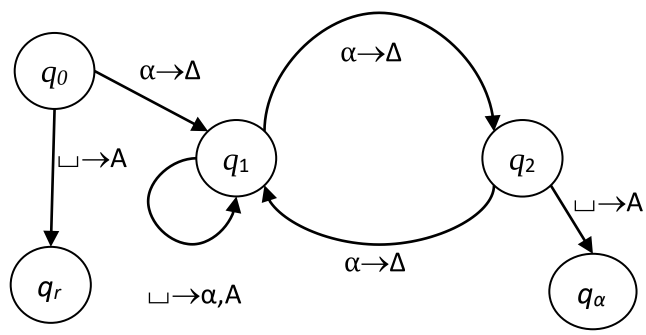
*ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «**ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ**» - 12/6/2023*

Διάρκεια Εξέτασης (2 ώρες και 40 λεπτά) – Ομάδα **A**

1. (20) Έστω η αιτιοκρατική ΤΜ M όπου $\Sigma = \{\alpha\}$ και $\Gamma = \{\alpha, \sqcup\}$ με τη διπλανή συνάρτηση μετάβασης. Έστω ότι η αρχική κατάσταση είναι η q_0, η κατάσταση απόρριψης είναι η q_r και η κατάσταση αποδοχής είναι η q_α. Είναι η M διαγνώστης; Ποια είναι η γλώσσα που αναγνωρίζει η M; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.



2. (30) (A) (10) Έστω οι εξής γλώσσες:

$$ΔΙΑΔΡΟΜΗ = \{\langle G, s, t\rangle : υπάρχει\ διαδρομή\ από\ τον\ κόμβο\ s\ στον\ κόμβο\ t\ στο\ ακατεύθυντο\ γράφημα\ G\}$$

$$ΚΛΙΚΑ = \{\langle G, k\rangle : το\ ακατεύθυντο\ γράφημα\ G\ έχει\ υπογράφημα\ που\ είναι\ κλίκα\ με\ k\ κόμβους\}$$

Χαρακτηρίστε ως αληθείς ή ψευδείς τις παρακάτω δηλώσεις και δώστε σύντομη αιτιολόγηση. Για τις απαντήσεις σας θεωρήστε ότι $P \neq NP$.

α. **(2)** Το πρόβλημα $ΔΙΑΔΡΟΜΗ$ ανήκει στην κλάση NP.

β. **(3)** Υπάρχει η απεικονιστική αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου $ΔΙΑΔΡΟΜΗ \leq_P ΚΛΙΚΑ$.

γ. **(5)** Υπάρχει η απεικονιστική αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου $ΚΛΙΚΑ \leq_P ΔΙΑΔΡΟΜΗ$.

Υπόδειξη: Στα (β,γ) δεν χρειάζεται να κάνετε την αναγωγή. Μπορείτε πιο εύκολα να επιχειρηματολογήσετε σχετικά.

(B) (20) Ορίζουμε το εξής πρόβλημα προσεγγιστικής κλίκας $ΠΚ$: Ένα γράφημα G έχει μία <u>r-προσεγγιστική κλίκα</u> με k κόμβους αν το γράφημα G έχει ένα υπογράφημα h με k κόμβους έτσι ώστε με την πρόσθεση ακριβώς r κατάλληλων ακμών στο h αυτό να γίνεται κλίκα. Επομένως, ορίζουμε:

$$ΠΚ = \{\langle G, k, r\rangle : το\ ακατεύθυντο\ γράφημα\ G\ \ έχει\ μία\ r - προσεγγιστική\ κλίκα\ με\ k\ κόμβους\}$$

Να αποδείξετε ότι το πρόβλημα $ΠΚ$ είναι NP-πλήρες.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε (χωρίς να είναι δεσμευτικό) αναγωγή με περιορισμό από το κατάλληλο πρόβλημα.

3. (40) Έστω η εξής γλώσσα: $E_{TM} = \{\langle M\rangle : η\ M\ είναι\ TM\ και\ \epsilon \in L(M)\}$, όπου ϵ η κενή λέξη και $L(M)$ είναι η γλώσσα της ΤΜ M. Σας ζητούνται τα εξής:

1. **(20)** Να αποδείξετε με αλγοριθμική αναγωγή ότι η γλώσσα E_{TM} είναι μη-διαγνώσιμη. Για την αναγωγή χρησιμοποιήστε τη μη-διαγνώσιμη γλώσσα της αποδοχής $A_{TM} = \{\langle M, w\rangle : η\ M\ είναι\ TM\ και\ w \in L(M)\}$.
2. **(20)** Θέλουμε να δείξουμε με απεικονιστική αναγωγή ότι η γλώσσα E_{TM} είναι αναγνωρίσιμη. Χρησιμοποιείστε για την αναγωγή τη γλώσσα $T_{TM} = \{\langle M, w\rangle : η\ M\ είναι\ TM\ και\ τερματίζει\ σε\ είσοδο\ w\}$ (η γλώσσα του τερματισμού) που γνωρίζουμε ότι είναι αναγνωρίσιμη.

4. (10) Να δώσετε όσες σχέσεις γνωρίζετε (αν περιέχονται ή είναι ίσες) των παρακάτω κλάσεων πολυπλοκότητας/υπολογισιμότητας δεδομένου ότι $P \neq NP$: $P, co-P, NP, co-NP, NPC, co-NPC$, Διαγνώσιμες Γλώσσες, Αναγνωρίσιμες Γλώσσες. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και σχήμα – το πρόθεμα *co* σημαίνει συμπλήρωμα της κλάσης ενώ NPC είναι η κλάση των NP-πλήρων προβλημάτων)

5. (20) Να αναφέρετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι Σωστές (Σ) ή Λάθος (Λ) χωρίς αιτιολόγηση. Εφαρμόζεται αρνητική βαθμολογία (Σωστό: +0.2, Λάθος: -0.2 – τυχόν αρνητική βαθμολογία μεταφέρεται στον τελικό βαθμό.)

i. Η κλάση των διαγνώσιμων γλωσσών είναι κλειστή ως προς την πράξη του συμπληρώματος.

ii. Το θεώρημα των Cook-Levin αναφέρει ότι οποιοσδήποτε αλγόριθμος μπορεί να αναπαρασταθεί από μία ΤΜ.

iii. Αν $A \leq_m B$ και η B είναι αναγνωρίσιμη τότε και η A είναι αναγνωρίσιμη

iv. Το αλφάβητο ταινίας Γ μίας ΤΜ δεν μπορεί να συμπίπτει με το αλφάβητο εισόδου Σ.

v. Αν 3SAT∈P τότε και co-3SAT∈P.

vi. Το σύνολο όλων των γλωσσών στο αλφάβητο Σ={0,1} είναι υπεραριθμήσιμο.

vii. Η κλάση των NP-δυσχερών προβλημάτων εμπεριέχει την κλάση NPC.

viii. Υπάρχουν περιγράψιμοι πραγματικοί αριθμοί που δεν είναι υπολογίσιμοι.

ix. Η κλάση NP φαίνεται ότι είναι κλειστή ως προς την πράξη του συμπληρώματος.

x. Τα γραμμικώς φραγμένα αυτόματα διαγιγνώσκουν ακριβώς τις ίδιες γλώσσες με τις ΤΜ.

Καλή Επιτυχία!!!

Ενδεικτικές Λύσεις Ομάδα Α:

1. Η ΤΜ Μ δεν είναι διαγνώστης. Αυτό γιατί σε είσοδο α και γενικά για περιττό πλήθος από α εγκλωβίζεται. Της, με είσοδο την κενή λέξη απορρίπτει. Όταν η είσοδος έχει άρτιο πλήθος από α τότε σε αυτή την περίπτωση αποδέχεται. Άρα η γλώσσα της M είναι: $L(M) = \alpha\alpha(\alpha\alpha)^*$.

2. (Α)
α. Αληθές, διότι το ΔΙΑΔΡΟΜΗ ανήκει στο P και άρα ανήκει και στο NP.
β. Αληθές, διότι το ΚΛΙΚΑ είναι NP-πλήρες.
γ. Ψευδές, διότι τότε θα ίσχυε P=NP.

(Β) Πρώτα θα δείξουμε ότι το πρόβλημα ανήκει στην κλάση NP. Θα φτιάξουμε έναν πολυωνυμικό επαληθευτή για τη γλώσσα ΠK. Το πιστοποιητικό c θα είναι μια τέτοια προσεγγιστική κλίκα. Πράγματι, αυτή ως υπογράφημα του G έχει πολυωνυμικό μέγεθος. Ο επαληθευτής είναι ο εξής:
V: $\langle G, k, r, c\rangle$

1. Έλεγξε ότι το c είναι πράγματι μία r-προσεγγιστική κλίκα ως εξής:
    a. Έλεγξε ότι το c έχει k κόμβους.
    b. Έλεγξε ότι το c είναι υπογράφημα του G
    c. Έλεγξε ότι με την προσθήκη ακριβώς r ακμών το c γίνεται κλίκα.
    d. Αν όλα τα παραπάνω είναι ΟΚ τότε ΑΠΟΔΟΧΗ, αλλιώς ΑΠΟΡΡΙΨΗ

Ο επαληθευτής V εκτελείται σε αιτιοκρατικό πολυωνυμικό χρόνο και άρα η γλώσσα $\Pi K \in NP$.
Θα χρησιμοποιήσουμε αναγωγή με περιορισμό στο πρόβλημα της κλίκας. Πράγματι ένα αυθαίρετο στιγμιότυπο του προβλήματος της κλίκας της φαίνεται και στο ερώτημα 1, αποτελεί στιγμιότυπο του προβλήματος ΠK αν θέσουμε $r = 0$. Πράγματι, το $\langle G, k, 0\rangle$ βρίσκει ένα υπογράφημα του G με k κόμβους έτσι ώστε χωρίς να προσθέσουμε καμία ακμή αυτό να είναι ήδη κλίκα. Άρα, το πρόβλημα ΚΛΙΚΑ είναι περιορισμός του ΠK.
Επομένως, το ΠK είναι NP-πλήρες αφού η ΚΛΙΚΑ είναι NP-πλήρες.

3.
Α) Θα κάνουμε αναγωγή από την A_{TM} στην E_{TM}. Έστω ότι η E_{TM} είναι διαγνώσιμη και έστω ότι R είναι ο διαγνώστης της. Για είσοδο $\langle M, w\rangle$ κατασκευάζουμε μία νέα μηχανή M':
Η M' σε είσοδο $\langle x\rangle$:

1. Σβήνουμε την είσοδο x και αναγράφουμε την λέξη-σταθερά w.
2. Εξομοιώνουμε την M στο w

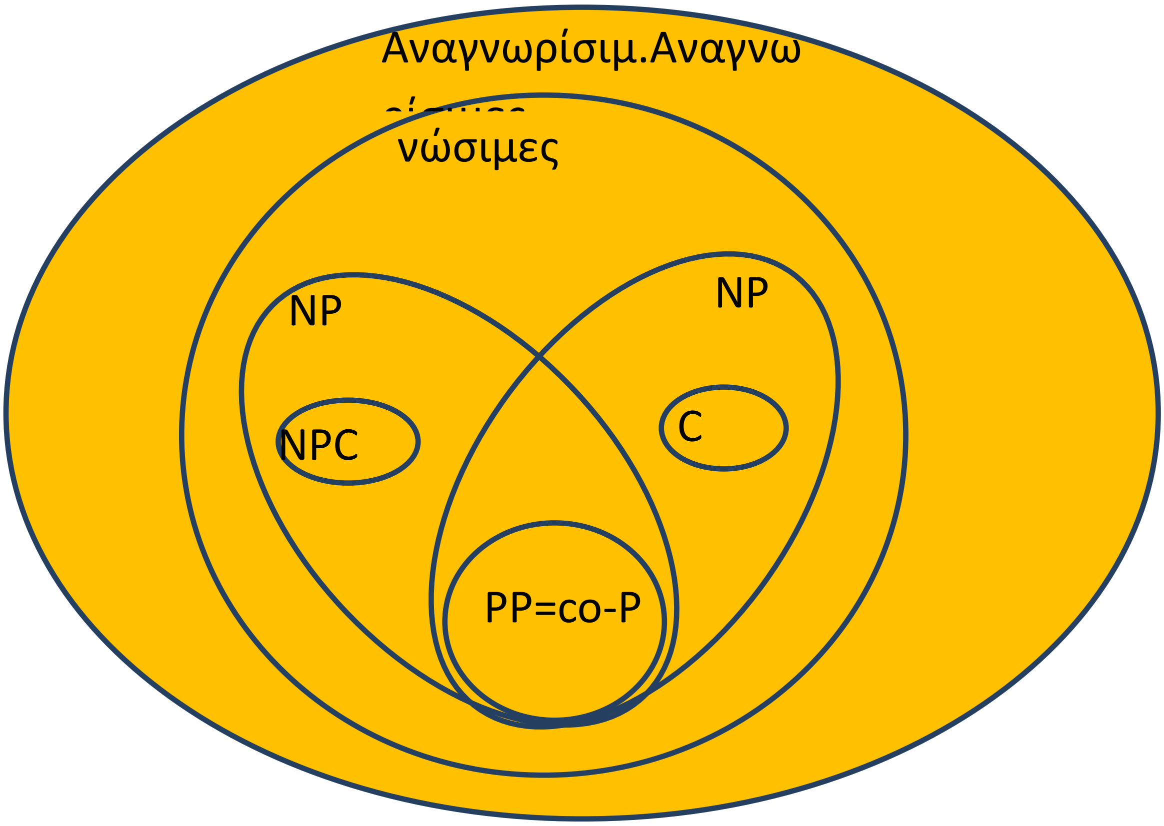
Αν η M αποδέχεται το w τότε η γλώσσα της M' είναι το Σ^* και άρα ανήκει σε αυτή και η κενή λέξη ϵ. Αν η M δεν αποδέχεται το w τότε η γλώσσα της M' είναι το κενό σύνολο και άρα δεν ανήκει σε αυτή και η κενή λέξη ϵ. Αν εφαρμόσουμε την R στην M' τότε αυτή θα αποδέχεται ή θα απορρίπτει ακριβώς όταν η M θα αποδέχεται ή θα απορρίπτει το w. Της το πρόβλημα της αποδοχής είναι μη διαγνώσιμο. Επομένως, έχουμε άτοπο και άρα ο διαγνωστής R δεν μπορεί να υπάρχει. Άρα η γλώσσα E_{TM} δεν είναι διαγνώσιμη.

Β) Θα κάνουμε απεικονιστική αναγωγή από την E_{TM} στην T_{TM}. Αφού η T_{TM} είναι αναγνωρίσιμη το ίδιο θα ισχύει και για την E_{TM}. Άρα, θα πρέπει να σχεδιάσουμε μία υπολογίσιμη συνάρτηση f έτσι ώστε:

$$\langle M\rangle \in E_{TM} \Leftrightarrow \langle M', w\rangle \in T_{TM}$$

όπου $\langle M', w\rangle = f(\langle M\rangle)$. Η συνάρτηση f θέτει $w = \epsilon$ και η M' είναι ίδια με την M με τη διαφοροποίηση ότι όταν η συνάρτηση μετάβασης της M φτάνει σε απόρριψη τότε η M' εγκλωβίζεται. Η f είναι μία υπολογίσιμη συνάρτηση. Αποδεικνύουμε την παραπάνω ισοδυναμία:
Έστω ότι $\langle M\rangle \in E_{TM}$. Τότε, $\epsilon \in L(M)$ και άρα η ΤΜ M σε είσοδο την κενή λέξη ϵ θα αποδεχθεί. Άρα, και η M' σε είσοδο ϵ θα τερματίσει με αποδοχή αφού η μόνη αλλαγή σε σχέση με την M αφορά την κατάσταση απόρριψης. Άρα $\langle M', \epsilon\rangle \in T_{TM}$.
Έστω ότι $\langle M\rangle \notin E_{TM}$ (αποδεικνύω το αντίθετο – και το αντίστροφο της βγαίνει με τον ίδιο τρόπο). Σε αυτή την περίπτωση η M είτε απορρίπτει με είσοδο τη κενή λέξη ή εγκλωβίζεται. Στη πρώτη περίπτωση, αφού η M απορρίπτει, η M' με είσοδο ϵ θα εγκλωβίζεται. Αντίστοιχα, αν η M εγκλωβίζεται τότε και η M' εγκλωβίζεται αφού έχουμε πειράξει μόνο την κατάσταση απόρριψης της M για να φτιάξουμε την M'. Άρα, $\langle M', \epsilon\rangle \notin T_{TM}$.
Δεδομένης της παραπάνω απεικονιστικής αναγωγής και αφού η T_{TM} είναι αναγνωρίσιμη το ίδιο θα ισχύει και για την E_{TM}.

4.



5.

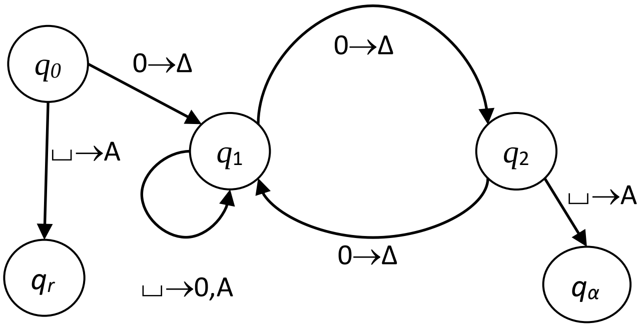
i.	**Σ**
ii.	**Λ**
iii.	**Σ**
iv.	**Σ**
v.	**Σ**
vi.	**Σ**
vii.	**Σ**
viii.	**Σ**
ix.	**Λ**
x.	**Λ**

*ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «**ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ**» - 12/6/2023*

Διάρκεια Εξέτασης (2 ώρες και 40 λεπτά) – Ομάδα **<u>Β</u>**

1. (10) Να δώσετε όσες σχέσεις γνωρίζετε (αν περιέχονται ή είναι ίσες) των παρακάτω κλάσεων πολυπλοκότητας/υπολογισιμότητας δεδομένου ότι $P \neq NP$: $P, co-P, NP, co-NP\ , NPC, co-NPC$, $\text{Διαγνώσιμες Γλώσσες}, \text{Συμπληρωματικά Αναγνωρίσιμες Γλώσσες}$. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και σχήμα – το πρόθεμα co σημαίνει συμπλήρωμα της κλάσης ενώ NPC είναι η κλάση των NP-πλήρων προβλημάτων)

2. (20) Έστω η αιτιοκρατική TM M όπου $\Sigma = \{0\}$ και $\Gamma = \{0, \sqcup\}$ με τη διπλανή συνάρτηση μετάβασης. Έστω ότι η αρχική κατάσταση είναι η q_0,η κατάσταση απόρριψης είναι η q_r και η κατάσταση αποδοχής είναι η q_α. Είναι η M διαγνώστης; Ποια είναι η γλώσσα που αναγνωρίζει η M; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.



3. (20) Να αναφέρετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι Σωστές (Σ) ή Λάθος (Λ) χωρίς αιτιολόγηση. Εφαρμόζεται αρνητική βαθμολογία (Σωστό: +0.2, Λάθος: -0.2 – τυχόν αρνητική βαθμολογία μεταφέρεται στον τελικό βαθμό.)

i. Η κλάση των διαγνώσιμων γλωσσών δεν είναι κλειστή ως προς την πράξη της ένωσης.
ii. Το αλφάβητο ταινίας Γ μίας TM μπορεί να συμπίπτει με το αλφάβητο εισόδου Σ.
iii. Αν ΚΛΙΚΑ∈P τότε και co-ΚΛΙΚΑ∈P.
iv. Το σύνολο όλων των γλωσσών στο αλφάβητο Σ={0,1} είναι αριθμήσιμο.
v. Η κλάση των NP-δυσχερών προβλημάτων δεν εμπεριέχει την κλάση NPC.
vi. Όλοι οι περιγράψιμοι πραγματικοί αριθμοί είναι υπολογίσιμοι.
vii. Η κλάση NP φαίνεται ότι δεν είναι κλειστή ως προς την πράξη του συμπληρώματος.
viii. Τα γραμμικώς φραγμένα αυτόματα διαγιγνώσκουν περισσότερες γλώσσες από ότι οι TM.
ix. Αν $A \leq_m B$ και η B είναι αναγνωρίσιμη τότε και η A είναι αναγνωρίσιμη
x. Το θεώρημα των Cook-Levin αναφέρει ότι οποιοσδήποτε αλγόριθμος μπορεί να αναπαρασταθεί από μία TM.

4. (30) (A) (10) Έστω οι εξής γλώσσες:

$$ΔΙΑΔΡΟΜΗ = \{\langle G, s, t\rangle : υπάρχει\ διαδρομή\ από\ τον\ κόμβο\ s\ στον\ κόμβο\ t\ στο\ ακατεύθυντο\ γράφημα\ G\}$$

$$ΑΣ = \{\langle G, k\rangle : το\ ακατεύθυντο\ γράφημα\ G\ έχει\ ανεξάρτητο\ σύνολο\ \ με\ k\ κόμβους\}$$

Χαρακτηρίστε ως αληθείς ή ψευδείς τις παρακάτω δηλώσεις και δώστε σύντομη αιτιολόγηση. Για τις απαντήσεις σας θεωρήστε ότι $P \neq NP$.

α. **(2)** Το πρόβλημα $ΔΙΑΔΡΟΜΗ$ ανήκει στην κλάση NP.

β. **(3)** Υπάρχει η απεικονιστική αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου $ΔΙΑΔΡΟΜΗ \leq_P ΑΣ$.

γ. **(5)** Υπάρχει η απεικονιστική αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου $ΑΣ \leq_P ΔΙΑΔΡΟΜΗ$.

Υπόδειξη: Στα (β,γ) δεν χρειάζεται να κάνετε την αναγωγή. Μπορείτε πιο εύκολα να επιχειρηματολογήσετε σχετικά.

(Β) (20) Ορίζουμε το εξής πρόβλημα προσεγγιστικού ανεξάρτητου συνόλου $ΠΑΣ$: Ένα γράφημα G έχει ένα <u>r-προσεγγιστικό ανεξάρτητο σύνολο</u> με k κόμβους αν το γράφημα G έχει ένα υπογράφημα h με k κόμβους έτσι ώστε με την αφαίρεση ακριβώς r ακμών στο h αυτό να γίνεται ανεξάρτητο σύνολο. Επομένως, ορίζουμε:

$$ΠΑΣ = \{\langle G, k, r\rangle : το\ ακατεύθυντο\ γράφημα\ G\ \ έχει\ ένα\ r-προσεγγιστικό\ ανεξ.\ σύνολο\ με\ k\ κόμβους\}$$

Να αποδείξετε ότι το πρόβλημα $ΠΑΣ$ είναι NP-πλήρες.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε (χωρίς να είναι δεσμευτικό) αναγωγή με περιορισμό από το κατάλληλο πρόβλημα.

5. (40) Έστω η εξής γλώσσα: $Λ_{TM} = \{\langle M\rangle : η\ M\ είναι\ TM\ και\ \epsilon \in L(M)\}$, όπου ϵ η κενή λέξη και $L(M)$ είναι η γλώσσα της TM M. Σας ζητούνται τα εξής:

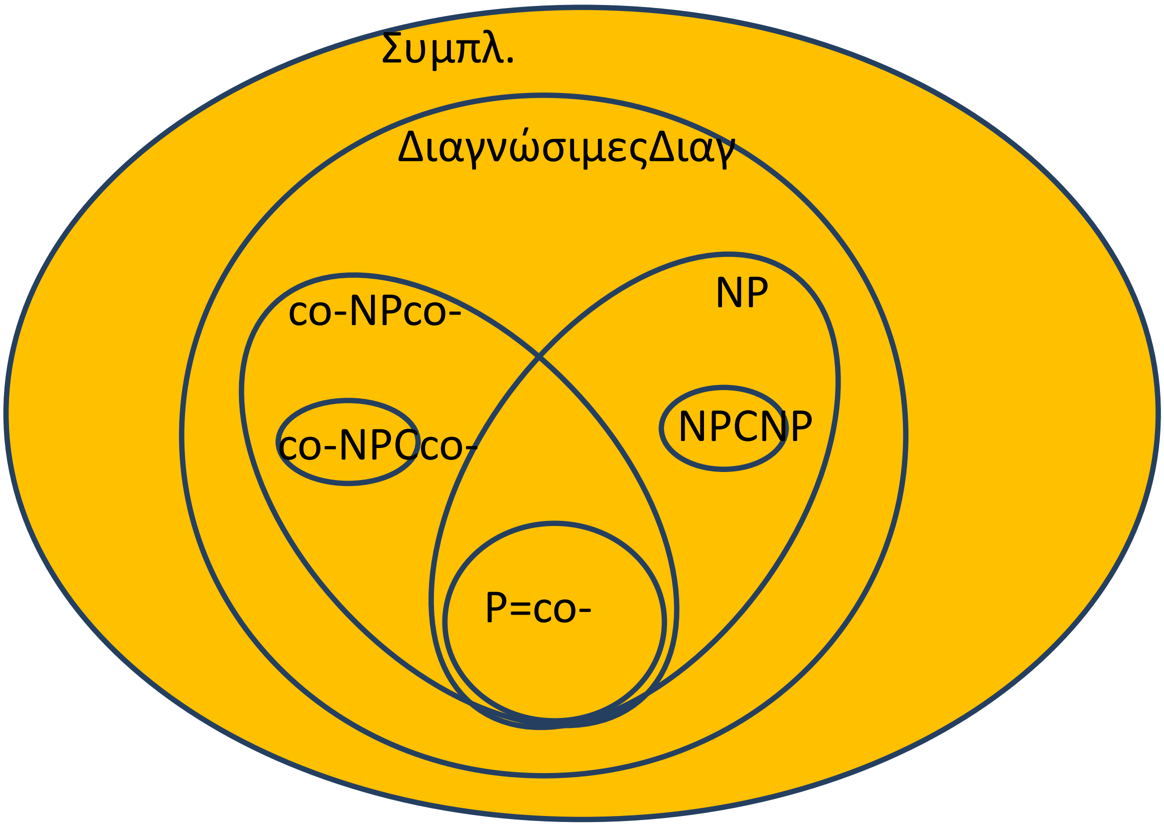
1. **(20)** Να αποδείξετε με αλγοριθμική αναγωγή ότι η γλώσσα $Λ_{TM}$ είναι μη-διαγνώσιμη. Για την αναγωγή χρησιμοποιήστε τη μη-διαγνώσιμη γλώσσα της αποδοχής $A_{TM} = \{\langle M, w\rangle : η\ M\ είναι\ TM\ και\ w \in L(M)\}$.

2. **(20)** Θέλουμε να δείξουμε με απεικονιστική αναγωγή ότι η γλώσσα $Λ_{TM}$ είναι αναγνωρίσιμη. Χρησιμοποιείστε για την αναγωγή τη γλώσσα $T_{TM} = \{\langle M, w\rangle : η\ M\ είναι\ TM\ και\ τερματίζει\ σε\ είσοδο\ w\}$ (η γλώσσα του τερματισμού) που γνωρίζουμε ότι είναι αναγνωρίσιμη.

Καλή Επιτυχία!!!

Ενδεικτικές Λύσεις Ομάδα Β:

1.



2. Η ΤΜ Μ δεν είναι διαγνώστης. Αυτό γιατί σε είσοδο α και γενικά για περιττό πλήθος από α εγκλωβίζεται. Της, με είσοδο την κενή λέξη απορρίπτει. Όταν η είσοδος έχει άρτιο πλήθος από α τότε σε αυτή την περίπτωση αποδέχεται. Άρα η γλώσσα της M είναι: $L(M) = 00(00)^*$.

3.

i. **Λ**
ii. **Λ**
iii. **Σ**
iv. **Λ**
v. **Λ**
vi. **Λ**
vii. **Σ**
viii. **Λ**
ix. **Σ**
x. **Λ**

4. (A)
α. Αληθές, διότι το ΔΙΑΔΡΟΜΗ ανήκει στο P και άρα ανήκει και στο NP.
β. Αληθές, διότι το ΑΣ είναι NP-πλήρες.
γ. Ψευδές, διότι τότε θα ίσχυε P=NP.

(B) Πρώτα θα δείξουμε ότι το πρόβλημα ανήκει στην κλάση NP. Θα φτιάξουμε έναν πολυωνυμικό επαληθευτή για τη γλώσσα $\Pi A\Sigma$. Το πιστοποιητικό c θα είναι ένα τέτοιο προσεγγιστικό ανεξάρτητο σύνολο. Πράγματι, αυτό ως υπογράφημα του G έχει πολυωνυμικό μέγεθος. Ο επαληθευτής είναι ο εξής:
V: $\langle G, k, r, c \rangle$

2. Έλεγξε ότι το c είναι πράγματι ένα r-προσεγγιστικό ανεξάρτητο σύνολο ως εξής:
    a. Έλεγξε ότι το c έχει k κόμβους.
    b. Έλεγξε ότι το c είναι υπογράφημα του G
    c. Έλεγξε ότι με την αφαίρεση ακριβώς r ακμών το c γίνεται ανεξάρτητο σύνολο.
    d. Αν όλα τα παραπάνω είναι ΟΚ τότε ΑΠΟΔΟΧΗ, αλλιώς ΑΠΟΡΡΙΨΗ

Ο επαληθευτής V εκτελείται σε αιτιοκρατικό πολυωνυμικό χρόνο και άρα η γλώσσα $\Pi A\Sigma \in NP$.

Θα χρησιμοποιήσουμε αναγωγή με περιορισμό στο πρόβλημα του ανεξάρτητου συνόλου. Πράγματι ένα αυθαίρετο στιγμιότυπο του προβλήματος του ανεξάρτητου συνόλου όπως φαίνεται και στο ερώτημα 1, αποτελεί στιγμιότυπο του προβλήματος $ΠΑΣ$ αν θέσουμε $r = 0$. Πράγματι, το $\langle G, k, 0\rangle$ βρίσκει ένα υπογράφημα του G με k κόμβους έτσι ώστε χωρίς να αφαιρέσουμε καμία ακμή αυτό να είναι ήδη ανεξάρτητο σύνολο. Άρα, το πρόβλημα ΑΣ είναι περιορισμός του $ΠΑΣ$.
Επομένως, το $ΠΑΣ$ είναι NP-πλήρες αφού το ΑΣ είναι NP-πλήρες.

5.
Α) Θα κάνουμε αναγωγή από την A_{TM} στην $Λ_{TM}$. Έστω ότι η $Λ_{TM}$ είναι διαγνώσιμη και έστω ότι R είναι ο διαγνώστης της. Για είσοδο $\langle M, w\rangle$ κατασκευάζουμε μία νέα μηχανή M':
Η M' σε είσοδο $\langle x\rangle$:

1. Σβήνουμε την είσοδο x και αναγράφουμε την λέξη-σταθερά w.
2. Εξομοιώνουμε την M στο w

Αν η M αποδέχεται το w τότε η γλώσσα της M' είναι το $Σ^*$ και άρα ανήκει σε αυτή και η κενή λέξη ϵ. Αν η M δεν αποδέχεται το w τότε η γλώσσα της M' είναι το κενό σύνολο και άρα δεν ανήκει σε αυτή και η κενή λέξη ϵ. Αν εφαρμόσουμε την R στην M' τότε αυτή θα αποδέχεται ή θα απορρίπτει ακριβώς όταν η M θα αποδέχεται ή θα απορρίπτει το w. Της το πρόβλημα της αποδοχής είναι μη διαγνώσιμο. Επομένως, έχουμε άτοπο και άρα ο διαγνωστής R δεν μπορεί να υπάρχει. Άρα η γλώσσα $Λ_{TM}$ δεν είναι διαγνώσιμη.

Β) Θα κάνουμε απεικονιστική αναγωγή από την $Λ_{TM}$ στην T_{TM}. Αφού η T_{TM} είναι αναγνωρίσιμη το ίδιο θα ισχύει και για την $Λ_{TM}$. Άρα, θα πρέπει να σχεδιάσουμε μία υπολογίσιμη συνάρτηση f έτσι ώστε:

$$\langle M\rangle \in Λ_{TM} \Leftrightarrow \langle M', w\rangle \in T_{TM}$$

όπου $\langle M', w\rangle = f(\langle M\rangle)$. Η συνάρτηση f θέτει $w = \epsilon$ και η M' είναι ίδια με την M με τη διαφοροποίηση ότι όταν η συνάρτηση μετάβασης της M φτάνει σε απόρριψη τότε η M' εγκλωβίζεται. Η f είναι μία υπολογίσιμη συνάρτηση. Αποδεικνύουμε την παραπάνω ισοδυναμία:
Έστω ότι $\langle M\rangle \in Λ_{TM}$. Τότε, $\epsilon \in L(M)$ και άρα η TM M σε είσοδο την κενή λέξη ϵ θα αποδεχθεί. Άρα, και η M' σε είσοδο ϵ θα τερματίσει με αποδοχή αφού η μόνη αλλαγή σε σχέση με την M αφορά την κατάσταση απόρριψης. Άρα $\langle M', \epsilon\rangle \in T_{TM}$.
Έστω ότι $\langle M\rangle \notin Λ_{TM}$ (αποδεικνύω το αντίθετο – και το αντίστροφο της βγαίνει με τον ίδιο τρόπο). Σε αυτή την περίπτωση η M είτε απορρίπτει με είσοδο τη κενή λέξη ή εγκλωβίζεται. Στη πρώτη περίπτωση, αφού η M απορρίπτει, η M' με είσοδο ϵ θα εγκλωβίζεται. Αντίστοιχα, αν η M εγκλωβίζεται τότε και η M' εγκλωβίζεται αφού έχουμε πειράξει μόνο την κατάσταση απόρριψης της M για να φτιάξουμε την M'. Άρα, $\langle M', \epsilon\rangle \notin T_{TM}$.
Δεδομένης της παραπάνω απεικονιστικής αναγωγής και αφού η T_{TM} είναι αναγνωρίσιμη το ίδιο θα ισχύει και για την $Λ_{TM}$.

*ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «**ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ**» - 12/6/2023*

Διάρκεια Εξέτασης (2 ώρες και 40 λεπτά) – Ομάδα **Γ**

1. (30) (Α) (10) Έστω οι εξής γλώσσες:

$$ΔΙΑΔΡΟΜΗ = \{\langle G, s, t\rangle : υπάρχει\ διαδρομή\ από\ τον\ κόμβο\ s\ στον\ κόμβο\ t\ στο\ ακατεύθυντο\ γράφημα\ G\}$$

$$ΚΛ = \{\langle G, k\rangle : το\ ακατεύθυντο\ γράφημα\ G\ έχει\ υπογράφημα\ που\ είναι\ κλίκα\ με\ k\ κόμβους\}$$

Χαρακτηρίστε ως αληθείς ή ψευδείς τις παρακάτω δηλώσεις και δώστε σύντομη αιτιολόγηση. Για τις απαντήσεις σας θεωρήστε ότι $P \neq NP$.

α. **(2)** Το πρόβλημα $ΔΙΑΔΡΟΜΗ$ ανήκει στην κλάση NP.

β. **(3)** Υπάρχει η απεικονιστική αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου $ΔΙΑΔΡΟΜΗ \leq_P ΚΛ$.

γ. **(5)** Υπάρχει η απεικονιστική αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου $ΚΛ \leq_P ΔΙΑΔΡΟΜΗ$.

Υπόδειξη: Στα (β,γ) δεν χρειάζεται να κάνετε την αναγωγή. Μπορείτε πιο εύκολα να επιχειρηματολογήσετε σχετικά.

(Β) (20) Ορίζουμε το εξής πρόβλημα προσεγγιστικής κλίκας $ΠΚΛ$: Ένα γράφημα G έχει μία <u>r-προσεγγιστική κλίκα</u> με k κόμβους αν το γράφημα G έχει ένα υπογράφημα h με k κόμβους έτσι ώστε με την πρόσθεση ακριβώς r κατάλληλων ακμών στο h αυτό να γίνεται κλίκα. Επομένως, ορίζουμε:

$$ΠΚΛ = \{\langle G, k, r\rangle : το\ ακατεύθυντο\ γράφημα\ G\ \ έχει\ μία\ r - προσεγγιστική\ κλίκα\ με\ k\ κόμβους\}$$

Να αποδείξετε ότι το πρόβλημα $ΠΚΛ$ είναι NP-πλήρες.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε (χωρίς να είναι δεσμευτικό) αναγωγή με περιορισμό από το κατάλληλο πρόβλημα.

2. (40) Έστω η εξής γλώσσα: $Ξ_{TM} = \{\langle M\rangle : η\ M\ είναι\ TM\ και\ \epsilon \in L(M)\}$, όπου ϵ η κενή λέξη και $L(M)$ είναι η γλώσσα της TM M. Σας ζητούνται τα εξής:

1. **(20)** Να αποδείξετε με αλγοριθμική αναγωγή ότι η γλώσσα $Ξ_{TM}$ είναι μη-διαγνώσιμη. Για την αναγωγή χρησιμοποιήστε τη μη-διαγνώσιμη γλώσσα της αποδοχής $ΑΠ_{TM} = \{\langle M, w\rangle : η\ M\ είναι\ TM\ και\ w \in L(M)\}$.

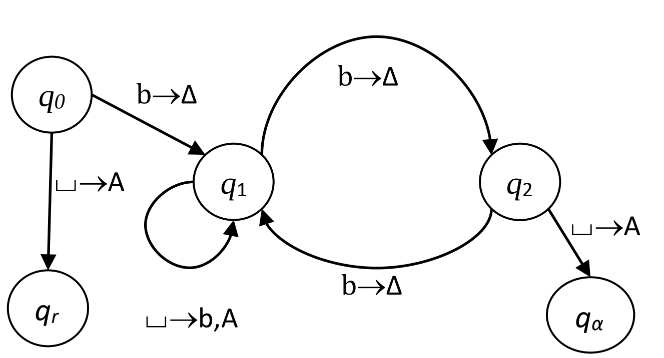
2. **(20)** Θέλουμε να δείξουμε με απεικονιστική αναγωγή ότι η γλώσσα $Ξ_{TM}$ είναι αναγνωρίσιμη. Χρησιμοποιείστε για την αναγωγή τη γλώσσα $ΤΕ_{TM} = \{\langle M, w\rangle : η\ M\ είναι\ TM\ και\ τερματίζει\ σε\ είσοδο\ w\}$ (η γλώσσα του τερματισμού) που γνωρίζουμε ότι είναι αναγνωρίσιμη.

3. (10) Να δώσετε όσες σχέσεις γνωρίζετε (αν περιέχονται ή είναι ίσες) των παρακάτω κλάσεων πολυπλοκότητας/υπολογισιμότητας δεδομένου ότι $P \neq NP$: $P, co-P, NP, co-NP\ , NPC, co-NPC$, Διαγνώσιμες Γλώσσες, Συμπληρωματικά Αναγνωρίσιμες Γλώσσες . (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και σχήμα – το πρόθεμα co σημαίνει συμπλήρωμα της κλάσης ενώ NPC είναι η κλάση των NP -πλήρων προβλημάτων)

4. (20) Να αναφέρετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι Σωστές (Σ) ή Λάθος (Λ) χωρίς αιτιολόγηση. Εφαρμόζεται αρνητική βαθμολογία (Σωστό: +0.2, Λάθος: -0.2 – τυχόν αρνητική βαθμολογία μεταφέρεται στον τελικό βαθμό.)

i. Η κλάση των αναγνωρίσιμων γλωσσών δεν είναι κλειστή ως προς την πράξη της ένωσης.
ii. Το θεώρημα των Cook-Levin αναφέρει ότι υπάρχει πρόβλημα που δεν λύνεται από μία TM.
iii. Το αλφάβητο ταινίας Γ μίας TM μπορεί να συμπίπτει με το αλφάβητο εισόδου Σ.
iv. Το σύνολο όλων των γλωσσών στο αλφάβητο Σ={a,b} είναι υπεραριθμήσιμο.
v. Η κλάση των NP-δυσχερών προβλημάτων εμπεριέχει την κλάση NPC.
vi. Όλοι οι πραγματικοί αριθμοί είναι περιγράψιμοι.
vii. Η κλάση NP δεν είναι κλειστή ως προς την πράξη της ένωσης.
viii. Αν $A \leq_m B$ και η B είναι αναγνωρίσιμη τότε και η A είναι αναγνωρίσιμη
ix. Οι TM διαγιγνώσκουν ακριβώς τις ίδιες γλώσσες με τα γραμμικώς φραγμένα αυτόματα.
x. Αν 2SAT∈P τότε και co-2SAT∈P.

5. (20) Έστω η αιτιοκρατική TM M όπου $Σ = \{b\}$ και $Γ = \{b, \sqcup\}$ με τη διπλανή συνάρτηση μετάβασης. Έστω ότι η αρχική κατάσταση είναι η q_0,η κατάσταση απόρριψης είναι η q_r και η κατάσταση αποδοχής είναι η q_α. Είναι η M διαγνώστης; Ποια είναι η γλώσσα που αναγνωρίζει η M; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.



Καλή Επιτυχία!!!

Ενδεικτικές Λύσεις Ομάδα Γ:

1. (A)

α. Αληθές, διότι το ΔΙΑΔΡΟΜΗ ανήκει στο P και άρα ανήκει και στο NP.

β. Αληθές, διότι το ΚΛ είναι NP-πλήρες.

γ. Ψευδές, διότι τότε θα ίσχυε P=NP.

(B) Πρώτα θα δείξουμε ότι το πρόβλημα ανήκει στην κλάση NP. Θα φτιάξουμε έναν πολυωνυμικό επαληθευτή για τη γλώσσα $ΠΚΛ$. Το πιστοποιητικό c θα είναι μια τέτοια προσεγγιστική κλίκα. Πράγματι, αυτή ως υπογράφημα του G έχει πολυωνυμικό μέγεθος. Ο επαληθευτής είναι ο εξής:

V: $\langle G, k, r, c\rangle$

1. Έλεγξε ότι το c είναι πράγματι μία r-προσεγγιστική κλίκα ως εξής:
    a. Έλεγξε ότι το c έχει k κόμβους.
    b. Έλεγξε ότι το c είναι υπογράφημα του G
    c. Έλεγξε ότι με την προσθήκη ακριβώς r ακμών το c γίνεται κλίκα.
    d. Αν όλα τα παραπάνω είναι OK τότε ΑΠΟΔΟΧΗ, αλλιώς ΑΠΟΡΡΙΨΗ

Ο επαληθευτής V εκτελείται σε αιτιοκρατικό πολυωνυμικό χρόνο και άρα η γλώσσα $ΠΚΛ \in NP$.

Θα χρησιμοποιήσουμε αναγωγή με περιορισμό στο πρόβλημα της κλίκας. Πράγματι ένα αυθαίρετο στιγμιότυπο του προβλήματος της κλίκας της φαίνεται και στο ερώτημα 1, αποτελεί στιγμιότυπο του προβλήματος $ΠΚΛ$ αν θέσουμε $r = 0$. Πράγματι, το $\langle G, k, 0\rangle$ βρίσκει ένα υπογράφημα του G με k κόμβους έτσι ώστε χωρίς να προσθέσουμε καμία ακμή αυτό να είναι ήδη κλίκα. Άρα, το πρόβλημα ΚΛ είναι περιορισμός του $ΠΚΛ$.

Επομένως, το $ΠΚΛ$ είναι NP-πλήρες αφού η ΚΛ είναι NP-πλήρες.

2.

Α) Θα κάνουμε αναγωγή από την $ΑΠ_{TM}$ στην $Ξ_{TM}$. Έστω ότι η $Ξ_{TM}$ είναι διαγνώσιμη και έστω ότι R είναι ο διαγνώστης της. Για είσοδο $\langle M, w\rangle$ κατασκευάζουμε μία νέα μηχανή M':

Η M' σε είσοδο $\langle x\rangle$:

1. Σβήνουμε την είσοδο x και αναγράφουμε την λέξη-σταθερά w.
2. Εξομοιώνουμε την M στο w

Αν η M αποδέχεται το w τότε η γλώσσα της M' είναι το Σ^* και άρα ανήκει σε αυτή και η κενή λέξη ϵ. Αν η M δεν αποδέχεται το w τότε η γλώσσα της M' είναι το κενό σύνολο και άρα δεν ανήκει σε αυτή και η κενή λέξη ϵ. Αν εφαρμόσουμε την R στην M' τότε αυτή θα αποδέχεται ή θα απορρίπτει ακριβώς όταν η M θα αποδέχεται ή θα απορρίπτει το w. Της το πρόβλημα της αποδοχής είναι μη διαγνώσιμο. Επομένως, έχουμε άτοπο και άρα ο διαγνωστής R δεν μπορεί να υπάρχει. Άρα η γλώσσα $Ξ_{TM}$ δεν είναι διαγνώσιμη.

Β) Θα κάνουμε απεικονιστική αναγωγή από την $Ξ_{TM}$ στην TE_{TM}. Αφού η TE_{TM} είναι αναγνωρίσιμη το ίδιο θα ισχύει και για την $Ξ_{TM}$. Άρα, θα πρέπει να σχεδιάσουμε μία υπολογίσιμη συνάρτηση f έτσι ώστε:

$$\langle M\rangle \in Ξ_{TM} \Leftrightarrow \langle M', w\rangle \in TE_{TM}$$

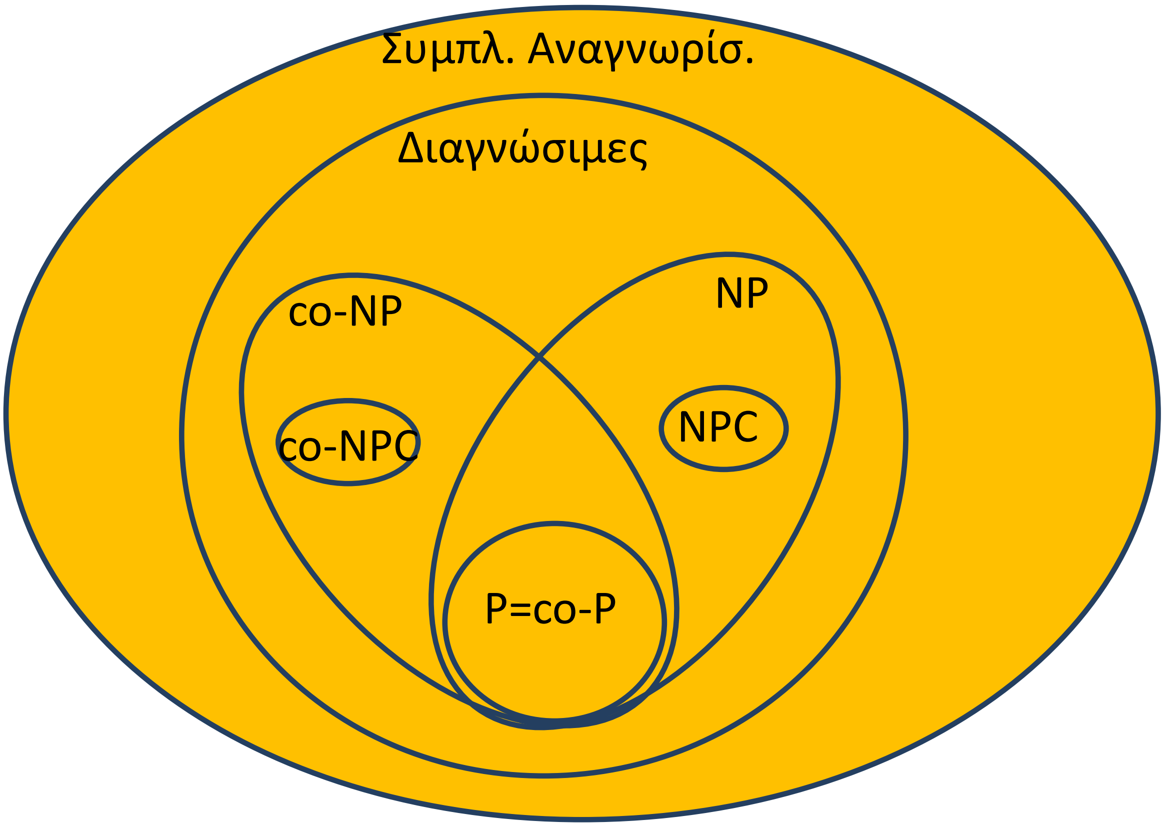
όπου $\langle M', w\rangle = f(\langle M\rangle)$. Η συνάρτηση f θέτει $w = \epsilon$ και η M' είναι ίδια με την M με τη διαφοροποίηση ότι όταν η συνάρτηση μετάβασης της M φτάνει σε απόρριψη τότε η M' εγκλωβίζεται. Η f είναι μία υπολογίσιμη συνάρτηση. Αποδεικνύουμε την παραπάνω ισοδυναμία:

Έστω ότι $\langle M\rangle \in Ξ_{TM}$. Τότε, $\epsilon \in L(M)$ και άρα η TM M σε είσοδο την κενή λέξη ϵ θα αποδεχθεί. Άρα, και η M' σε είσοδο ϵ θα τερματίσει με αποδοχή αφού η μόνη αλλαγή σε σχέση με την M αφορά την κατάσταση απόρριψης. Άρα $\langle M', \epsilon\rangle \in TE_{TM}$.

Έστω ότι $\langle M\rangle \notin Ξ_{TM}$ (αποδεικνύω το αντίθετο – και το αντίστροφο της βγαίνει με τον ίδιο τρόπο). Σε αυτή την περίπτωση η M είτε απορρίπτει με είσοδο τη κενή λέξη ή εγκλωβίζεται. Στη πρώτη περίπτωση, αφού η M απορρίπτει, η M' με είσοδο ϵ θα εγκλωβίζεται. Αντίστοιχα, αν η M εγκλωβίζεται τότε και η M' εγκλωβίζεται αφού έχουμε πειράξει μόνο την κατάσταση απόρριψης της M για να φτιάξουμε την M'. Άρα, $\langle M', \epsilon\rangle \notin TE_{TM}$.

Δεδομένης της παραπάνω απεικονιστικής αναγωγής και αφού η TE_{TM} είναι αναγνωρίσιμη το ίδιο θα ισχύει και για την $Ξ_{TM}$.

3.



4.

i.	**Λ**
ii.	**Λ**
iii.	**Λ**
iv.	**Σ**
v.	**Σ**
vi.	**Λ**
vii.	**Λ**
viii.	**Σ**
ix.	**Λ**
x.	**Σ**

5. Η ΤΜ Μ δεν είναι διαγνώστης. Αυτό γιατί σε είσοδο α και γενικά για περιττό πλήθος από α εγκλωβίζεται. Της, με είσοδο την κενή λέξη απορρίπτει. Όταν η είσοδος έχει άρτιο πλήθος από α τότε σε αυτή την περίπτωση αποδέχεται. Άρα η γλώσσα της M είναι: $L(M) = bb(bb)^*$.

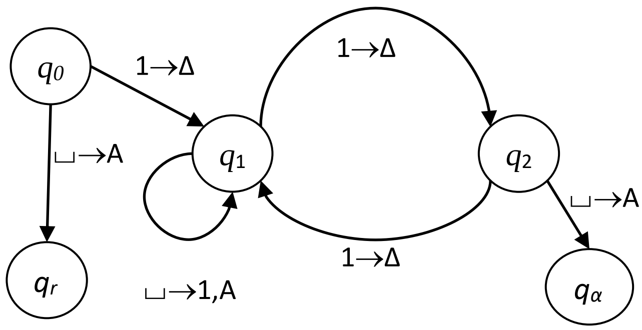
*ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «**ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ**» - 12/6/2023*

Διάρκεια Εξέτασης (2 ώρες και 40 λεπτά) – Ομάδα **<u>Δ</u>**

1. (10) Να δώσετε όσες σχέσεις γνωρίζετε (αν περιέχονται ή είναι ίσες) των παρακάτω κλάσεων πολυπλοκότητας/υπολογισιμότητας δεδομένου ότι $P \neq NP$: $P, co-P, NP, co-NP, NPC, co-NPC$, Διαγνώσιμες Γλώσσες, Αναγνωρίσιμες Γλώσσες. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και σχήμα – το πρόθεμα co σημαίνει συμπλήρωμα της κλάσης ενώ NPC είναι η κλάση των NP-πλήρων προβλημάτων)

2. (40) Έστω η εξής γλώσσα: $P_{TM} = \{\langle M \rangle: \eta\ M\ είναι\ TM\ και\ \epsilon \in L(M)\}$, όπου ϵ η κενή λέξη και $L(M)$ είναι η γλώσσα της TM M. Σας ζητούνται τα εξής:
1. **(20)** Να αποδείξετε με αλγοριθμική αναγωγή ότι η γλώσσα P_{TM} είναι μη-διαγνώσιμη. Για την αναγωγή χρησιμοποιήστε τη μη-διαγνώσιμη γλώσσα της αποδοχής $A_{TM} = \{\langle M, w \rangle: \eta\ M\ είναι\ TM\ και\ w \in L(M)\}$.
2. **(20)** Θέλουμε να δείξουμε με απεικονιστική αναγωγή ότι η γλώσσα P_{TM} είναι αναγνωρίσιμη. Χρησιμοποιείστε για την αναγωγή τη γλώσσα $T_{TM} = \{\langle M, w \rangle: \eta\ M\ είναι\ TM\ και\ τερματίζει\ σε\ είσοδο\ w\}$ (η γλώσσα του τερματισμού) που γνωρίζουμε ότι είναι αναγνωρίσιμη.

3. (20) Έστω η αιτιοκρατική TM M όπου $\Sigma = \{1\}$ και $\Gamma = \{1, \sqcup\}$ με τη διπλανή συνάρτηση μετάβασης. Έστω ότι η αρχική κατάσταση είναι η q_0,η κατάσταση απόρριψης είναι η q_r και η κατάσταση αποδοχής είναι η q_α. Είναι η M διαγνώστης; Ποια είναι η γλώσσα που αναγνωρίζει η M; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.



4. (30) (A) (10) Έστω οι εξής γλώσσες:

$$ΔΙΑΔΡΟΜΗ = \{\langle G, s, t \rangle: υπάρχει\ διαδρομή\ από\ τον\ κόμβο\ s\ στον\ κόμβο\ t\ στο\ ακατεύθυντο\ γράφημα\ G\}$$
$$ΑΝΣΥ = \{\langle G, k \rangle: το\ ακατεύθυντο\ γράφημα\ G\ έχει\ ανεξάρτητο\ σύνολο\ \ με\ k\ κόμβους\}$$

Χαρακτηρίστε ως αληθείς ή ψευδείς τις παρακάτω δηλώσεις και δώστε σύντομη αιτιολόγηση. Για τις απαντήσεις σας θεωρήστε ότι $P \neq NP$.
α. **(2)** Το πρόβλημα $ΔΙΑΔΡΟΜΗ$ ανήκει στην κλάση NP.
β. **(3)** Υπάρχει η απεικονιστική αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου $ΔΙΑΔΡΟΜΗ \leq_P ΑΝΣΥ$.
γ. **(5)** Υπάρχει η απεικονιστική αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου $ΑΝΣΥ \leq_P ΔΙΑΔΡΟΜΗ$.
Υπόδειξη: Στα (β,γ) δεν χρειάζεται να κάνετε την αναγωγή. Μπορείτε πιο εύκολα να επιχειρηματολογήσετε σχετικά.
(B) (20) Ορίζουμε το εξής πρόβλημα προσεγγιστικού ανεξάρτητου συνόλου $ΠΑΝΣΥ$: Ένα γράφημα G έχει ένα <u>r-προσεγγιστικό ανεξάρτητο σύνολο</u> με k κόμβους αν το γράφημα G έχει ένα υπογράφημα h με k κόμβους έτσι ώστε με την αφαίρεση ακριβώς r ακμών στο h αυτό να γίνεται ανεξάρτητο σύνολο. Επομένως, ορίζουμε:

$$ΠΑΝΣΥ = \{\langle G, k, r \rangle: το\ ακατεύθυντο\ γράφημα\ G\ \ έχει\ ένα\ r-προσεγγιστικό\ αν.\ σύνολο\ με\ k\ κόμβους\}$$

Να αποδείξετε ότι το πρόβλημα $ΠΑΝΣΥ$ είναι NP-πλήρες.
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε (χωρίς να είναι δεσμευτικό) αναγωγή με περιορισμό από το κατάλληλο πρόβλημα.

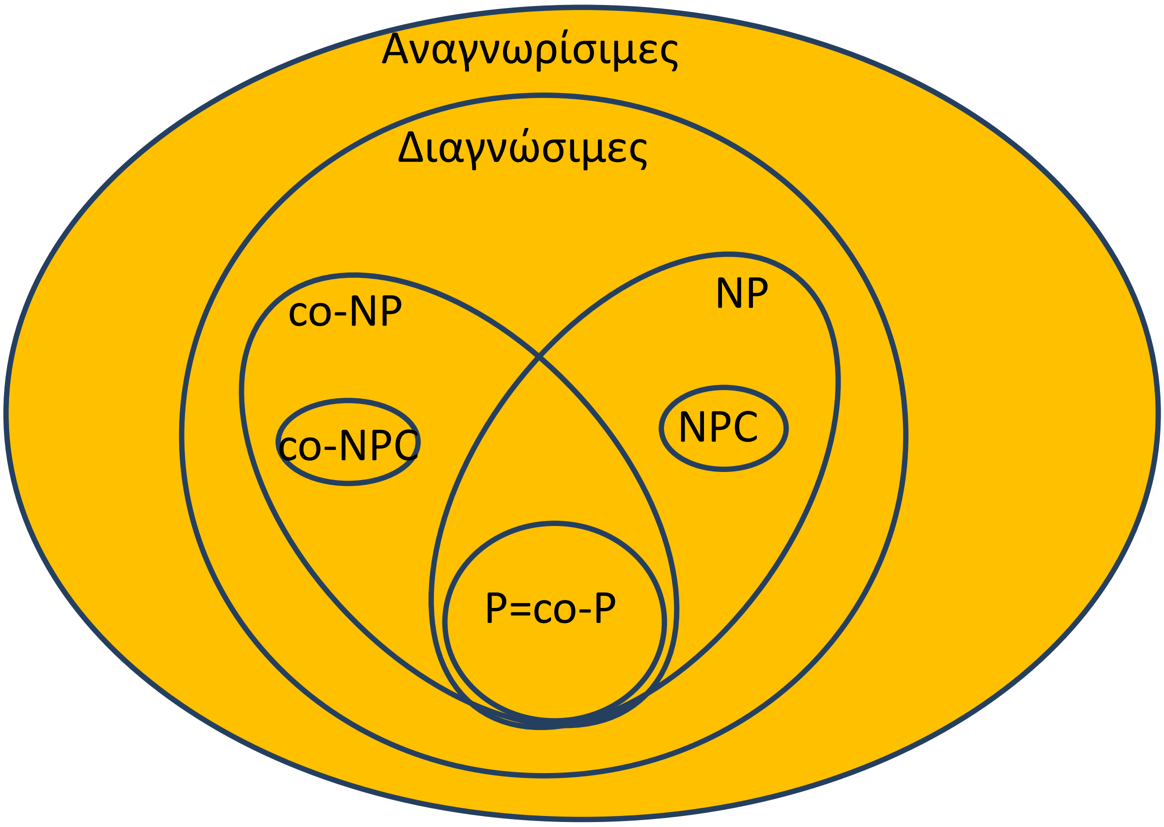
3. (20) Να αναφέρετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι Σωστές (Σ) ή Λάθος (Λ) χωρίς αιτιολόγηση. Εφαρμόζεται αρνητική βαθμολογία (Σωστό: +0.2, Λάθος: -0.2 – τυχόν αρνητική βαθμολογία μεταφέρεται στον τελικό βαθμό.)

i. Η κλάση των διαγνώσιμων γλωσσών είναι κλειστή ως προς την πράξη της τομής.
ii. Το αλφάβητο ταινίας Γ μίας TM μπορεί να συμπίπτει με το αλφάβητο εισόδου Σ.
iii. Αν 4SAT∈P τότε και co-4SAT∈P.
iv. Η κλάση των NP-δυσχερών προβλημάτων εμπεριέχει την κλάση NPC.
v. Όλοι οι υπολογίσιμοι πραγματικοί αριθμοί είναι περιγράψιμοι.
vi. Η κλάση NP φαίνεται ότι δεν είναι κλειστή ως προς την πράξη του συμπληρώματος.
vii. Τα γραμμικώς φραγμένα αυτόματα διαγιγνώσκουν τις ίδιες γλώσσες με τις TM.
viii. Αν $A \leq_m B$ και η B είναι αναγνωρίσιμη τότε και η A είναι αναγνωρίσιμη
ix. Το θεώρημα των Cook-Levin αναφέρει ότι κάποιοι αλγόριθμοι μπορούν να αναπαρασταθούν από μία TM.
x. Το σύνολο όλων των γλωσσών στο αλφάβητο Σ={x,y} είναι αριθμήσιμο.

Καλή Επιτυχία!!!

Ενδεικτικές Λύσεις Ομάδα Δ:

1.



2.

Α) Θα κάνουμε αναγωγή από την A_{TM} στην P_{TM}. Έστω ότι η P_{TM} είναι διαγνώσιμη και έστω ότι R είναι ο διαγνώστης της. Για είσοδο $\langle M, w \rangle$ κατασκευάζουμε μία νέα μηχανή M':

Η M' σε είσοδο $\langle x \rangle$:

1. Σβήνουμε την είσοδο x και αναγράφουμε την λέξη-σταθερά w.
2. Εξομοιώνουμε την M στο w

Αν η M αποδέχεται το w τότε η γλώσσα της M' είναι το Σ^* και άρα ανήκει σε αυτή και η κενή λέξη ϵ. Αν η M δεν αποδέχεται το w τότε η γλώσσα της M' είναι το κενό σύνολο και άρα δεν ανήκει σε αυτή και η κενή λέξη ϵ. Αν εφαρμόσουμε την R στην M' τότε αυτή θα αποδέχεται ή θα απορρίπτει ακριβώς όταν η M θα αποδέχεται ή θα απορρίπτει το w. Της το πρόβλημα της αποδοχής είναι μη διαγνώσιμο. Επομένως, έχουμε άτοπο και άρα ο διαγνωστής R δεν μπορεί να υπάρχει. Άρα η γλώσσα P_{TM} δεν είναι διαγνώσιμη.

Β) Θα κάνουμε απεικονιστική αναγωγή από την P_{TM} στην T_{TM}. Αφού η T_{TM} είναι αναγνωρίσιμη το ίδιο θα ισχύει και για την P_{TM}. Άρα, θα πρέπει να σχεδιάσουμε μία υπολογίσιμη συνάρτηση f έτσι ώστε:

$$\langle M \rangle \in P_{TM} \Leftrightarrow \langle M', w \rangle \in T_{TM}$$

όπου $\langle M', w \rangle = f(\langle M \rangle)$. Η συνάρτηση f θέτει $w = \epsilon$ και η M' είναι ίδια με την M με τη διαφοροποίηση ότι όταν η συνάρτηση μετάβασης της M φτάνει σε απόρριψη τότε η M' εγκλωβίζεται. Η f είναι μία υπολογίσιμη συνάρτηση. Αποδεικνύουμε την παραπάνω ισοδυναμία:

Έστω ότι $\langle M \rangle \in P_{TM}$. Τότε, $\epsilon \in L(M)$ και άρα η TM M σε είσοδο την κενή λέξη ϵ θα αποδεχθεί. Άρα, και η M' σε είσοδο ϵ θα τερματίσει με αποδοχή αφού η μόνη αλλαγή σε σχέση με την M αφορά την κατάσταση απόρριψης. Άρα $\langle M', \epsilon \rangle \in T_{TM}$.

Έστω ότι $\langle M \rangle \notin P_{TM}$ (αποδεικνύω το αντίθετο – και το αντίστροφο της βγαίνει με τον ίδιο τρόπο). Σε αυτή την περίπτωση η M είτε απορρίπτει με είσοδο τη κενή λέξη ή εγκλωβίζεται. Στη πρώτη περίπτωση, αφού η M απορρίπτει, η M' με είσοδο ϵ θα εγκλωβίζεται. Αντίστοιχα, αν η M εγκλωβίζεται τότε και η M' εγκλωβίζεται αφού έχουμε πειράξει μόνο την κατάσταση απόρριψης της M για να φτιάξουμε την M'. Άρα, $\langle M', \epsilon \rangle \notin T_{TM}$.

Δεδομένης της παραπάνω απεικονιστικής αναγωγής και αφού η T_{TM} είναι αναγνωρίσιμη το ίδιο θα ισχύει και για την P_{TM}.

3. Η ΤΜ Μ δεν είναι διαγνώστης. Αυτό γιατί σε είσοδο α και γενικά για περιττό πλήθος από α εγκλωβίζεται. Της, με είσοδο την κενή λέξη απορρίπτει. Όταν η είσοδος έχει άρτιο πλήθος από α τότε σε αυτή την περίπτωση αποδέχεται. Άρα η γλώσσα της M είναι: $L(M) = 11(11)^*$.

4. (Α)
α. Αληθές, διότι το ΔΙΑΔΡΟΜΗ ανήκει στο P και άρα ανήκει και στο NP.
β. Αληθές, διότι το ΑΝΣΥ είναι NP-πλήρες.
γ. Ψευδές, διότι τότε θα ίσχυε P=NP.

(Β) Πρώτα θα δείξουμε ότι το πρόβλημα ανήκει στην κλάση NP. Θα φτιάξουμε έναν πολυωνυμικό επαληθευτή για τη γλώσσα $ΠΑΝΣΥ$. Το πιστοποιητικό c θα είναι ένα τέτοιο προσεγγιστικό ανεξάρτητο σύνολο. Πράγματι, αυτό ως υπογράφημα του G έχει πολυωνυμικό μέγεθος. Ο επαληθευτής είναι ο εξής:
V: $\langle G, k, r, c \rangle$

3. Έλεγξε ότι το c είναι πράγματι ένα r-προσεγγιστικό ανεξάρτητο σύνολο ως εξής:
    a. Έλεγξε ότι το c έχει k κόμβους.
    b. Έλεγξε ότι το c είναι υπογράφημα του G
    c. Έλεγξε ότι με την αφαίρεση ακριβώς r ακμών το c γίνεται ανεξάρτητο σύνολο.
    d. Αν όλα τα παραπάνω είναι OK τότε ΑΠΟΔΟΧΗ, αλλιώς ΑΠΟΡΡΙΨΗ

Ο επαληθευτής V εκτελείται σε αιτιοκρατικό πολυωνυμικό χρόνο και άρα η γλώσσα $ΠΑΝΣΥ \in NP$.
Θα χρησιμοποιήσουμε αναγωγή με περιορισμό στο πρόβλημα του ανεξάρτητου συνόλου. Πράγματι ένα αυθαίρετο στιγμιότυπο του προβλήματος του ανεξάρτητου συνόλου όπως φαίνεται και στο ερώτημα 1, αποτελεί στιγμιότυπο του προβλήματος $ΠΑΝΣΥ$ αν θέσουμε $r = 0$. Πράγματι, το $\langle G, k, 0 \rangle$ βρίσκει ένα υπογράφημα του G με k κόμβους έτσι ώστε χωρίς να αφαιρέσουμε καμία ακμή αυτό να είναι ήδη ανεξάρτητο σύνολο. Άρα, το πρόβλημα ΑΝΣΥ είναι περιορισμός του $ΠΑΝΣΥ$.
Επομένως, το $ΠΑΝΣΥ$ είναι NP-πλήρες αφού το ΑΝΣΥ είναι NP-πλήρες.

5.

i. **Σ**
ii. **Λ**
iii. **Σ**
iv. **Σ**
v. **Σ**
vi. **Σ**
vii. **Λ**
viii. **Σ**
ix. **Λ**
x. **Λ**