

1. (30) (A) (8) Αποδείξτε ότι αν ένα πρόβλημα  $A$  είναι NP-πλήρες τότε και το  $coA$  (συμπλήρωμα του  $A$ ) είναι coNP-πλήρες.

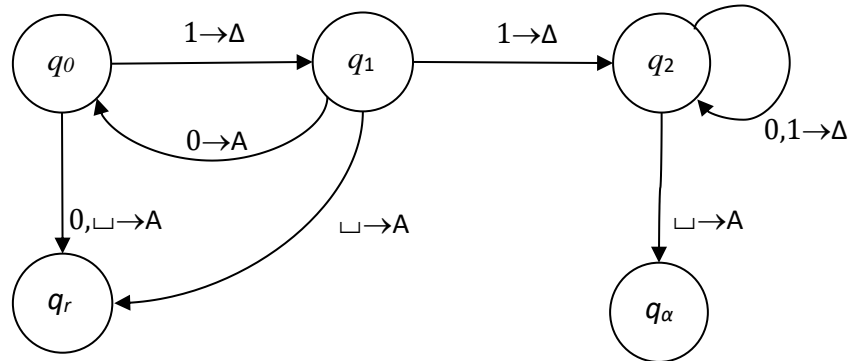
(B) (22) Ο Κωστίκας είναι ένας διάσημος διαρρήκτης και έβαλε στοίχημα με το φίλο του Γιωρίκα, που είναι ιδιοκτήτης κοσμηματοπωλείου, ότι μπορεί να κλέψει κοσμήματα συνολικής αξίας τουλάχιστον  $X$  (αλλιώς δεν θα είχε νόημα να κάνει τη διάρρηξη), σε μία τσάντα που χωρά κοσμήματα βάρους το πολύ  $W$  (αλλιώς θα σκιστεί η τσάντα και δεν θα μπορεί να τα κουβαλήσει) μέσα σε το πολύ χρόνο  $T$  (διαφορετικά η αστυνομία θα τον πιάσει). Ο Γιωρίκας, λίγο πριν ξεκινήσει η διάρρηξη, δίνει τις εξής πληροφορίες στον Κωστίκα: για κάθε κόσμημα  $i$  από τα  $N$  κοσμήματα συνολικά, του δίνει την τιμή του  $x_i$  καθώς και το βάρος του  $w_i$ . Επιπλέον, τον ενημερώνει ότι κάθε κόσμημα  $i$  είναι μέσα σε κλειδωμένη διάφανη θήκη που απαιτεί χρόνο  $t_i$  για να ξεκλειδώσει. Επομένως, ο Κωστίκας είναι αντιμέτωπος με το εξής πρόβλημα απόφασης που το ονομάζουμε ΔΙΑΡΡΗΞΗ. Υπάρχει υποσύνολο  $s \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$  κοσμημάτων έτσι ώστε: η συνολική τους τιμή να είναι  $\geq X$ , το συνολικό τους βάρος να είναι  $\leq B$  και ο συνολικός χρόνος ξεκλειδώματος να είναι  $\leq T$  (άθροισμα τιμών, βαρών και χρόνων αντίστοιχα).

1) (15) Να αποδείξετε ότι το πρόβλημα ΔΙΑΡΡΗΞΗ είναι NP-πλήρες και άρα ο Κωστίκας μάλλον θα δυσκολευτεί να επιλέξει τα κατάλληλα κοσμήματα που να ικανοποιούν τους περιορισμούς.

2) (7) Ο Γιωρίκας ισχυρίζεται ότι αποκλείεται ο Κωστίκας να βρει σύνολο κοσμημάτων που να ικανοποιεί ταυτόχρονα όλους τους περιορισμούς (για συγκεκριμένες τιμές, βάρη και χρόνους). Να εξηγήσετε γιατί είναι υπολογιστικά ανέφικτο γενικά για τον Γιωρίκα να αποδείξει τον ισχυρισμό του στον Κωστίκα δεδομένου ότι  $NP \neq coNP$ .

2. (20) Έστω η αιτιοκρατική ΤΜ  $M$  όπου  $\Sigma = \{0, 1\}$  και  $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$  με τη διπλανή συνάρτηση μετάβασης.

Έστω ότι η αρχική κατάσταση είναι η  $q_0$ , η κατάσταση απόρριψης είναι η  $q_r$  και η κατάσταση αποδοχής είναι η  $q_a$ . Είναι η  $M$  διαγνώσιμη; Ποια είναι η γλώσσα που αναγνωρίζει η  $M$ ; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.



3. (30) Έστω η εξής γλώσσα:  $X_{TM} = \{ \langle M \rangle : \eta M \text{ είναι TM και η λέξη } 001 \in L(M) \}$  για αλφάβητο εισόδου  $\Sigma = \{0, 1\}$ . Σας ζητούνται τα εξής:

1. (15) Να αποδείξετε με αλγοριθμική αναγωγή ότι η γλώσσα  $X_{TM}$  είναι μη-διαγνώσιμη. Για την αναγωγή χρησιμοποιήστε τη μη-διαγνώσιμη γλώσσα της αποδοχής  $A_{TM} = \{ \langle M, w \rangle : \eta M \text{ είναι TM } w \in L(M) \}$ .

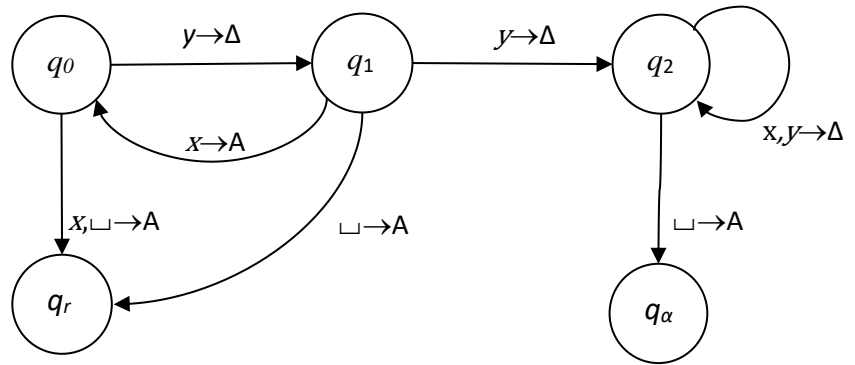
2. (15) Θέλουμε να δείξουμε με απεικονιστική αναγωγή ότι η γλώσσα  $X_{TM}$  είναι αναγνωρίσιμη. Χρησιμοποιήστε για την αναγωγή τη γλώσσα  $T_{TM} = \{ \langle M, w \rangle : \eta M \text{ είναι TM και τερματίζει σε είσοδο } w \}$  (η γλώσσα του τερματισμού) που γνωρίζουμε ότι είναι αναγνωρίσιμη.

4. (10) Να βάλετε σε σειρά από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη κλάση πολυπλοκότητας/υπολογισιμότητας (με την έννοια ότι η μεγαλύτερη κλάση εμπεριέχει πλήρως τη μικρότερη) τις παρακάτω κλάσεις δεδομένου ότι  $P \neq NP$ : Αναγνωρίσιμες Γλώσσες,  $co - P$ ,  $NTIME(n^5)$ ,  $NP$ ,  $TIME(n^n)$ ,  $TIME(n^2)$ , Διαγνώσιμες Γλώσσες, όπου  $n$  είναι το μέγεθος της εισόδου.

5. (20) Να αναφέρετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι Σωστές (Σ) ή Λάθος (Λ) χωρίς αιτιολόγηση. Εφαρμόζεται αρνητική βαθμολογία (Σωστό: +0.2, Λάθος: -0.2 – τυχόν αρνητική βαθμολογία μεταφέρεται στον τελικό βαθμό.)

- Η κλάση των αναγνωρίσιμων γλωσσών είναι κλειστή ως προς την πράξη της τομής συνόλων.
- Το γραμμικώς φραγμένο αυτόματο πάντα απαιτεί γραμμικό χρόνο για την αναγνώριση της εισόδου.
- Αν  $P \neq NP$ , η κλάση των NP-δυσχερών προβλημάτων εμπεριέχει την κλάση των NP-πλήρων προβλημάτων.
- Αν  $KNAPSACK \in P$  τότε και  $co-KNAPSACK \in P$ .
- Το σύνολο όλων των γλωσσών στο αλφάβητο  $\Sigma = \{0, 1\}$  είναι αριθμήσιμο.
- Υπάρχουν αριθμοί υπολογίσιμοι που δεν είναι περιγράψιμοι.
- Το σύνολο των διαγνώσιμων γλωσσών αποτελείται από την ένωση των αναγνωρίσιμων και των συμπληρωματικά αναγνωρίσιμων γλωσσών.
- Δεν γνωρίζουμε αν η κλάση NP είναι κλειστή ως προς την πράξη του συμπληρώματος.
- Αν  $A \leq_m B$  και η  $B$  είναι αναγνωρίσιμη τότε και η  $A$  είναι αναγνωρίσιμη
- Οι γλώσσες της κλάσης P έχουν πιστοποιητικό τόσο για το ΝΑΙ όσο και για το ΟΧΙ.

1. (20) Έστω η αιτιοκρατική ΤΜ  $M$  όπου  $\Sigma = \{x, y\}$  και  $\Gamma = \{x, y, \sqcup\}$  με τη διπλανή συνάρτηση μετάβασης. Έστω ότι η αρχική κατάσταση είναι η  $q_0$ , η κατάσταση απόρριψης είναι η  $q_r$  και η κατάσταση αποδοχής είναι η  $q_a$ . Είναι η  $M$  διαγνώσιμη; Ποια είναι η γλώσσα που αναγνωρίζει η  $M$ ; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.



2. (30) Έστω η εξής γλώσσα:  $X_{TM} = \{ \langle M \rangle : \eta M \text{ είναι TM και η λέξη } aab \in L(M) \}$  για αλφάβητο εισόδου  $\Sigma = \{a, b\}$ . Σας ζητούνται τα εξής:

1. (15) Να αποδείξετε με αλγοριθμική αναγωγή ότι η γλώσσα  $X_{TM}$  είναι μη-διαγνώσιμη. Για την αναγωγή χρησιμοποιήστε τη μη-διαγνώσιμη γλώσσα της αποδοχής  $A_{TM} = \{ \langle M, w \rangle : \eta M \text{ είναι TM } w \in L(M) \}$ .
2. (15) Θέλουμε να δείξουμε με απεικονιστική αναγωγή ότι η γλώσσα  $X_{TM}$  είναι αναγνωρίσιμη. Χρησιμοποιείστε για την αναγωγή τη γλώσσα  $T_{TM} = \{ \langle M, w \rangle : \eta M \text{ είναι TM και τερματίζει σε είσοδο } w \}$  (η γλώσσα του τερματισμού) που γνωρίζουμε ότι είναι αναγνωρίσιμη.

3. (10) Να βάλετε σε σειρά από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη κλάση πολυπλοκότητας/υπολογισιμότητας (με την έννοια ότι η μεγαλύτερη κλάση εμπεριέχει πλήρως τη μικρότερη) τις παρακάτω κλάσεις δεδομένου ότι  $P \neq NP$ : Αναγνωρίσιμες Γλώσσες,  $co - P, NTIME(n^7), NP, TIME(n^{2n}), TIME(n^3)$ , Διαγνώσιμες Γλώσσες, όπου  $n$  είναι το μέγεθος της εισόδου.

4. (20) Να αναφέρετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι Σωστές (Σ) ή Λάθος (Λ) χωρίς αιτιολόγηση. Εφαρμόζεται αρνητική βαθμολογία (Σωστό: +0.2, Λάθος: -0.2 – τυχόν αρνητική βαθμολογία μεταφέρεται στον τελικό βαθμό.)

- i. Το γραμμικώς φραγμένο αυτόματο πάντα απαιτεί γραμμικό χρόνο για την αναγνώριση της εισόδου.
- ii. Αν  $A \leq_m B$  και η  $B$  είναι αναγνωρίσιμη τότε και η  $A$  είναι αναγνωρίσιμη
- iii. Αν  $P \neq NP$ , η κλάση των NP-πλήρων προβλημάτων εμπεριέχει την κλάση των NP-δυσχερών προβλημάτων.
- iv. Το σύνολο όλων των γλωσσών στο αλφάβητο  $\Sigma = \{a, b\}$  είναι αριθμήσιμο.
- v. Όλοι οι υπολογίσιμοι αριθμοί είναι περιγράψιμοι.
- vi. Το σύνολο των διαγνώσιμων γλωσσών αποτελείται από την τομή των αναγνωρίσιμων και των συμπληρωματικά αναγνωρίσιμων γλωσσών.
- vii. Η κλάση των αναγνωρίσιμων γλωσσών είναι κλειστή ως προς την πράξη της ένωσης συνόλων.
- viii. Δεν γνωρίζουμε αν η κλάση  $coNP$  είναι κλειστή ως προς την πράξη του συμπληρώματος.
- ix. Οι γλώσσες της κλάσης NP έχουν πιστοποιητικό τόσο για το ΝΑΙ όσο και για το ΟΧΙ.
- x. Αν  $KNAPSACK \in P$  τότε και  $co-KNAPSACK \in P$ .

5. (30) (A) (8) Αποδείξτε ότι αν ένα πρόβλημα  $A$  είναι NP-πλήρες τότε και το  $coA$  (συμπλήρωμα του  $A$ ) είναι  $coNP$ -πλήρες.

(B) (22) Ο Κωστίκας είναι ένας διάσημος διαρρήκτης και έβαλε στοίχημα με το φίλο του Γιωρίκα, που είναι ιδιοκτήτης κοσμηματοπωλείου, ότι μπορεί να κλέψει κοσμήματα συνολικής αξίας τουλάχιστον  $X$  (αλλιώς δεν θα είχε νόημα να κάνει τη διάρρηξη), σε μία τσάντα που χωρά κοσμήματα βάρους το πολύ  $W$  (αλλιώς θα σκιστεί η τσάντα και δεν θα μπορεί να τα κουβαλήσει) μέσα σε το πολύ χρόνο  $T$  (διαφορετικά η αστυνομία θα τον πιάσει). Ο Γιωρίκας, λίγο πριν ξεκινήσει η διάρρηξη, δίνει τις εξής πληροφορίες στον Κωστίκα: για κάθε κόσμημα  $i$  από τα  $N$  κοσμήματα συνολικά, του δίνει την τιμή του  $x_i$  καθώς και το βάρος του  $w_i$ . Επιπλέον, τον ενημερώνει ότι κάθε κόσμημα  $i$  είναι μέσα σε κλειδωμένη διάφανη θήκη που απαιτεί χρόνο  $t_i$  για να ξεκλειδώσει. Επομένως, ο Κωστίκας είναι αντιμέτωπος με το εξής πρόβλημα απόφασης που το ονομάζουμε ΔΙΑΡΡΗΞΗ. Υπάρχει υποσύνολο  $s \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$  κοσμημάτων έτσι ώστε: η συνολική τους τιμή να είναι  $\geq X$ , το συνολικό τους βάρος να είναι  $\leq B$  και ο συνολικός χρόνος ξεκλειδώματος να είναι  $\leq T$  (άθροισμα τιμών, βαρών και χρόνων αντίστοιχα).

1) (15) Να αποδείξετε ότι το πρόβλημα ΔΙΑΡΡΗΞΗ είναι NP-πλήρες και άρα ο Κωστίκας μάλλον θα δυσκολευτεί να επιλέξει τα κατάλληλα κοσμήματα που να ικανοποιούν τους περιορισμούς.

2) (7) Ο Γιωρίκας ισχυρίζεται ότι αποκλείεται ο Κωστίκας να βρει σύνολο κοσμημάτων που να ικανοποιεί ταυτόχρονα όλους τους περιορισμούς (για συγκεκριμένες τιμές, βάρη και χρόνους). Να εξηγήσετε γιατί είναι υπολογιστικά ανέφικτο γενικά για τον Γιωρίκα να αποδείξει τον ισχυρισμό του στον Κωστίκα δεδομένου ότι  $NP \neq coNP$ .

## Ενδεικτικές Λύσεις (όμοια και για ομάδα Β)

**1(A) – 5(B).** (A) Αφού το  $A$  είναι NP-πλήρες τότε κάθε γλώσσα στο NP ανάγεται σε πολυωνυμικό χρόνο απεικονιστικά στο  $A$ . Άρα για κάθε  $X \in NP \rightarrow X \leq_p A$ . Επομένως, υπάρχει πολυωνυμική αναγωγή  $f$  που σημαίνει το εξής:

$$\forall X \in NP: w \in X \leftrightarrow f(w) \in A$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με

$$\forall X \in NP: w \notin X \leftrightarrow f(w) \notin A$$

το οποίο γράφεται ως:

$$\forall X \in NP: w \in coX \leftrightarrow f(w) \in coA$$

Όμως από τον ορισμό του coNP προκύπτει ότι το συμπλήρωμα κάθε γλώσσας στο NP ορίζει πλήρως την κλάση coNP. Άρα ο παραπάνω τύπος γράφεται ως εξής:

$$\forall X \in coNP: w \in X \leftrightarrow f(w) \in coA$$

Αυτό σημαίνει ότι όλες οι γλώσσες στην κλάση coNP ανάγονται σε πολυωνυμικό χρόνο στη γλώσσα coA που επίσης ανήκει στο coNP αφού η  $A$  ανήκει στο NP. Άρα, η γλώσσας coA είναι πλήρης για την κλάση coNP.

**(B)**

1) Καταρχάς το πρόβλημα ανήκει στη κλάση NP. Πράγματι, αν το πιστοποιητικό είναι μία πιθανή λύση (ένα υποσύνολο κοσμημάτων) μπορούμε σε πολυωνυμικό χρόνο να ελέγξουμε αν ισχύουν και οι τρεις περιορισμοί.

Θα κάνουμε αναγωγή με περιορισμό χρησιμοποιώντας το πρόβλημα KNAPSACK. Πράγματι το πρόβλημα KNAPSACK είναι μια ιδιαίτερη περίπτωση του προβλήματος ΔΙΑΡΡΗΞΗ. Έστω ένα στιγμιότυπο του KNAPSACK. Τότε, οι περιορισμοί του KNAPSACK που αφορούν το βάρος και τη συνολική αξία παραμένουν αναλλοίωτοι. Θέτουμε το χρόνο ξεκλειδώματος για κάθε κόσμημα  $i$  να είναι  $t_i = 1$  και το συνολικό χρόνο  $T = N$ . Η επιλογή αυτή γίνεται έτσι ώστε όποιο υποσύνολο και να επιλεγεί, ο χρονικός περιορισμός να ισχύει πάντα. Άρα, ένα αυθαίρετο στιγμιότυπο του KNAPSACK μπορεί να μετατραπεί σε ένα ιδιαίτερο στιγμιότυπο του προβλήματος ΔΙΑΡΡΗΞΗ. Αφού το KNAPSACK είναι NP-πλήρες πρόβλημα και το πρόβλημα ΔΙΑΡΡΗΞΗ θα είναι επίσης NP-πλήρες.

2) Το να αποδείξει ο Γιωρίκας ότι δεν υπάρχει λύση στο πρόβλημα για συγκεκριμένες τιμές είναι ισοδύναμο με το να αποδείξει ότι το συγκεκριμένο στιγμιότυπο ανήκει στο συμπλήρωμα του προβλήματος ΔΙΑΡΡΗΞΗ. Αφού το πρόβλημα ΔΙΑΡΡΗΞΗ είναι NP-πλήρες αυτό σημαίνει ότι το πρόβλημα co-ΔΙΑΡΡΗΞΗ είναι coNP-πλήρες. Δεν έχουμε κάποιο αποδοτικό πιστοποιητικό για να αποδεικνύουμε ένα ΟΧΙ-στιγμιότυπο σε μία NP-πλήρης γλώσσα. Άρα, ο Γιωρίκας δεν έχει τρόπο να αποδείξει αποδοτικά ότι ένα αυθαίρετο στιγμιότυπο του προβλήματος ΔΙΑΡΡΗΞΗ είναι στιγμιότυπο ΟΧΙ.

**2(A), 1(B).** Η TM  $M$  δεν είναι διαγνώστης. Αυτό γιατί σε είσοδο  $10$  εγκλωβίζεται μεταξύ των καταστάσεων  $q_0$  και  $q_1$ . Πράγματι με είσοδο  $10$ , μεταβαίνουμε στη διαμόρφωση  $1q_10$  και έπειτα εγκλωβιζόμαστε μεταξύ των διαμορφώσεων  $q_010$  και  $1q_10$ . Επίσης, με είσοδο την κενή λέξη ή όταν ξεκινά με  $0$  απορρίπτεται. Επίσης, απορρίπτεται αν έχουμε έναν άσσο στην αρχή και μετά τουλάχιστον  $2$  μηδέν ή κανένα μηδέν. Όταν η είσοδος έχει τουλάχιστον  $2$  άσσους στην αρχή τότε σε αυτή την περίπτωση αποδέχεται αφού φτάνει στην κατάσταση  $q_2$ . Άρα η γλώσσα της  $M$  είναι:  $L(M) = 11(1 + 0)^*$ .

Ομοίως για το θέμα (B) μόνο που όπου  $0$  έχουμε  $x$  και όπου  $1$   $y$ .

**3(A), 2(B).** α) Θα κάνουμε αναγωγή από την  $A_{TM}$  στην  $X_{TM}$ . Έστω ότι η  $X_{TM}$  είναι διαγνώσιμη και έστω ότι  $R$  είναι ο διαγνώστης της. Για είσοδο  $\langle M, w \rangle$  κατασκευάζουμε μία νέα μηχανή  $M'$ :

Η  $M'$  σε είσοδο  $\langle x \rangle$ :

1. Σβήνουμε την είσοδο  $x$  και αναγράφουμε την λέξη-σταθερά  $w$ .
2. Εξομοιώνουμε την  $M$  στο  $w$

Αν η  $M$  αποδέχεται το  $w$  τότε η γλώσσα της  $M'$  είναι το  $\Sigma^*$  και άρα ανήκει σε αυτή και η λέξη  $001$ . Αν η  $M$  δεν αποδέχεται το  $w$  τότε η γλώσσα της  $M'$  είναι το κενό σύνολο και άρα δεν ανήκει σε αυτή και λέξη  $001$ . Αν εφαρμόσουμε την  $R$  στην  $M'$  τότε αυτή θα αποδέχεται ή θα απορρίπτει ακριβώς όταν η  $M$  θα αποδέχεται ή θα απορρίπτει το  $w$ . Όμως το πρόβλημα της αποδοχής είναι μη διαγνώσιμο. Επομένως, έχουμε άτοπο και άρα ο διαγνώστης  $R$  δεν μπορεί να υπάρχει. Άρα η γλώσσα  $X_{TM}$  δεν είναι διαγνώσιμη.

β) Θα κάνουμε απεικονιστική αναγωγή από την  $X_{TM}$  στην  $T_{TM}$ . Αφού η  $T_{TM}$  είναι αναγνωρίσιμη το ίδιο θα ισχύει και για την  $X_{TM}$ . Άρα, θα πρέπει να σχεδιάσουμε μία υπολογίσιμη συνάρτηση  $f$  έτσι ώστε:

$$\langle M \rangle \in X_{TM} \Leftrightarrow \langle M', w \rangle \in T_{TM}$$

όπου  $\langle M', w \rangle = f(\langle M \rangle)$ . Η συνάρτηση  $f$  θέτει  $w = 001$  και η  $M'$  είναι ίδια με την  $M$  με τη διαφοροποίηση ότι όταν η συνάρτηση μετάβασης της  $M$  φτάνει σε απόρριψη τότε η  $M'$  εγκλωβίζεται. Η  $f$  είναι μία υπολογίσιμη συνάρτηση. Αποδεικνύουμε την παραπάνω ισοδυναμία:

Έστω ότι  $\langle M \rangle \in X_{TM}$ . Τότε,  $001 \in L(M)$  και άρα η TM  $M$  σε είσοδο τη λέξη  $001$  θα αποδεχθεί. Άρα, και η  $M'$  σε είσοδο  $001$  θα τερματίσει με αποδοχή αφού η μόνη αλλαγή σε σχέση με την  $M$  αφορά την κατάσταση απόρριψης. Άρα  $\langle M', 001 \rangle \in T_{TM}$ .

Έστω ότι  $\langle M \rangle \notin X_{TM}$  (αποδεικνύω το αντίθετο – και το αντίστροφο όμως βγαίνει με τον ίδιο τρόπο). Σε αυτή την περίπτωση η  $M$  είτε απορρίπτεται με είσοδο 001 ή εγκλωβίζεται. Στη πρώτη περίπτωση, αφού η  $M$  απορρίπτεται, η  $M'$  με είσοδο 001 θα εγκλωβίζεται. Αντίστοιχα, αν η  $M$  εγκλωβίζεται τότε και η  $M'$  εγκλωβίζεται αφού έχουμε πειράξει μόνο την κατάσταση απόρριψης της  $M$  για να φτιάξουμε την  $M'$ . Άρα,  $\langle M', 001 \rangle \notin T_{TM}$ .

Δεδομένης της παραπάνω απεικονιστικής αναγωγής και αφού η  $T_{TM}$  είναι αναγνωρίσιμη το ίδιο θα ισχύει και για την  $X_{TM}$ .

Ίδια λύση και για ομάδα (B) μόνο που όπου 0 έχουμε α και όπου 1 β.

**4. (A)**  $TIME(n^2) \leq co-P \leq NP \leq TIME(n^n) \leq$  Διαγνώσιμες Γλώσσες  $\leq$  Αναγνωρίσιμες Γλώσσες

*Λάθος στην εκφώνηση: Το  $NTIME(n^5)$  τέμνεται με το  $co-P$  και έχει γλώσσες που δεν περιέχονται στο  $co-P$  αλλά και αντίστροφα. Διορθώθηκε η βαθμολογία.*

**3. (B)**  $TIME(n^3) \leq co-P \leq NP \leq TIME(n^{2^n}) \leq$  Διαγνώσιμες Γλώσσες  $\leq$  Αναγνωρίσιμες Γλώσσες

*Λάθος στην εκφώνηση: Το  $NTIME(n^7)$  τέμνεται με το  $co-P$  και έχει γλώσσες που δεν περιέχονται στο  $co-P$  αλλά και αντίστροφα. Διορθώθηκε η βαθμολογία.*

**5(A).**

- i. Σ
- ii. Λ
- iii. Σ
- iv. Σ
- v. Λ
- vi. Λ
- vii. Λ
- viii. Σ
- ix. Σ
- x. Σ

**4(B).**

- i. Λ
- ii. Σ
- iii. Λ
- iv. Λ
- v. Σ
- vi. Σ
- vii. Σ
- viii. Σ
- ix. Λ
- x. Σ