*ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «**ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ**»*
31/08/2022
Διάρκεια Εξέτασης (2 ώρες και 30 λεπτά) – Ομάδα Α

1. (15 μονάδες)
α) (7) Έστω ότι σας δίνεται μία TM M, μία είσοδος x (που βρίσκεται στην αρχή της ταινίας) και ένας φυσικός αριθμός k. Ορίζουμε το εξής πρόβλημα:

$$BSC = \{\langle M, x, k\rangle : Η\ TM\ M\ τερματίζει\ σε\ είσοδο\ x\ χρησιμοποιώντας\ το\ πολύ\ k\ θέσεις\ μνήμης\}$$

Είναι το BSC διαγνώσιμο; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
β) (8) Έστω η γλώσσα $A = \{a^n b^n : n \geq 0\}$, που ανήκει στο P. Θα δείξουμε ότι $3SAT \leq_P A$. Η αναγωγή είναι η εξής:

$$f(\langle\varphi\rangle) = \begin{cases} aabb & αν\ η\ \varphi\ έχει\ αληθοποιό\ τιμοδοσία \\ aab & διαφορετικά \end{cases}$$

όπου φ λογικός τύπος. Αφού $3SAT \in NPC$, $3SAT \leq_P A$ και $A \in P$ συνεπάγεται ότι $P = NP$. Να δείξετε ποιο είναι το «λάθος» σε αυτή την απόδειξη ότι $P = NP$ εστιάζοντας στην αναγωγή.

2. (30 μονάδες)
(A) (8) Έστω οι εξής γλώσσες:

$$2SAT = \{\langle\varphi\rangle : ο\ λόγικος\ τύπος\ \varphi\ σε\ 2-κανονική\ συζευκτική\ μορφή\ είναι\ αληθεύσιμος\}$$

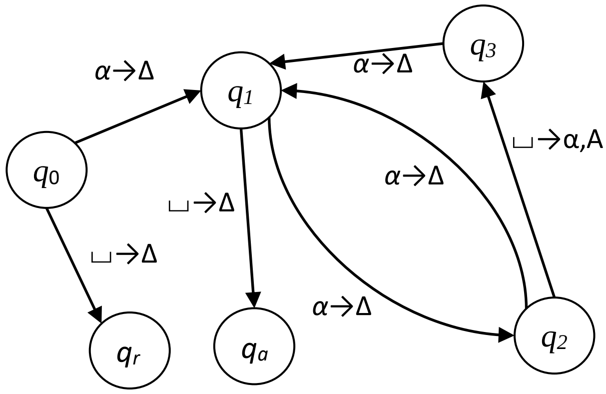
$$KNAPSACK = \left\{\langle\{v_1, \dots, v_n\}, \{w_1, \dots, w_n\}, k, W\rangle : \exists I \subseteq \{1, \dots, n\}\ έτσι\ ώστε\ \sum_{j \in I} v_j \geq W\ και\ \sum_{j \in I} w_j \leq k\right\}$$

Χαρακτηρίστε ως αληθείς ή ψευδείς τις παρακάτω δηλώσεις και δώστε σύντομη αιτιολόγηση. Για τις απαντήσεις σας θεωρήστε ότι $P \neq NP$.
α. (2) Το πρόβλημα $2SAT$ ανήκει στην κλάση NP.
β. (3) Υπάρχει αναγωγή του προβλήματος $2SAT \leq_P KNAPSACK$.
γ. (3) Υπάρχει αναγωγή του προβλήματος $KNAPSACK \leq_P 2SAT$.

(B) (22) Έστω μία μηχανή και ένα σύνολο εργασιών $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ προς εκτέλεση στη μηχανή. Κάθε εργασία q_i $(1 \leq i \leq n)$ απαιτεί χρόνο επεξεργασίας p_i, έχει κέρδος w_i και έχει μία προθεσμία d_i. Θα πρέπει να δρομολογήσουμε τις εργασίες στη μηχανή με τον περιορισμό ότι η μηχανή εκτελεί το πολύ μία εργασία σε κάθε χρονική στιγμή και από τη στιγμή που μία εργασία q_i ξεκινήσει να εκτελείται θα πρέπει να εκτελεσθεί για χρόνο p_i. Οι εργασίες q_i που ολοκληρώνονται πριν την προθεσμία τους, μας δίνουν κέρδος w_i, αλλιώς το κέρδος που αποκομίζουμε είναι 0. Δείξτε ότι το πρόβλημα απόφασης για το αν υπάρχει πρόγραμμα δρομολόγησης με συνολικό κέρδος τουλάχιστον W είναι NP-πλήρες.
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε (χωρίς να είναι δεσμευτικό) αναγωγή με περιορισμό από το κατάλληλο πρόβλημα.

3. (30 μονάδες) Θα ονομάζουμε ***άχρηστη*** μία κατάσταση σε μία TM M αν για οποιαδήποτε είσοδο η M δεν διέρχεται από αυτή την κατάσταση ποτέ. Έστω το πρόβλημα καθορισμού του αν μία δοθείσα κατάσταση είναι άχρηστη.
α) (4) Να εκφράσετε τυπικά το συγκεκριμένο πρόβλημα ως γλώσσα (ονοματίστε τη γλώσσα ως UL – δείτε ως παράδειγμα την εκφώνηση της άσκησης 2(A)).
β) (15) Να αποδείξετε ότι η συγκεκριμένη γλώσσα είναι μη-διαγνώσιμη (προτείνεται – χωρίς να είναι δεσμευτικό – να χρησιμοποιήσετε για την αναγωγή τη γλώσσα $KENOTHTA_{TM} = \{\langle M\rangle : L(M) = \emptyset\}$)
γ) (4) Η συμπληρωματική γλώσσα $co-UL$ είναι διαγνώσιμη ή μη-διαγνώσιμη (με αιτιολόγηση);
δ) (7) Η UL είναι αναγνωρίσιμη, συμπληρωματικά αναγνωρίσιμη ή τίποτα από τα δύο (με αιτιολόγηση);

4. (20 μονάδες) Έστω η αιτιοκρατική ΤΜ M όπου $\Sigma = \{\alpha\}$ και $\Gamma = \{\alpha, \sqcup\}$ με τη διπλανή συνάρτηση μετάβασης. Έστω ότι η αρχική κατάσταση είναι η q_0, η κατάσταση απόρριψης είναι η q_r και η κατάσταση αποδοχής είναι η q_α. Είναι η M διαγνώστης; Ποια είναι η γλώσσα που αναγνωρίζει η M; Σε κάθε περίπτωση αιτιολογήστε την απάντησή σας.



5. (20 μονάδες) Να αναφέρετε για κάθε μία πρόταση αν είναι Αληθής ή Ψευδής χωρίς αιτιολόγηση.
Σε αυτό το θέμα εφαρμόζεται αρνητική βαθμολόγηση. Κάθε σωστή απάντηση δίνει +0.2 και κάθε λάθος -0.2. Η αρνητική βαθμολόγηση μεταφέρεται και εκτός της συγκεκριμένης άσκησης.

i. Αν $A \leq_m B$ και η A είναι αναγνωρίσιμη τότε και η B είναι αναγνωρίσιμη
ii. Το σύνολο όλων των γλωσσών στο αλφάβητο Σ={0,1} είναι υπεραριθμήσιμο.
iii. Αν NP=co-NP τότε P=NP.
iv. Σε μία ΤΜ το αλφάβητο της ταινίας μπορεί να συμπίπτει με το αλφάβητο της εισόδου.
v. Η κλάση των NP-δυσχερών προβλημάτων εμπεριέχουν την κλάση NPC.
vi. Δεν γνωρίζουμε αν η κλάση NP είναι κλειστή ως προς την πράξη του συμπληρώματος.
vii. Υπάρχουν αριθμοί περιγράψιμοι που δεν είναι υπολογίσιμοι.
viii. Το σύνολο των μη-διαγνώσιμων γλωσσών αποτελείται από αναγνωρίσιμες και συμπληρωματικά αναγνωρίσιμες γλώσσες.
ix. Η κλάση των διαγνώσιμων γλωσσών είναι κλειστή ως προς την πράξη της ένωσης.
x. Το θεώρημα των Cook-Levin αναφέρει ότι οποιοσδήποτε αλγόριθμος μπορεί να αναπαρασταθεί από μία ΤΜ.

Καλή Επιτυχία!!!

*ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «**ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ**»*
31/08/2022
Διάρκεια Εξέτασης (2 ώρες και 30 λεπτά) – Ομάδα Β

1. (30 μονάδες) Θα ονομάζουμε ***άχρηστη*** μία κατάσταση σε μία ΤΜ M αν για οποιαδήποτε είσοδο η M δεν διέρχεται από αυτή την κατάσταση ποτέ. Έστω το πρόβλημα καθορισμού του αν μία δοθείσα κατάσταση είναι άχρηστη.
α) (4) Να εκφράσετε τυπικά το συγκεκριμένο πρόβλημα ως γλώσσα (ονοματίστε τη γλώσσα ως UL – δείτε ως παράδειγμα την εκφώνηση της άσκησης 2(Α)).
β) (15) Να αποδείξετε ότι η συγκεκριμένη γλώσσα είναι μη-διαγνώσιμη (προτείνεται – χωρίς να είναι δεσμευτικό – να χρησιμοποιήσετε για την αναγωγή τη γλώσσα $KENOTHTA_{TM} = \{\langle M \rangle : L(M) = \emptyset\}$)
γ) (4) Η συμπληρωματική γλώσσα $co-UL$ είναι διαγνώσιμη ή μη-διαγνώσιμη (με αιτιολόγηση);
δ) (7) Η UL είναι αναγνωρίσιμη, συμπληρωματικά αναγνωρίσιμη ή τίποτα από τα δύο (με αιτιολόγηση);

2. (30 μονάδες)
(Α) (8) Έστω οι εξής γλώσσες:

$$2SAT = \{\langle \varphi \rangle : \textit{ο λόγικος τύπος } \varphi \textit{ σε } 2-\textit{κανονική συζευκτική μορφή είναι αληθεύσιμος}\}$$

$$KNAPSACK = \left\{ \langle \{v_1, \dots, v_n\}, \{w_1, \dots, w_n\}, k, W \rangle : \exists I \subseteq \{1, \dots, n\} \textit{ έτσι ώστε } \sum_{j \in I} v_j \geq W \textit{ και } \sum_{j \in I} w_j \leq k \right\}$$

Χαρακτηρίστε ως αληθείς ή ψευδείς τις παρακάτω δηλώσεις και δώστε σύντομη αιτιολόγηση. Για τις απαντήσεις σας θεωρήστε ότι $P \neq NP$.
α. (2) Το πρόβλημα $2SAT$ ανήκει στην κλάση NP.
β. (3) Υπάρχει αναγωγή του προβλήματος $2SAT \leq_P KNAPSACK$.
γ. (3) Υπάρχει αναγωγή του προβλήματος $KNAPSACK \leq_P 2SAT$.

(Β) (22) Έστω μία μηχανή και ένα σύνολο εργασιών $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m\}$ προς εκτέλεση στη μηχανή. Κάθε εργασία ε_i $(1 \leq i \leq m)$ απαιτεί χρόνο επεξεργασίας π_i, έχει κέρδος κ_i και έχει μία προθεσμία ρ_i. Θα πρέπει να δρομολογήσουμε τις εργασίες στη μηχανή με τον περιορισμό ότι η μηχανή εκτελεί το πολύ μία εργασία σε κάθε χρονική στιγμή και από τη στιγμή που μία εργασία ε_i ξεκινήσει να εκτελείται θα πρέπει να εκτελεσθεί για χρόνο π_i. Οι εργασίες ε_i που ολοκληρώνονται πριν την προθεσμία τους, μας δίνουν κέρδος κ_i, αλλιώς το κέρδος που αποκομίζουμε είναι 0. Δείξτε ότι το πρόβλημα απόφασης για το αν υπάρχει πρόγραμμα δρομολόγησης με συνολικό κέρδος τουλάχιστον K είναι NP-πλήρες.
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε (χωρίς να είναι δεσμευτικό) αναγωγή με περιορισμό από το κατάλληλο πρόβλημα.

3. (15 μονάδες)
α) (7) Έστω ότι σας δίνεται μία ΤΜ M, μία είσοδος y (που βρίσκεται στην αρχή της ταινίας) και ένας φυσικός αριθμός ℓ. Ορίζουμε το εξής πρόβλημα:

$$CBS = \{\langle M, y, \ell \rangle : \textit{Η ΤΜ } M \textit{ τερματίζει σε είσοδο } y \textit{ χρησιμοποιώντας το πολύ } \ell \textit{ θέσεις μνήμης}\}$$

Είναι το CBS διαγνώσιμο; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
β) (8) Έστω η γλώσσα $B = \{1^n 0^n : n \geq 0\}$, που ανήκει στο P. Θα δείξουμε ότι $3SAT \leq_P B$. Η αναγωγή είναι η εξής:

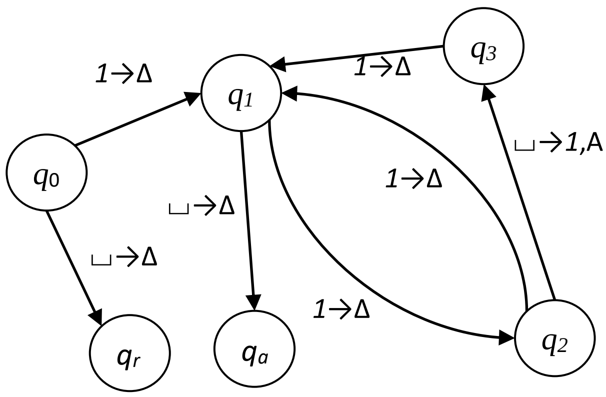
$$f(\langle \varphi \rangle) = \begin{cases} 111000 & \textit{αν η } \varphi \textit{ έχει αληθοποιό τιμοδοσία} \\ 110 & \textit{διαφορετικά} \end{cases}$$

όπου φ λογικός τύπος. Αφού $3SAT \in NPC$, $3SAT \leq_P B$ και $B \in P$ συνεπάγεται ότι $P = NP$. Να δείξετε ποιο είναι το «λάθος» σε αυτή την απόδειξη ότι $P = NP$ εστιάζοντας στην αναγωγή.

4. (20 μονάδες) Να αναφέρετε για κάθε μία πρόταση αν είναι Αληθής ή Ψευδής χωρίς αιτιολόγηση.
Σε αυτό το θέμα εφαρμόζεται αρνητική βαθμολόγηση. Κάθε σωστή απάντηση δίνει +0.2 και κάθε λάθος -0.2. Η αρνητική βαθμολόγηση μεταφέρεται και εκτός της συγκεκριμένης άσκησης.

i. Αν $A \leq_m B$ και η B είναι αναγνωρίσιμη τότε και η A είναι αναγνωρίσιμη
ii. Το σύνολο όλων των γλωσσών στο αλφάβητο Σ={0,1} είναι αριθμήσιμο.
iii. Αν NP≠co-NP τότε P=NP.
iv. Σε μία TM το αλφάβητο της ταινίας δεν μπορεί να συμπίπτει με το αλφάβητο της εισόδου.
v. Η κλάση των NP-δυσχερών προβλημάτων εμπεριέχουν την κλάση NPC.
vi. Δεν γνωρίζουμε αν η κλάση NP είναι κλειστή ως προς την πράξη της ένωσης.
vii. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί που δεν είναι περιγράψιμοι.
viii. Το σύνολο των μη-διαγνώσιμων γλωσσών αποτελείται από αναγνωρίσιμες και συμπληρωματικά αναγνωρίσιμες γλώσσες.
ix. Η κλάση των διαγνώσιμων γλωσσών είναι κλειστή ως προς την πράξη του συμπληρώματος.
x. Το αξίωμα των Church-Turing αναφέρει ότι οποιοσδήποτε αλγόριθμος μπορεί να αναπαρασταθεί από μία TM.

5. (20 μονάδες) Έστω η αιτιοκρατική TM M όπου $\Sigma = \{1\}$ και $\Gamma = \{1, \sqcup\}$ με τη διπλανή συνάρτηση μετάβασης. Έστω ότι η αρχική κατάσταση είναι η q_0, η κατάσταση απόρριψης είναι η q_r και η κατάσταση αποδοχής είναι η q_α. Είναι η M διαγνώστης; Ποια είναι η γλώσσα που αναγνωρίζει η M; Σε κάθε περίπτωση αιτιολογήστε την απάντησή σας.



Καλή Επιτυχία!!!

Ενδεικτικές/Συνοπτικές Λύσεις:

Μεταξύ των ομάδων οι ασκήσεις αλλάζουν στην σημειογραφία μόνο και για αυτό αναφέρονται οι λύσεις της ομάδας Α εκτός και αν αναφέρεται ρητά η αλλαγή

Α1, Β3.

α) Το πρόβλημα είναι διαγνώσιμο. Στην ουσία μιλάμε για ένα LBA στο οποίο έχουμε δείξει ότι το πρόβλημα του τερματισμού είναι διαγνώσιμο. Άρα είναι διαγνώσιμο.

β) Το «λάθος» είναι ότι η αναγωγή δεν ξέρουμε αν είναι πολυωνυμικού χρόνου αφού θα πρέπει να ξέρουμε αν η φ έχει αληθοποιό τιμοδοσία (δηλαδή να λύσουμε αποδοτικά το $3SAT$). Αυτό δεν ξέρουμε αν γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο.

Α2, Β2.

α)

(α) Αληθές, διότι το 2SAT ανήκει στο P και άρα ανήκει και στο NP.
(β) Αληθές, διότι το KNAPSACK είναι NP-πλήρες.
(γ) Ψευδές, διότι τότε θα ίσχυε P=NP.

β) Θα δείξουμε ότι το πρόβλημα KNAPSACK αποτελεί περιορισμό του συγκεκριμένου προβλήματος δρομολόγησης. Θέτουμε $d_i = d, i = 1, \dots, n$ για κάποιο φυσικό αριθμό d. Τώρα το πρόβλημα είναι ίδιο με αυτό του KNAPSACK:

- Ο χρόνος επεξεργασίας p_i αντιστοιχεί στο βάρος του αντικειμένου. Το άνω φράγμα στο βάρος είναι ίσο με d
- Το κέρδος παραμένει ίδιο με το κάτω φράγμα του να είναι το W.

Αφού είναι ειδική περίπτωση το KNAPSACK του προβλήματος δρομολόγησης σημαίνει ότι και το συγκεκριμένο πρόβλημα δρομολόγησης είναι NP-δυσχερές. Για να αποδείξουμε ότι είναι NP-πλήρες, αρκεί να δείξουμε ότι ανήκει στο NP. Πράγματι, αν το πιστοποιητικό είναι ένα πρόγραμμα δρομολόγησης (έχει πολυωνυμικό μέγεθος) μπορούμε σε πολυωνυμικό χρόνο να ελέγξουμε αν πράγματι ικανοποιούνται οι σχετικοί περιορισμοί. Άρα το πρόβλημα ανήκει και στην κλάση NP και άρα είναι NP-πλήρες.

Α3, Β1.

α)

$$UL = \{\langle M, q\rangle : \eta\ q\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \acute{\alpha}\chi\rho\eta\sigma\tau\eta\ \sigma\tau\eta\nu\ TM\ M\}$$

β) Θα κάνουμε απεικονιστική αναγωγή ώστε να μπορούμε άμεσα να απαντήσουμε και το (δ). Θα φτιάξουμε αναγωγή f έτσι ώστε:

$$\langle M\rangle \in KENOTHTA_{TM} \Leftrightarrow \langle M', q\rangle = f(\langle M\rangle) \in UL$$

Η αναγωγή f είναι η εξής: $M' = M$ και $q = q_{\alpha\pi o\delta o\chi\acute{\eta}}$, όπου $q_{\alpha\pi o\delta o\chi\acute{\eta}}$ είναι η κατάσταση αποδοχής της TM M. Η αναγωγή f είναι προφανώς υπολογίσιμη. Για να ολοκληρώσουμε την αναγωγή θα αποδείξουμε την παραπάνω ισοδυναμία:

$\Rightarrow$ Έστω ότι $\langle M\rangle \in KENOTHTA_{TM}$. Τότε η M δεν φτάνει σε κατάσταση αποδοχής ποτέ. Άρα $\langle M, q_{\alpha\pi o\delta o\chi\acute{\eta}}\rangle \in UL$.

$\Leftarrow$ Έστω ότι $\langle M, q_{αποδοχή} \rangle \in UL$. Αυτό σημαίνει ότι η κατάσταση αποδοχής είναι άχρηστη, δηλαδή σε οποιαδήποτε είσοδο ποτέ δεν φτάνει σε αυτή ο υπολογισμός. Άρα, αυτό σημαίνει ότι για οποιαδήποτε είσοδος η M δεν αποδέχεται. Άρα $\langle M \rangle \in KENOTHTA_{TM}$.

Επομένως, αφού η $KENOTHTA_{TM}$ είναι μη-διαγνώσιμη το ίδιο θα ισχύει και για τη UL.

γ) Η $coUL$ δεν μπορεί να είναι διαγνώσιμη, αφού η κλάση των διαγνώσιμων γλωσσών είναι κλειστή ως προς τη πράξη του συμπληρώματος. Άρα και η $coUL$ είναι μη-διαγνώσιμη.

δ) Η αναγωγή που κάναμε στο ερώτημα (β) ήταν απεικονιστική αναγωγή. Αφού η κενότητα δεν είναι αναγνωρίσιμη το ίδιο θα ισχύει και για την UL. Είναι όμως συμπληρωματικά αναγνωρίσιμη αφού η $coUL$ είναι αναγνωρίσιμη. Πράγματι, μπορούμε να φτιάξουμε μία TM που να αναγνωρίζει την coUL. Αυτή η TM με ένα συστηματικό τρόπο θα παράγει όλες τις λέξεις λεξικογραφικά και όταν παράγει τις πρώτες i λέξεις τότε θα τις τρέχει για i βήματα και αν σε κάποιο περάσει από την κατάσταση q τότε αποδέχεται αλλιώς συνεχίζει.

A4, B5.

Η TM M δεν είναι διαγνώστης. Αυτό γιατί σε είσοδο $αα$ εγκλωβίζεται. Γενικά, εγκλωβίζεται όταν το πλήθος των $α$ είναι άρτιο μιας και επαναλαμβάνεται συνεχώς ο κύκλος καταστάσεων q_1, q_2, q_3. Επίσης, με είσοδο την κενή λέξη απορρίπτει. Όταν η είσοδος έχει περιττό πλήθος $α$ τότε σε αυτή την περίπτωση αποδέχεται. Άρα η γλώσσα της M είναι: $L(M) = a(αα)^*$.

A5,

i. **Λ**
ii. **Σ**
iii. **Λ**
iv. **Λ**
v. **Σ**
vi. **Σ**
vii. **Σ**
viii. **Λ**
ix. **Σ**
x. **Λ**

B4.

i. **Σ**
ii. **Λ**
iii. **Λ**
iv. **Σ**
v. **Σ**
vi. **Λ**
vii. **Σ**
viii. **Λ**
ix. **Σ**
x. **Σ**