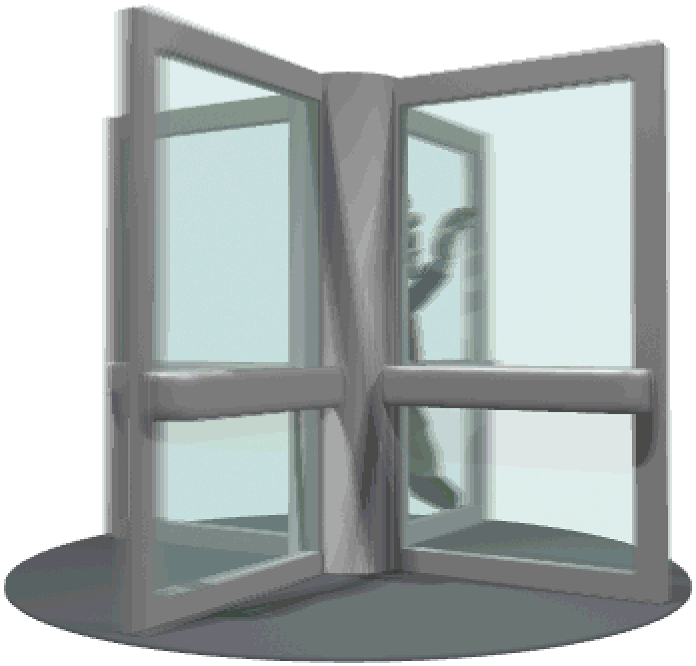
Η ΤΜ *M*....

σε μία είσοδο w μπορεί να

- Αποδεχτεί
- Απορρίψει $\left(w \notin L(M)\right)$
- Εγκλωβιστεί

Η ΤΜ *M*....

σε μία είσοδο *w* μπορεί να



- Αποδέχεται
- Απορρίψει
- Εγκλωβιστεί $\left(w \notin L(M)\right)$

Γενικά δεν ξέρουμε αν η ΤΜ τερματίζει...

Διαγνώσιμη Γλώσσα

Μία TM ***διαγιγνώσκει*** μία γλώσσα αν για κάθε είσοδο $w \in \Sigma^*$, η TM τερματίζει.

Δηλαδή η TM είτε φτάνει στην κατάσταση q_a (όταν $w \in L(M)$) ή στην κατάσταση q_r (όταν $w \notin L(M)$), και δεν εγκλωβίζεται για όλες τις δυνατές εισόδους.

Μία γλώσσα είναι διαγνώσιμη όταν υπάρχει TM που την διαγιγνώσκει.

Μερικές ΤΜ στο Διαδίκτυο

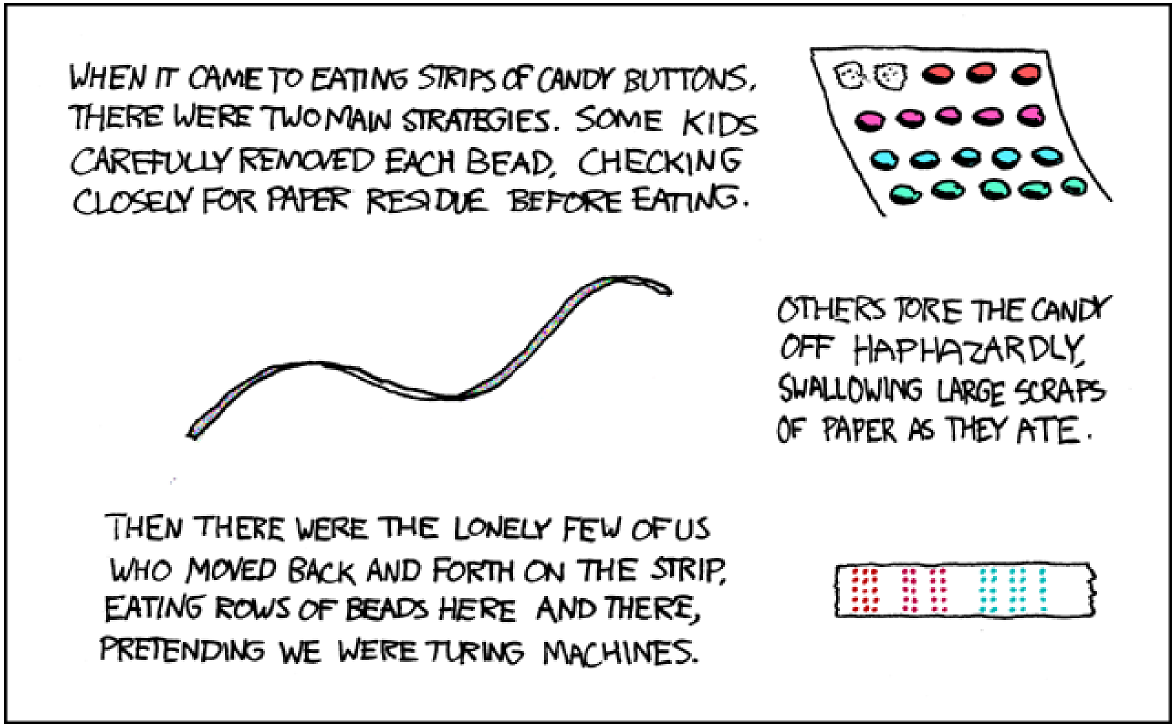
http://math.hws.edu/eck/js/turing-machine/TM.html

http://corelab.ntua.gr/tm/

https://turingmachinesimulator.com/

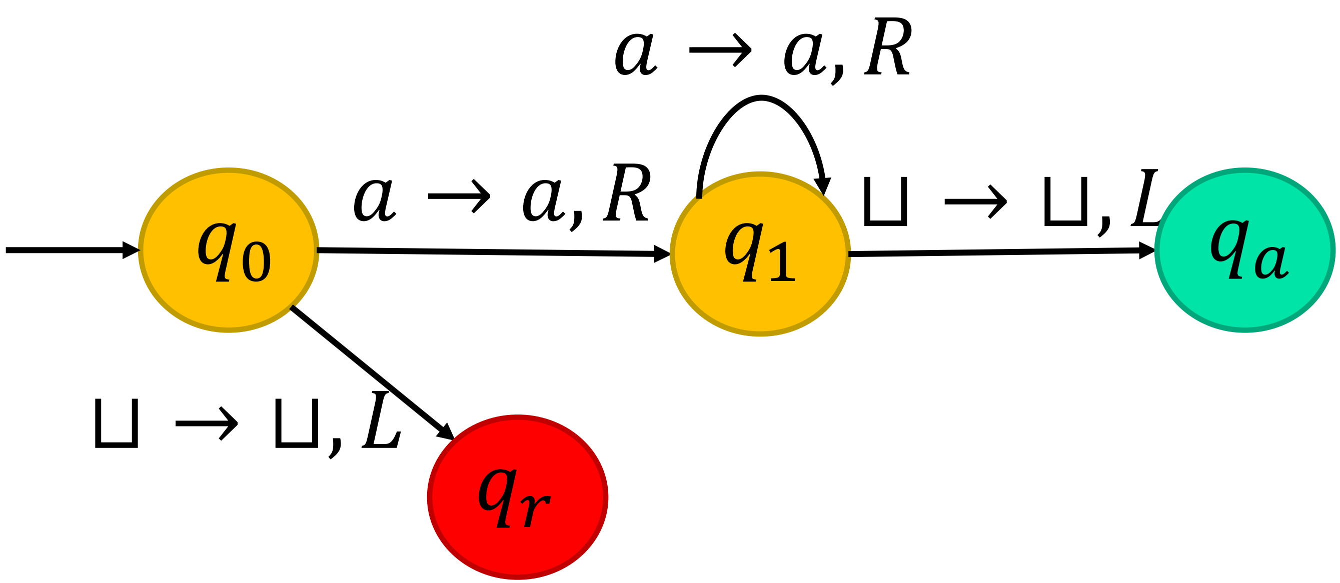
https://turingmachine.io/

ΠΑΡΑΔΕΊΓΜΑΤΑ

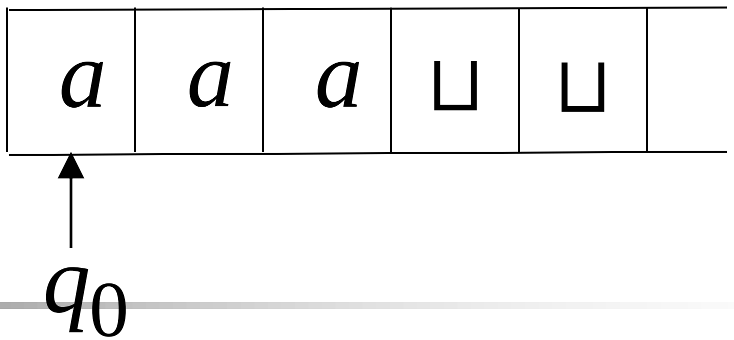


TM για τη Γλώσσα aa^* με $\Sigma=\{a\}$

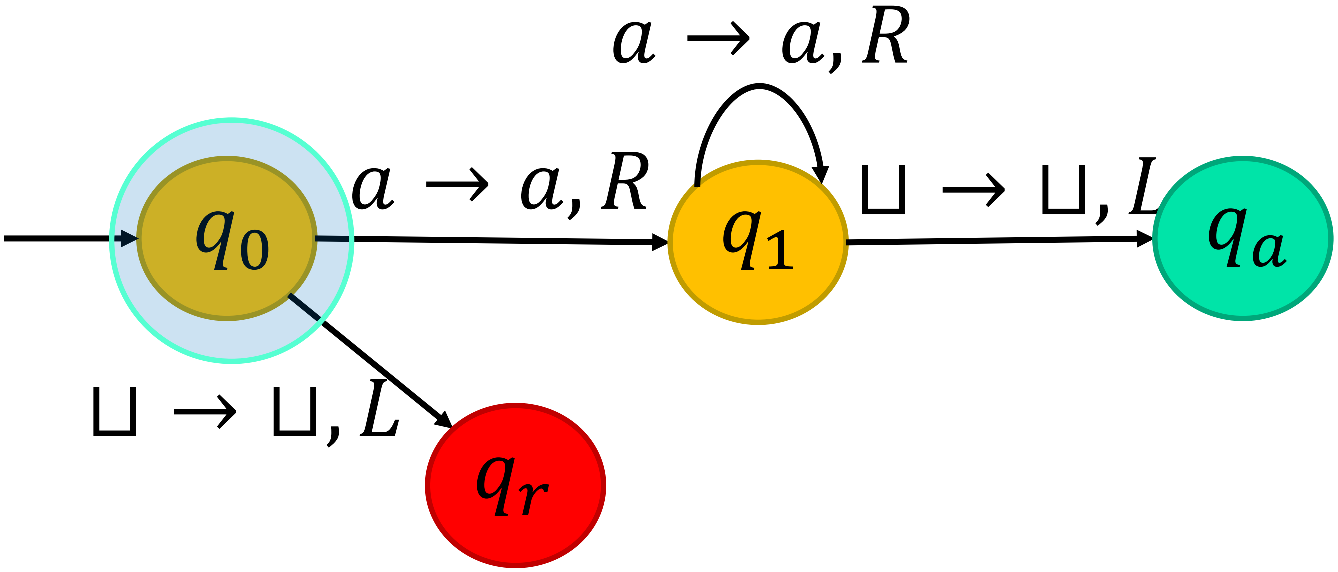
	a	⊔
q_0	(q_1,a,R)	$(q_r,⊔,L)$
q_1	(q_1,a,R)	$(q_a,⊔,L)$



Χρόνος 0

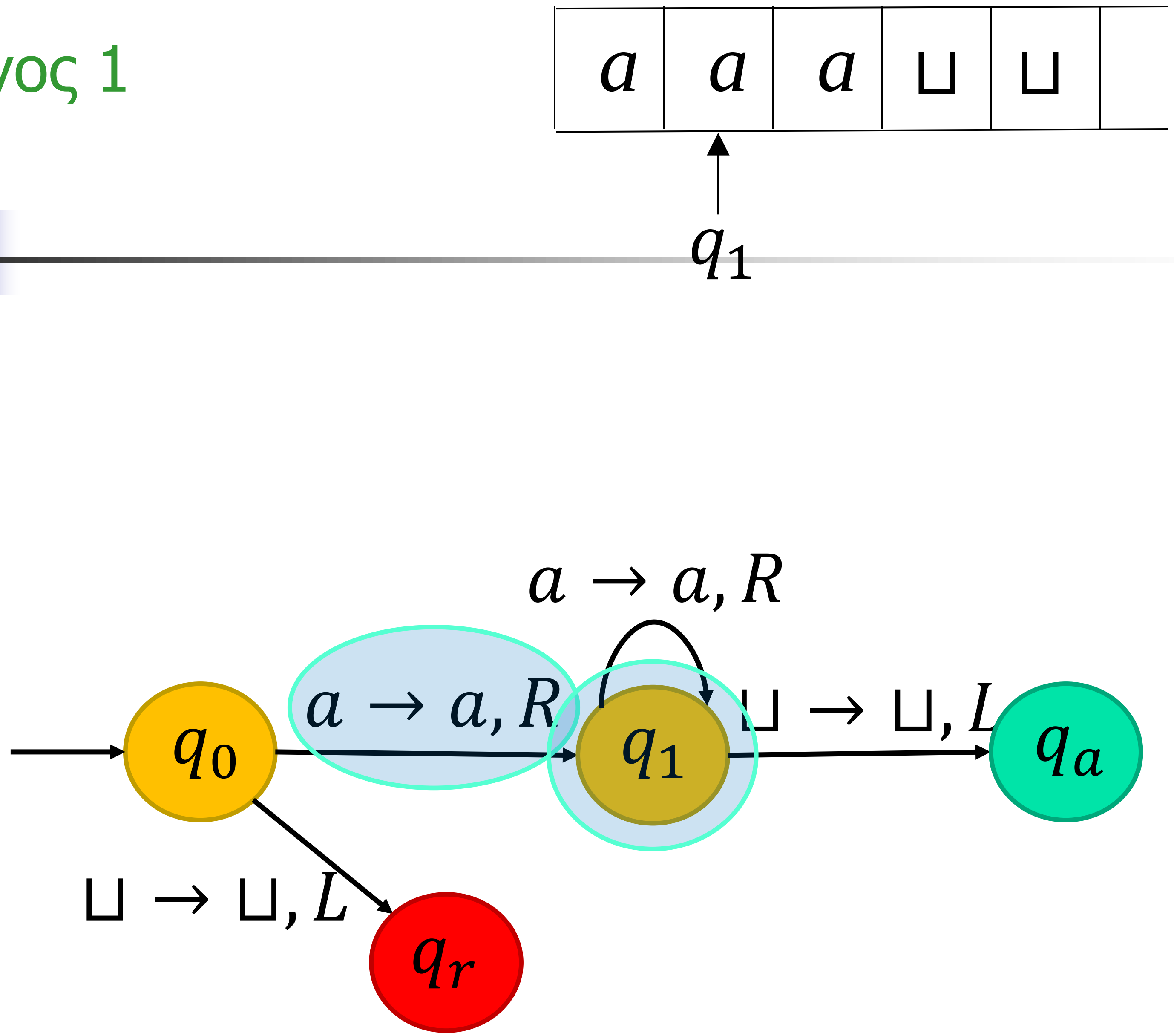


a
a
a
$\sqcup$
$\sqcup$
q_0



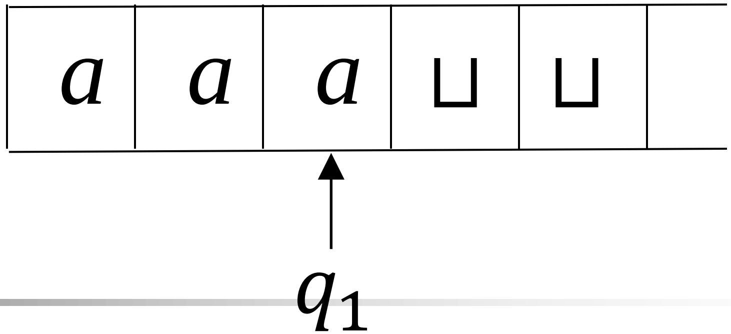
$a \rightarrow a, R$
$a \rightarrow a, R$
$\sqcup \rightarrow \sqcup, L$
$\sqcup \rightarrow \sqcup, L$
q_0
q_1
q_a
q_r

Χρόνος 1

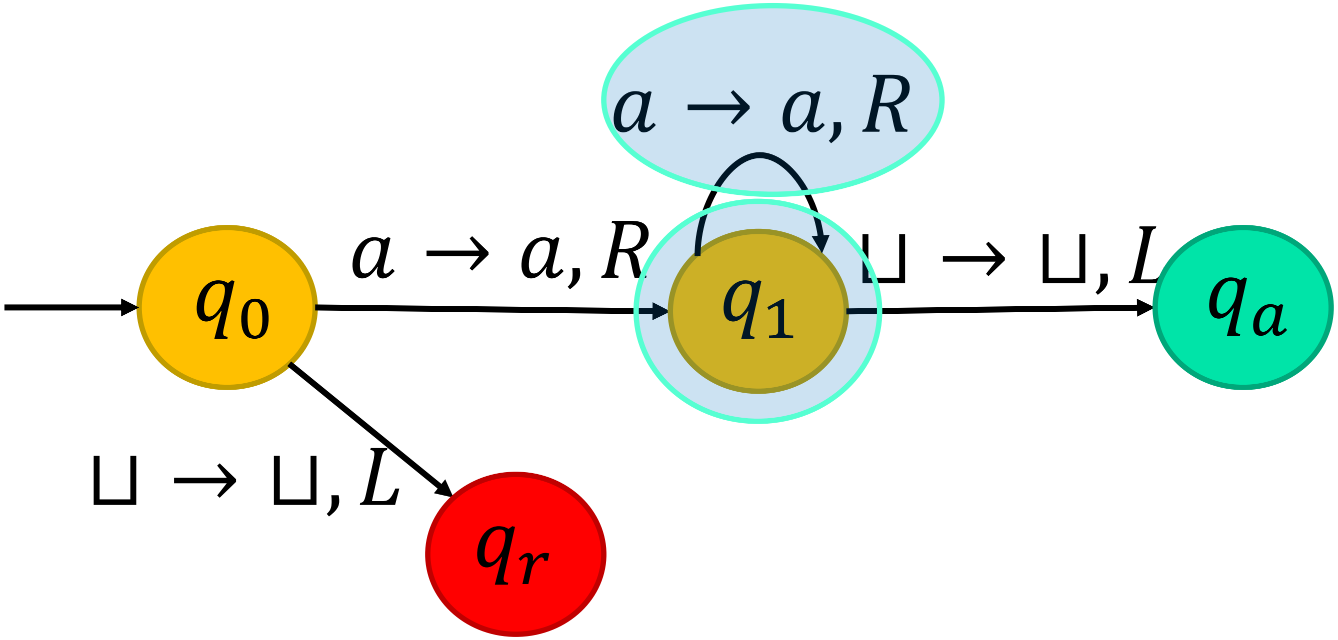


a
a
a
$\sqcup$
$\sqcup$
q_1
$a \rightarrow a, R$
q_0
$a \rightarrow a, R$
q_1
$\sqcup \rightarrow \sqcup, L$
q_a
$\sqcup \rightarrow \sqcup, L$
q_r

Χρόνος 2

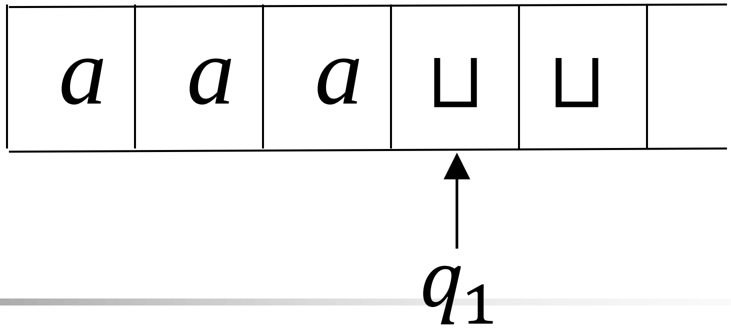


a a a $\sqcup$ $\sqcup$
q_1

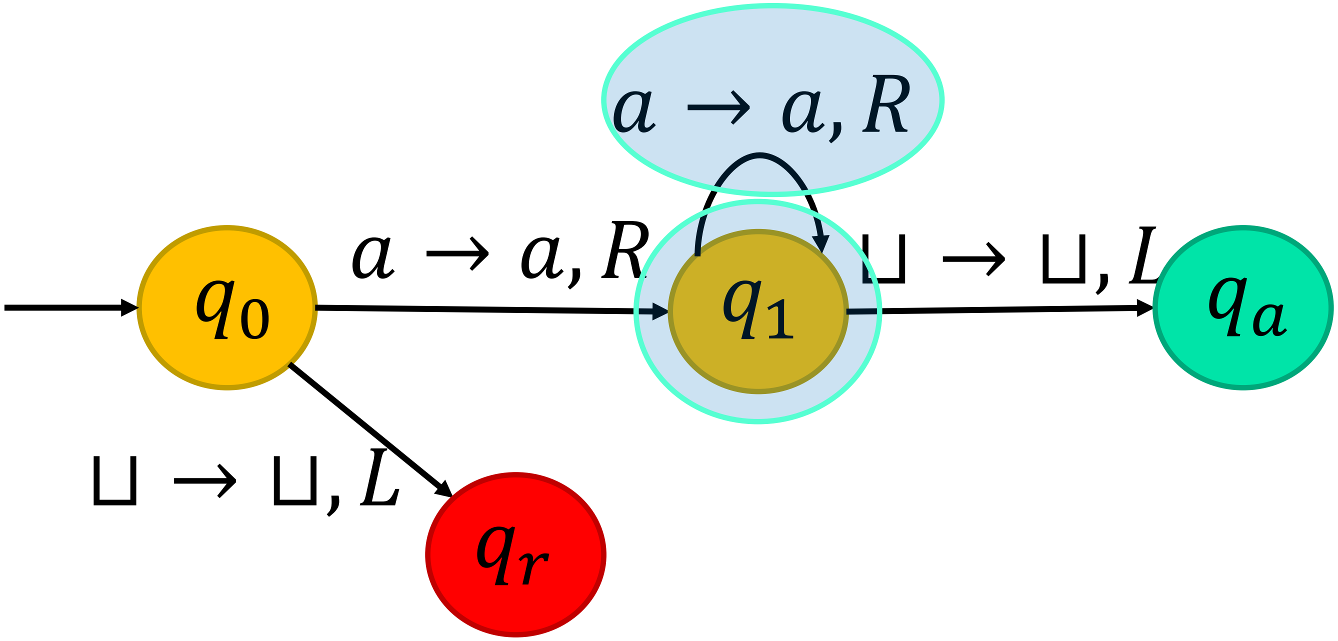


$a \rightarrow a, R$
$a \rightarrow a, R$
$\sqcup \rightarrow \sqcup, L$
$\sqcup \rightarrow \sqcup, L$
q_0
q_1
q_a
q_r

Χρόνος 3

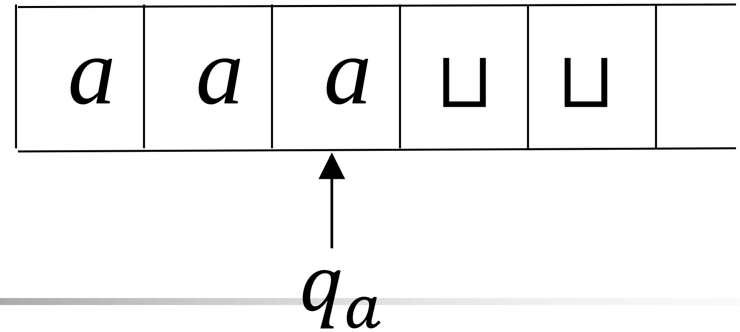


a a a $\sqcup$ $\sqcup$
q_1

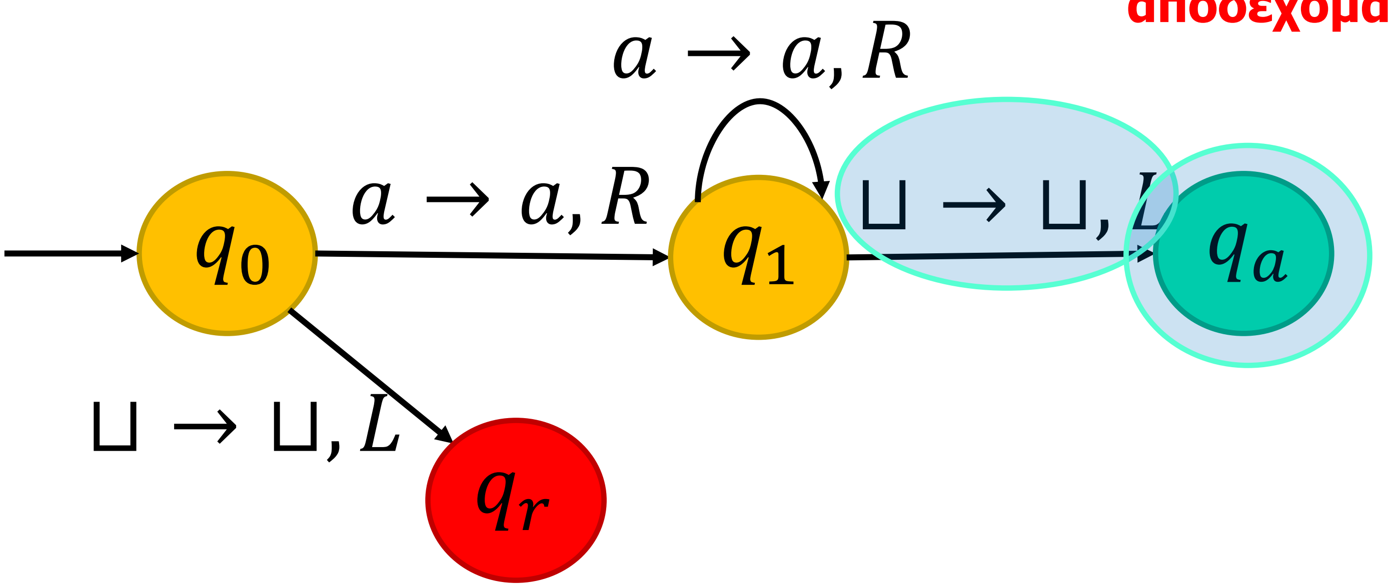


$a \rightarrow a, R$
$a \rightarrow a, R$
$\sqcup \rightarrow \sqcup, L$
$\sqcup \rightarrow \sqcup, L$
q_0
q_1
q_a
q_r

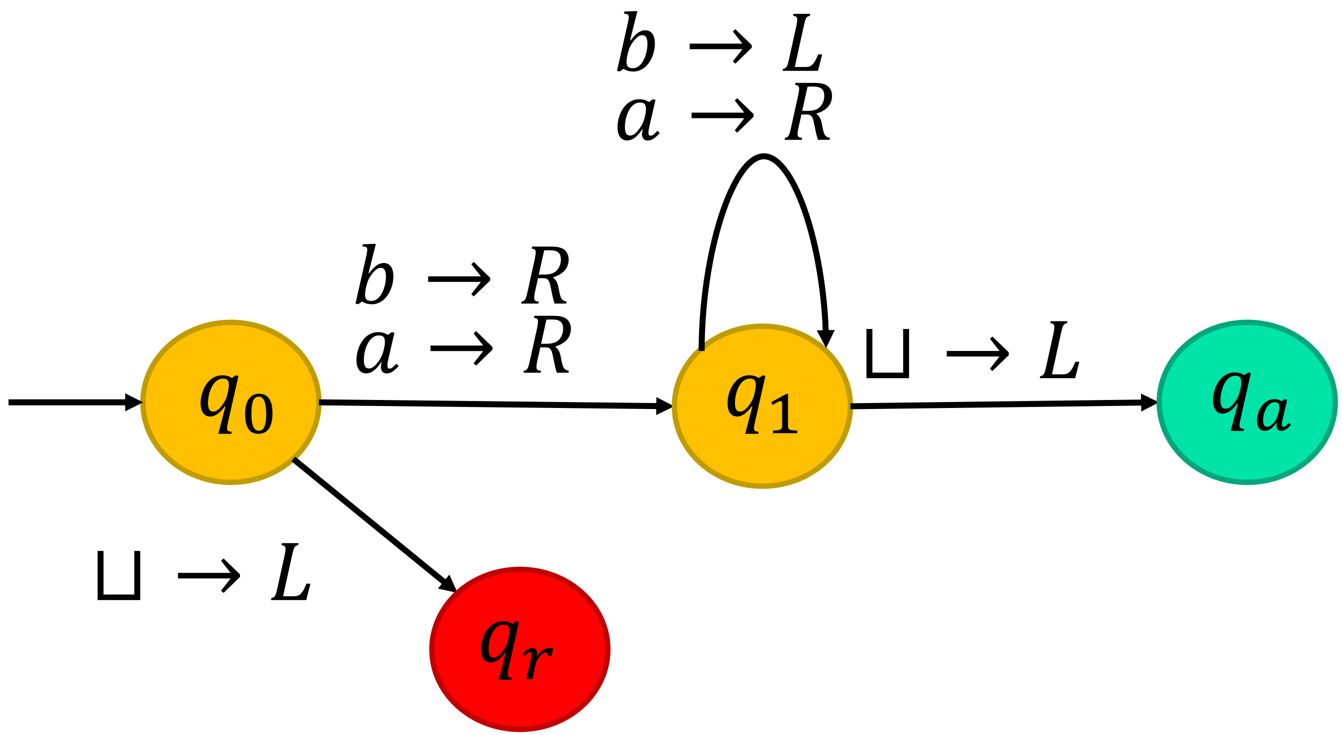
Χρόνος 4



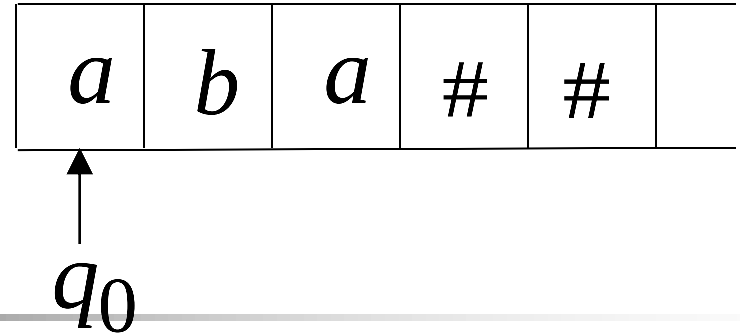
Τερματίζουμε και αποδεχόμαστε

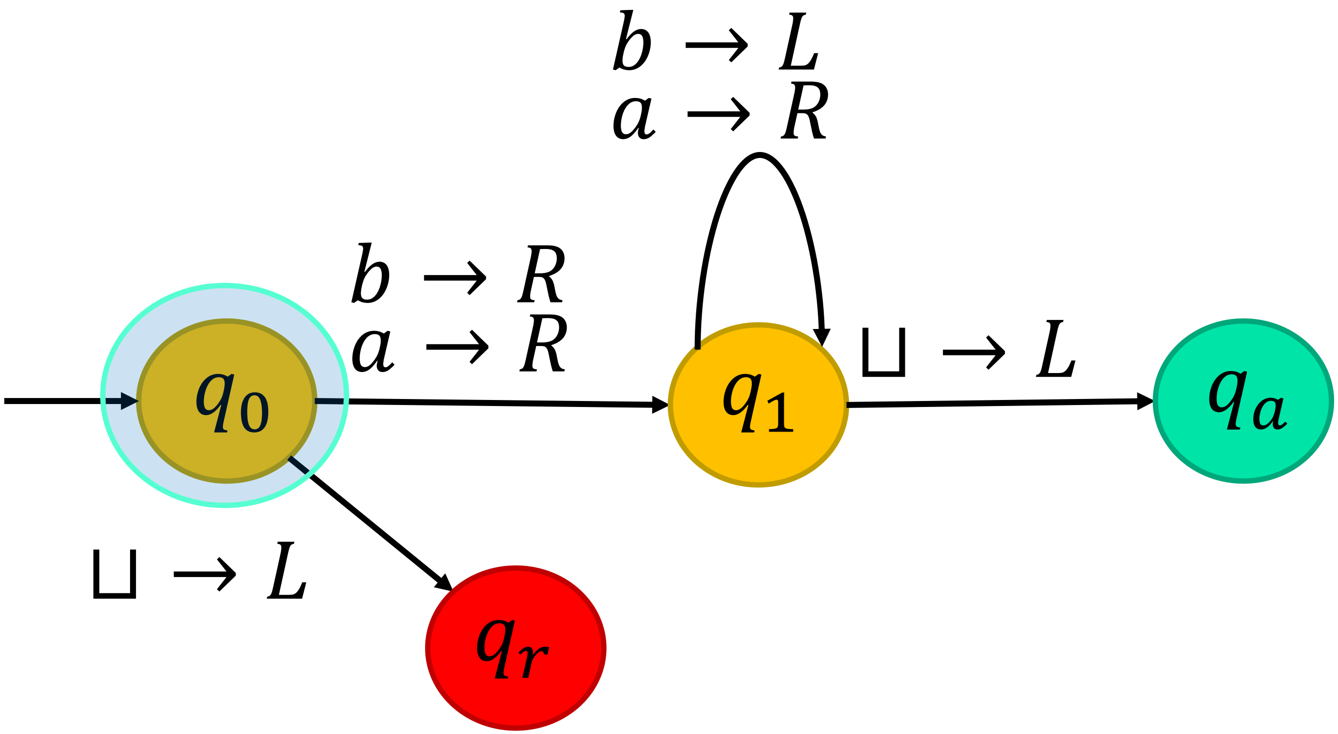


Μία <u>ΛΑΘΟΣ</u> TM για τη γλώσσα $aa^*+b(a+b)^*$

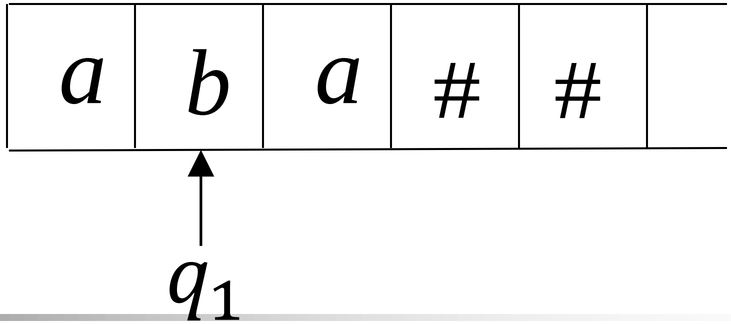


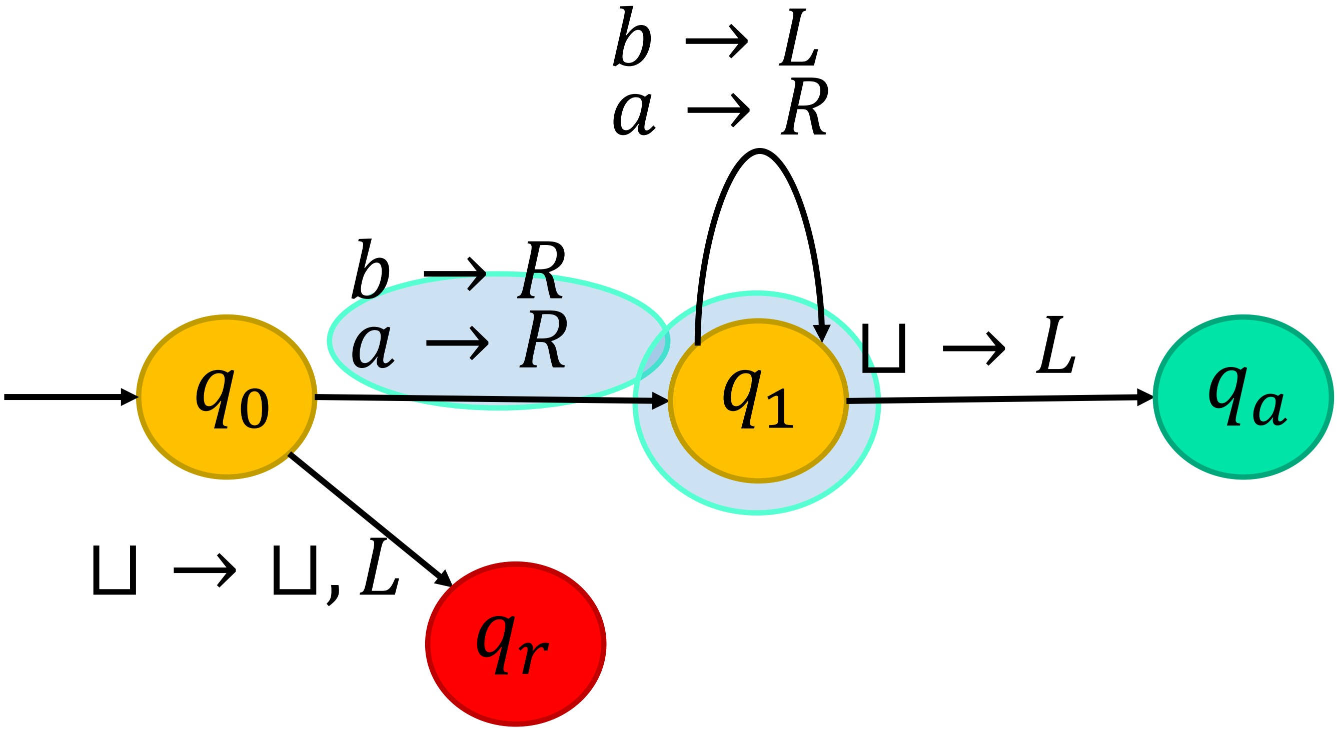
Χρόνος 0


a
b
a
#
#
q_0

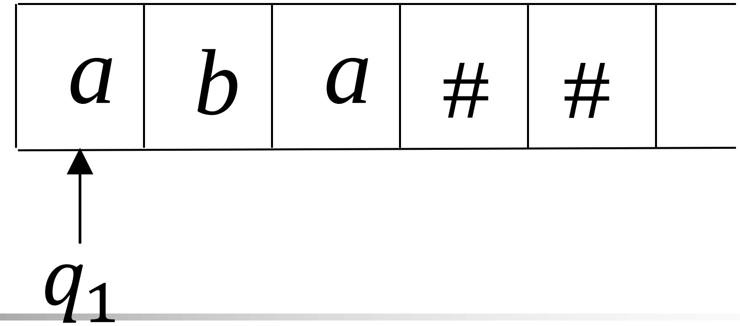

$b \rightarrow L$
$a \rightarrow R$
$b \rightarrow R$
$a \rightarrow R$
$\sqcup \rightarrow L$
$\sqcup \rightarrow L$
q_0
q_1
q_a
q_r

Χρόνος 1

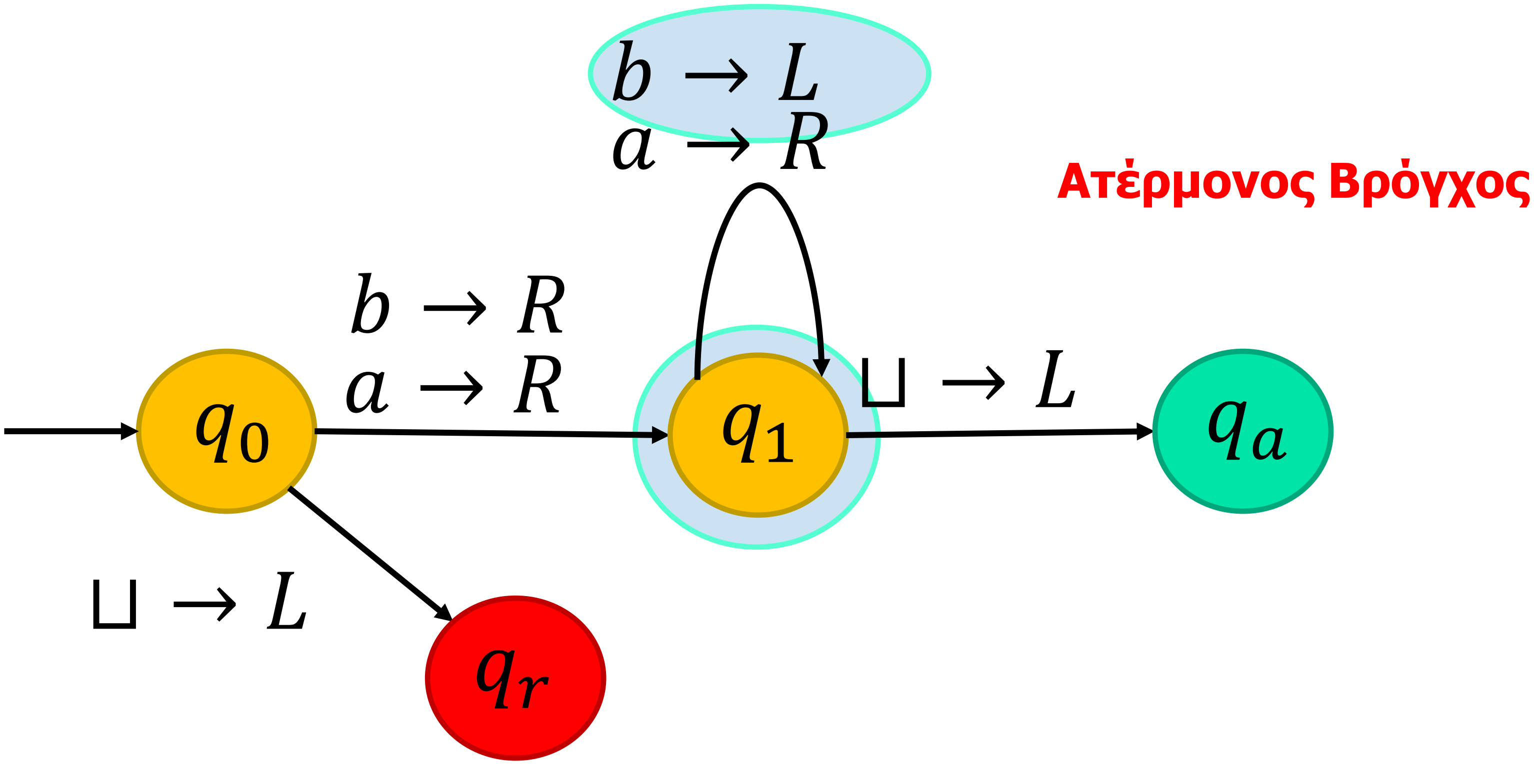

a
b
a
#
#
q_1


$b \to L$
$a \to R$
$b \to R$
$a \to R$
$\sqcup \to L$
$\sqcup \to \sqcup, L$
q_0
q_1
q_a
q_r

Χρόνος 2



a
b
a
$\#$
$\#$
q_1



$b \rightarrow L$
$a \rightarrow R$
Ατέρμονος Βρόγχος
$b \rightarrow R$
$a \rightarrow R$
$\sqcup \rightarrow L$
q_0
q_1
q_a
$\sqcup \rightarrow L$
q_r

Παράδειγμα στον Πίνακα

Έστω ότι μας δίνονται στην είσοδο δύο δυαδικοί αριθμοί ίσου μήκους $x, y \in \{0,1\}^* - \varepsilon$ (MSB προς LSB) που διαχωρίζονται από το σύμβολο ‘<‘ και η είσοδος ξεκινά με το ειδικό σύμβολο ‘#’. Να κάνετε τα εξής:

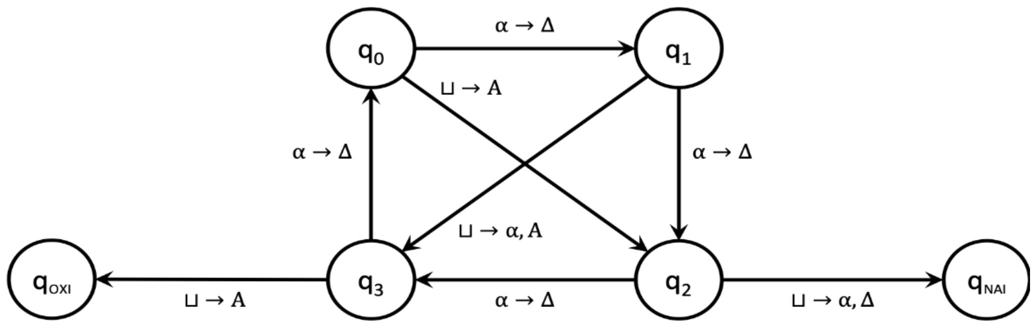
1. Να σχεδιάσετε μία TM που να ελέγχει αν η είσοδος έχει τη σωστή μορφή.
2. Να σχεδιάσετε μία TM που να αποδέχεται αν πράγματι $x < y$, αλλιώς να απορρίπτει.

Πριν πάμε στον πίνακα ☺

Περιγράψτε τον αλγόριθμο σε φυσική γλώσσα

Ουπς… Εννοούσα
την TM

Θέμα Ιουνίου 2020 (3 μονάδες)



(α1) Εκτελέστε την TM με είσοδο αααα. Επιλέξτε ένα από τα παρακάτω σχετικά με τη λειτουργία της TM:

Α. Η TM αποδέχεται **Β.** Η TM απορρίπτει **Γ.** Η TM εγκλωβίζεται

(α2) Είναι η TM διαγνώστης;

Α. Ναι, η TM είναι διαγνώστης

Β. Όχι, δεν είναι διαγνώστης γιατί με είσοδο τη συμβολοσειρά α εγκλωβίζεται

Γ. Όχι, δεν είναι διαγνώστης γιατί με είσοδο τη συμβολοσειρά αααα εγκλωβίζεται

(α3) Ποια είναι η γλώσσα της TM;

Α. ε + αα(αααα)*

Β. αα(αααα)*

Γ. (αααα)*(ε + αα + ααα)

Δ. αα(ααα)*

Ε. (ααα)*(αα + α)

Παράδειγμα

Μία TM που διαγιγνώσκει την εξής γλώσσα:

$$\{a^i b^j c^k \mid i \times j = k \text{ όπου } i, j, k \geq 1\}$$

1. Διατρέχουμε από αριστερά στα δεξιά για έλεγχο αν η είσοδος είναι της μορφής a*b*c*
2. Επιστροφή στην αρχή της ταινίας
3. Διαγράφουμε ένα a και διατρέχουμε προς τα δεξιά μέχρι να βρούμε ένα b. Παλινδρομούμε μεταξύ b και c, διαγράφοντας από ένα κάθε φορά μέχρι να εξαντληθούν όλα τα b. Εάν εξαντληθούν τα c ενώ απομένουν b τότε απορρίπτουμε.
4. Αποκαθιστούμε τα διαγραμμένα b και επαναλαμβάνουμε το βήμα 3 για το πρώτο από τα a που δεν έχουν διαγραφεί. Εάν έχουν διαγραφεί όλα τα a ελέγχουμε αν έχουν επίσης διαγραφεί όλα τα c. Αν ναι αποδεχόμαστε, αλλιώς απορρίπτουμε.

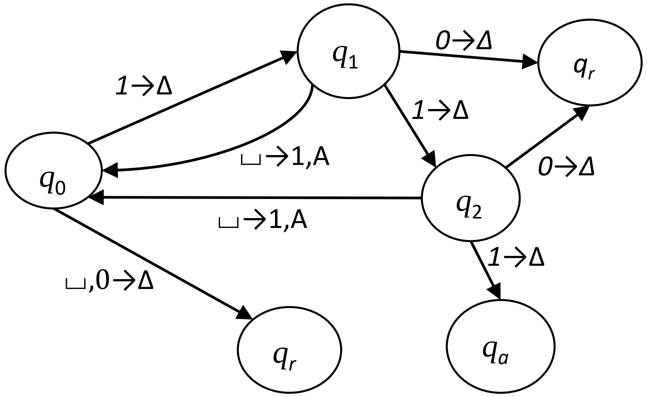
Πως Βρίσκουμε την αριστερή άκρη της ταινίας;

1.Ειδικό σύμβολο στην αρχή

2.Ειδικό σύμβολο κάθε φορά μέχρι να μείνουμε στην ίδια θέση

Θέμα Ιανουάριος '23 (2 μονάδες)

Έστω η αιτιοκρατική TM M όπου $\Sigma = \{0,1\}$ και $\Gamma = \{0,1,\sqcup\}$ με την διπλανή συνάρτηση μετάβασης. Έστω ότι η αρχική κατάσταση είναι η q_0, η κατάσταση απόρριψης είναι η q_r και η κατάσταση αποδοχής είναι η q_α. Είναι η M διαγνώστης; Ποια είναι η γλώσσα που αναγνωρίζει η M; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (A: Αριστερά, Δ: Δεξιά)



Κάποιες Ερωτήσεις

- Είναι δυνατό μία TM να γράψει «κενό»; NAI
- Είναι δυνατό το αλφάβητο ταινίας Γ να συμπίπτει με το αλφάβητο εισόδου Σ; OXI
- Είναι ποτέ δυνατό σε δύο διαδοχικές διαμορφώσεις η κεφαλή να μείνει στο ίδιο σημείο; NAI
- Είναι δυνατό μία TM να έχει μόνο μία κατάσταση; OXI