*ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «**ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ**» - 14/6/2022*

Διάρκεια Εξέτασης (2 ώρες και 30 λεπτά) – Ομάδα Α

1. (10 μονάδες) Υποθέτοντας ότι $P \neq NP$, να αποδείξετε αν ισχύει ή όχι η εξής πρόταση: Αν κάθε στιγμιότυπο του προβλήματος απόφασης P_1 είναι και στιγμιότυπο του προβλήματος απόφασης P_2, και αν το P_2 είναι NP-δυσχερές (NP-hard) τότε και το P_1 είναι NP-δυσχερές.

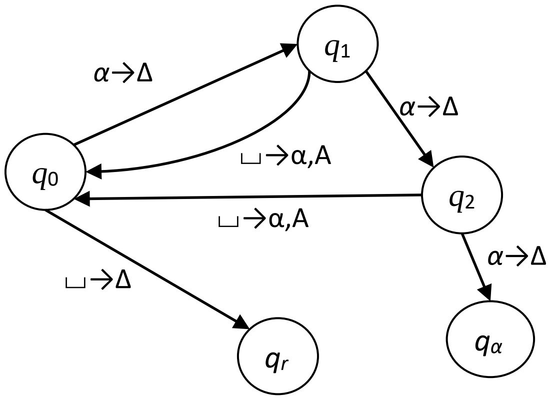
2. (35 μονάδες) (Α) (20) Δείξτε ότι το ακόλουθο πρόβλημα είναι NP-πλήρες:
$\underline{PATH \geq k}$: Δοθέντος κατευθυντικού γραφήματος G, δύο κόμβων s, t του G και θετικού ακεραίου k, υπάρχει απλή διαδρομή (που σέβεται τις κατευθύνσεις των ακμών) από s σε t μήκους <u>τουλάχιστον</u> k.
Υπενθυμίζεται ότι μία απλή διαδρομή είναι μία διαδρομή που δεν περιέχει επαναλήψεις κόμβων.
(Β) (6) Κατατάξτε (με συνοπτική επιχειρηματολογία) το παρακάτω πρόβλημα στη μικρότερη δυνατή κλάση χρονικής πολυπλοκότητας:
$\underline{PATH \leq k}$: Δοθέντος γραφήματος G, δύο κόμβων s, t του G και θετικού ακεραίου k, υπάρχει απλή διαδρομή από s σε t μήκους <u>το πολύ</u> k;
(Γ) (9) Χαρακτηρίστε ως αληθείς ή ψευδείς τις παρακάτω δηλώσεις και δώστε σύντομη αιτιολόγηση. Για τις απαντήσεις σας θεωρήστε ότι $P \neq NP$.
(1) Το πρόβλημα $PATH \leq k$ ανήκει στην κλάση NP.
(2) Υπάρχει αναγωγή του προβλήματος $PATH \leq k$ στο $3SAT$.
(3) Υπάρχει αναγωγή του προβλήματος $HAMILTON\ ΔΙΑΔΡΟΜΗ$ στο πρόβλημα $PATH \leq k$.

3. (25 μονάδες) Έστω η γλώσσα $Λ = \{\langle M \rangle | η\ L(M)\ περιέχει\ τη\ λέξη\ "ΚΑΛΟ"\}$. Να αποδείξετε ότι η $Λ$ είναι μη-διαγνώσιμη. Με $L(M)$ συμβολίζουμε τη γλώσσα της ΤΜ M.

4. (20 μονάδες) Να αναφέρετε για κάθε μία πρόταση αν είναι Αληθής ή Ψευδής χωρίς αιτιολόγηση.
Σε αυτό το θέμα εφαρμόζεται αρνητική βαθμολόγηση. Κάθε σωστή απάντηση δίνει +0.2 και κάθε λάθος -0.2. Η αρνητική βαθμολόγηση δεν μεταφέρεται εκτός της συγκεκριμένης άσκησης.

i. Δοθέντος ενός Η/Υ με 10TB συνολική μνήμη και ενός προγράμματος για αυτόν τον Η/Υ, δεν μπορούμε να διαγνώσουμε αν το πρόγραμμα τερματίζει.
ii. Αν $A \leq_m B$ και η A είναι αναγνωρίσιμη τότε και η B είναι αναγνωρίσιμη
iii. Το αλφάβητο ταινίας Γ μίας ΤΜ δεν μπορεί να συμπίπτει με το αλφάβητο εισόδου Σ.
iv. Αν SAT∈P τότε και co-SAT∈P.
v. Μία γλώσσα είναι αναγνωρίσιμη αν είναι διαγνώσιμη και συμπληρωματικά διαγνώσιμη.
vi. Η αιτιοκρατική ΤΜ είναι ισοδύναμη με την ανταιτιοκρατική ΤΜ όσον αφορά το σύνολο των γλωσσών που μπορούν να αναγνωρίσουν.
vii. Μία απεικονιστική αναγωγή εκθετικού χρόνου δεν μπορεί να διαχωρίσει τις κλάσεις P και NP.
viii. Υπάρχει απεικονιστική αναγωγή από τη γλώσσα ΑΠΟΔΟΧΗ στη γλώσσα ΚΕΝΟΤΗΤΑ.
ix. Ισχύει ότι $DTIME(n^2) \subseteq NTIME(n^3)$
x. Αν ένα πρόβλημα Α ανάγεται απεικονιστικά σε πολυωνυμικό χρόνο στο πρόβλημα Β τότε και το Β μπορεί να αναχθεί απεικονιστικά σε πολυωνυμικό χρόνο στο Α.

5. (20 μονάδες) Έστω η αιτιοκρατική ΤΜ M όπου $Σ = \{α\}$ και $Γ = \{α, ⊔\}$ με τη διπλανή συνάρτηση μετάβασης. Έστω ότι η αρχική κατάσταση είναι η q_0, η κατάσταση απόρριψης είναι η q_r και η κατάσταση αποδοχής είναι η $q_α$. Είναι η M διαγνώστης; Ποια είναι η γλώσσα που αναγνωρίζει η M;



Καλή Επιτυχία!!!

Ενδεικτικές Λύσεις Ομάδα Α:

1. Η φράση «Το πρόβλημα απόφασης P_2 είναι NP-δυσχερές» σημαίνει ότι υπάρχουν κάποια στιγμιότυπα του P_2 που είναι υπολογιστικά δύσκολα αλλά δεν είναι απαραίτητα όλα τα στιγμιότυπα δύσκολα. Επομένως, μπορεί όλα τα στιγμιότυπα του προβλήματος απόφασης P_1 να είναι εύκολα δηλαδή το P_1 να είναι υπολογιστικά εύκολο πρόβλημα. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το SAT που είναι υπολογιστικά δύσκολο και το 2SAT που είναι υπολογιστικά εύκολο. Επομένως η πρόταση δεν ισχύει.

2. (A) Δοθέντος μονοπατιού p από s σε t στο G, ελέγχεται σε πολυωνυμικό χρόνο αν το μονοπάτι είναι απλό και μήκους τουλάχιστον k και συνεπώς PATH≥k ∈ NP.
Για την πληρότητα, η αναγωγή f(<G,s,t>)=<G,s,t,|G|-1> (όπου |G| είναι το πλήθος των κόμβων του G) από το HAMILTON PATH επαρκεί. Πράγματι, αν <G,s,t> ∈ HAMILTON PATH, τότε το μονοπάτι Hamilton από s σε t είναι απλό και μήκους «τουλάχιστον» |G|-1= k. Αντίστροφα, αν υπάρχει στο G απλό μονοπάτι από s σε t μήκους τουλάχιστον k=|G|-1, τότε υποχρεωτικά είναι μονοπάτι Hamilton.
(Το HAMILTON PATH είναι ο περιορισμός του δοθέντος προβλήματος PATH≥k για k=|G|-1).
(B) Το πρόβλημα ανήκει στην κλάση P. Πράγματι, είναι γνωστό ότι το πρόβλημα εύρεσης συντομότερης διαδρομής μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Βρίσκουμε λοιπόν το συντομότερο μονοπάτι μεταξύ s και t και αν είναι ≤k τότε αποδεχόμαστε, αλλιώς απορρίπτουμε.
Ο αλγόριθμος τρέχει προφανώς σε πολυωνυμικό χρόνο ως προς |G| και συνεπώς το πρόβλημα ανήκει στην κλάση P.
(Γ)
(1) Αληθές, διότι PATH≤k∈P⊆NP.
(2) Αληθές, διότι το 3SAT είναι NP-πλήρες.
(3) Ψευδές, διότι τότε θα ίσχυε P=NP.

3. Θα ανάγουμε το πρόβλημα της αποδοχής στο πρόβλημα που εκφράζεται από τη γλώσσα *Λ*. Έστω $M_Λ$ ο διαγνώστης για την *Λ* αφού θεωρούμε ότι είναι διαγνώσιμη. Για είσοδο $\langle M, w\rangle$ κατασκευάζουμε μία νέα μηχανή M':
Η M' σε είσοδο $\langle x\rangle$:

1. Σβήνουμε την είσοδο *x* και αναγράφουμε την λέξη-σταθερά *w*.
2. Εξομοιώνουμε την *M* στο *w*

Αν η *M* αποδέχεται το *w* τότε η γλώσσα της M' είναι το Σ^* και άρα ανήκει σε αυτή και η λέξη "ΚΑΛΟ". Αν η *M* δεν αποδέχεται το *w* τότε η γλώσσα της M' είναι το κενό σύνολο και άρα δεν ανήκει σε αυτή και η λέξη "ΚΑΛΟ". Αν εφαρμόσουμε την $M_Λ$ στην M' τότε αυτή θα αποδέχεται ή θα απορρίπτει ακριβώς όταν η *M* αποδέχεται ή απορρίπτει το *w*. Όμως το πρόβλημα της αποδοχής είναι μη διαγνώσιμο, επομένως έχουμε άτοπο και άρα ο διαγνωστής $M_Λ$ δεν μπορεί να υπάρχει. Άρα η γλώσσα *Λ* δεν είναι διαγνώσιμη.

4. Λάθος, Λάθος, Σωστό, Σωστό, *Διφορούμενη (δίνεται υπέρ των φοιτητών)*, Σωστό, Σωστό, Λάθος, Σωστό, Λάθος

5. Η TM M δεν είναι διαγνώστης. Αυτό γιατί σε είσοδο α και $\alpha\alpha$ εγκλωβίζεται. Επίσης, με είσοδο την κενή λέξη απορρίπτει. Όταν η είσοδος έχει τουλάχιστον 3 α τότε σε αυτή την περίπτωση αποδέχεται. Άρα η γλώσσα της M είναι: $L(M) = aaa(a)^*$.

*ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «**ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ**» - 14/6/2022*

Διάρκεια Εξέτασης (2 ώρες και 30 λεπτά) – Ομάδα Β

1. (25 μονάδες) Έστω η γλώσσα $K = \{\langle M \rangle | \eta\ L(M)\ \pi\varepsilon\rho\iota\acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \tau\eta\ \lambda\acute{\varepsilon}\xi\eta\ "KAKO"\}$. Να αποδείξετε ότι η Λ είναι μη-διαγνώσιμη. Με $L(M)$ συμβολίζουμε τη γλώσσα της TM M.

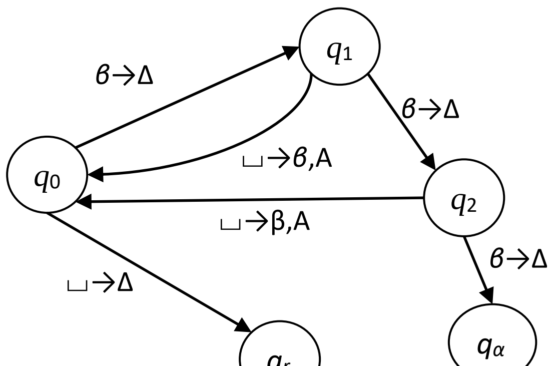
2. (20 μονάδες) Να αναφέρετε για κάθε μία πρόταση αν είναι Αληθής ή Ψευδής χωρίς αιτιολόγηση.
Σε αυτό το θέμα εφαρμόζεται αρνητική βαθμολόγηση. Κάθε σωστή απάντηση δίνει +0.2 και κάθε λάθος -0.2. Η αρνητική βαθμολόγηση δεν μεταφέρεται εκτός της συγκεκριμένης άσκησης.

i. Έστω N μία ανταιτιοκρατική ΤΜ που τρέχει σε χρόνο $t(n)$ και διαγιγνώσκει την γλώσσα L. Τότε: Υπάρχει μία αιτιοκρατική ΤΜ, D, που σε $O(t^2(n))$ βήματα διαγιγνώσκει την L.
ii. Μία γλώσσα είναι αναγνωρίσιμη αν είναι διαγνώσιμη και συμπληρωματικά διαγνώσιμη.
iii. Η αιτιοκρατική ΤΜ είναι ισοδύναμη με την ανταιτιοκρατική ΤΜ όσον αφορά το σύνολο των γλωσσών που μπορούν να διαγνώσουν.
iv. Το θεώρημα των Cook-Levin αναφέρει ότι οποιοσδήποτε αλγόριθμος μπορεί να αναπαρασταθεί από μία ΤΜ.
v. Ένας πραγματικός αριθμός που είναι υπολογίσιμος είναι και περιγράψιμος.
vi. Ισχύει ότι $DTIME(n^3) \subseteq NTIME(n^4)$
vii. Αν μία ανταιτιοκρατική ΤΜ Ν διαγιγνώσκει τη γλώσσα L τότε το συμπλήρωμα της γλώσσας L διαγιγνώσκεται από την ίδια μηχανή Ν συμπληρώνοντας τις εξόδους της.
viii. Αν ένα NP-δυσχερές πρόβλημα ανήκει στο P τότε P=NP.
ix. Υπάρχει απεικονιστική αναγωγή από τη γλώσσα ΑΠΟΔΟΧΗ στη γλώσσα ΚΕΝΟΤΗΤΑ.
x. Αν $A \leq_m B$ και η A είναι διαγνώσιμη τότε και η B είναι διαγνώσιμη.

3. (35 μονάδες)
(Α) (20) Δείξτε ότι το ακόλουθο πρόβλημα είναι NP-πλήρες:
<u>$PATH > k$</u>: Δοθέντος κατευθυντικού γραφήματος G, δύο κόμβων s, t του G και θετικού ακεραίου k, υπάρχει απλή διαδρομή (που σέβεται τις κατευθύνσεις των ακμών) από s σε t μήκους <u>αυστηρά μεγαλύτερο του</u> k.
Υπενθυμίζεται ότι μία απλή διαδρομή είναι μία διαδρομή που δεν περιέχει επαναλήψεις κόμβων.
(Β) (6) Κατατάξτε (με συνοπτική επιχειρηματολογία) το παρακάτω πρόβλημα στη μικρότερη δυνατή κλάση χρονικής πολυπλοκότητας:
<u>$PATH < k$</u>: Δοθέντος γραφήματος G, δύο κόμβων s, t του G και θετικού ακεραίου k, υπάρχει απλή διαδρομή από s σε t μήκους <u>αυστηρά μικρότερου του</u> k;
(Γ) (9) Χαρακτηρίστε ως αληθείς ή ψευδείς τις παρακάτω δηλώσεις και δώστε σύντομη αιτιολόγηση. Για τις απαντήσεις σας θεωρήστε ότι $P \neq NP$.
(1) Το πρόβλημα $PATH < k$ ανήκει στην κλάση coNP.
(2) Υπάρχει αναγωγή του προβλήματος $PATH < k$ στο $ΚΛΙΚΑ$.
(3) Υπάρχει αναγωγή του προβλήματος $HAMILTON\ ΔΙΑΔΡΟΜΗ$ στο πρόβλημα $PATH < k$.

4. (10 μονάδες) Υποθέτοντας ότι $P \neq NP$, να αποδείξετε αν ισχύει ή όχι η εξής πρόταση: Αν κάθε στιγμιότυπο του προβλήματος απόφασης Π_1 είναι και στιγμιότυπο του προβλήματος απόφασης Π_2, και αν το Π_2 είναι NP-δυσχερές (NP-hard) τότε και το Π_1 είναι NP-δυσχερές.

5. (20 μονάδες) Έστω η αιτιοκρατική ΤΜ M όπου $\Sigma = \{\beta\}$ και $\Gamma = \{\beta, \sqcup\}$ με τη διπλανή συνάρτηση μετάβασης. Έστω ότι η αρχική κατάσταση είναι η q_0, η κατάσταση απόρριψης είναι η q_r και η κατάσταση αποδοχής είναι η q_α. Είναι η M διαγνώστης; Ποια είναι η γλώσσα που αναγνωρίζει η M;



Καλή Επιτυχία!!!

Ενδεικτικές Λύσεις Ομάδα Β:

1. Θα ανάγουμε το πρόβλημα της αποδοχής στο πρόβλημα που εκφράζεται από τη γλώσσα K. Έστω M_K ο διαγνώστης για την K αφού θεωρούμε ότι είναι διαγνώσιμη. Για είσοδο $\langle M, w\rangle$ κατασκευάζουμε μία νέα μηχανή M':

Η M' σε είσοδο $\langle x\rangle$:

1. Σβήνουμε την είσοδο x και αναγράφουμε την λέξη-σταθερά w.
2. Εξομοιώνουμε την M στο w

Αν η M αποδέχεται το w τότε η γλώσσα της M' είναι το Σ^* και άρα ανήκει σε αυτή και η λέξη "ΚΑΚΟ". Αν η M δεν αποδέχεται το w τότε η γλώσσα της M' είναι το κενό σύνολο και άρα δεν ανήκει σε αυτή και η λέξη "ΚΑΚΟ". Αν εφαρμόσουμε την M_K στην M' τότε αυτή θα αποδέχεται ή θα απορρίπτει ακριβώς όταν η M αποδέχεται ή απορρίπτει το w. Όμως το πρόβλημα της αποδοχής είναι μη διαγνώσιμο, επομένως έχουμε άτοπο και άρα ο διαγνωστής M_K δεν μπορεί να υπάρχει. Άρα η γλώσσα K δεν είναι διαγνώσιμη.

2. Λάθος, *Διφορούμενη (δόθηκε υπέρ των φοιτητών)*, Σωστό, Λάθος, Σωστό, Σωστό, Λάθος, Σωστό, Λάθος, Λάθος

3. **(Α)** Δοθέντος μονοπατιού p από s σε t στο G, ελέγχεται σε πολυωνυμικό χρόνο αν το μονοπάτι είναι απλό και μήκους αυστηρά μεγαλύτερου του k και συνεπώς PATH>k ∈ NP.

Για την πληρότητα, η αναγωγή f(<G,s,t>)=<G,s,t,|G|-2> (όπου |G| είναι το πλήθος των κόμβων του G) από το HAMILTON PATH επαρκεί. Πράγματι, αν <G,s,t> ∈ HAMILTON PATH, τότε το μονοπάτι Hamilton από s σε t είναι απλό και μήκους αυστηρά μεγαλύτερο από |G|-2= k. Αντίστροφα, αν υπάρχει στο G απλό μονοπάτι από s σε t μήκους αυστηρά μεγαλύτερο από k=|G|-2, τότε υποχρεωτικά είναι μονοπάτι Hamilton. (Το HAMILTON PATH είναι ο περιορισμός του δοθέντος προβλήματος PATH>k για k=|G|-2).

(Β) Το πρόβλημα ανήκει στην κλάση P. Πράγματι, είναι γνωστό ότι το πρόβλημα εύρεσης συντομότερης διαδρομής μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Βρίσκουμε λοιπόν το συντομότερο μονοπάτι μεταξύ s και t και αν είναι <k τότε αποδεχόμαστε, αλλιώς απορρίπτουμε.

Ο αλγόριθμος τρέχει προφανώς σε πολυωνυμικό χρόνο ως προς |G| και συνεπώς το πρόβλημα ανήκει στην κλάση P.

(Γ)

(1) Αληθές, διότι PATH<k∈P⊆coNP.

(2) Αληθές, διότι το ΚΛΙΚΑ είναι NP-πλήρες και P⊆NP.

(3) Ψευδές, διότι τότε θα ίσχυε P=NP.

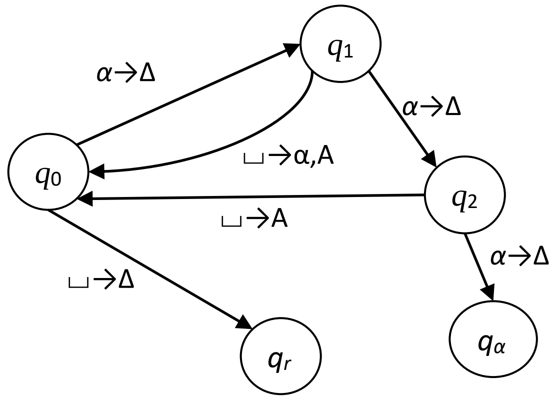
4. Η φράση «Το πρόβλημα απόφασης Π_2 είναι NP-δυσχερές» σημαίνει ότι υπάρχουν κάποια στιγμιότυπα του Π_2 που είναι υπολογιστικά δύσκολα αλλά δεν είναι απαραίτητα όλα τα στιγμιότυπα δύσκολα. Επομένως, μπορεί όλα τα στιγμιότυπα του προβλήματος απόφασης Π_1 να είναι εύκολα δηλαδή το Π_1 να είναι υπολογιστικά εύκολο πρόβλημα. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το SAT που είναι υπολογιστικά δύσκολο και το 2SAT που είναι υπολογιστικά εύκολο. Επομένως η πρόταση δεν ισχύει.

5. Η TM M δεν είναι διαγνώστης. Αυτό γιατί σε είσοδο β και $\beta\beta$ εγκλωβίζεται. Επίσης, με είσοδο την κενή λέξη απορρίπτει. Όταν η είσοδος έχει τουλάχιστον 3 β τότε σε αυτή την περίπτωση αποδέχεται. Άρα η γλώσσα της M είναι: $L(M) = \beta\beta\beta(\beta)^*$.

*ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «**ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ**» - 14/6/2022*

Διάρκεια Εξέτασης (2 ώρες και 30 λεπτά) – Ομάδα Γ

1. (20 μονάδες) Έστω η αιτιοκρατική ΤΜ M όπου $\Sigma = \{\alpha\}$ και $\Gamma = \{\alpha, \sqcup\}$ με τη διπλανή συνάρτηση μετάβασης.Έστω ότι η αρχική κατάσταση είναι η q_0, η κατάσταση απόρριψης είναι η q_r και η κατάσταση αποδοχής είναι η q_α. Είναι η M διαγνώστης; Ποια είναι η γλώσσα που αναγνωρίζει η M;



2. (10 μονάδες) Υποθέτοντας ότι $P \neq NP$, να αποδείξετε αν ισχύει ή όχι η εξής πρόταση: Αν κάθε στιγμιότυπο του προβλήματος απόφασης P_1 είναι και στιγμιότυπο του προβλήματος απόφασης P_2, και αν το P_2 είναι NP-πλήρες τότε και το P_1 είναι NP-πλήρες.

3. (25 μονάδες) Έστω η γλώσσα $\Lambda = \{\langle M\rangle | \eta\ L(M)\ \pi\varepsilon\rho\iota\acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \tau\eta\ \lambda\acute{\varepsilon}\xi\eta\ "KA\Lambda OKAIPI"\}$. Να αποδείξετε ότι η Λ είναι μη-διαγνώσιμη. Με $L(M)$ συμβολίζουμε τη γλώσσα της ΤΜ Μ.

4. (20 μονάδες) Να αναφέρετε για κάθε μία πρόταση αν είναι Αληθής ή Ψευδής χωρίς αιτιολόγηση.
Σε αυτό το θέμα εφαρμόζεται αρνητική βαθμολόγηση. Κάθε σωστή απάντηση δίνει +0.2 και κάθε λάθος -0.2. Η αρνητική βαθμολόγηση δεν μεταφέρεται εκτός της συγκεκριμένης άσκησης.

i. Δοθέντος ενός Η/Υ με 100TB συνολική μνήμη και ενός προγράμματος για αυτόν τον Η/Υ, δεν μπορούμε να διαγνώσουμε αν το πρόγραμμα τερματίζει.
ii. Το αλφάβητο ταινίας Γ μίας πολυταινιακής ΤΜ δεν μπορεί να συμπίπτει με το αλφάβητο εισόδου Σ.
iii. Αν $NPC = coNPC$ τότε $NP = coNP$. (NPC είναι η κλάση των NP-πλήρων γλωσσών)
iv. Μία καθολική ΤΜ μπορεί να εξομοιώσει οποιαδήποτε άλλη ΤΜ
v. Όλοι οι πραγματικοί αριθμοί είναι υπολογίσιμοι.
vi. Μία απεικονιστική αναγωγή εκθετικού χρόνου δεν μπορεί να διαχωρίσει τις κλάσεις P και NP.
vii. Υπάρχει απεικονιστική αναγωγή από τη γλώσσα ΑΠΟΔΟΧΗ στη γλώσσα ΚΕΝΟΤΗΤΑ.
viii. Αν μία ανταιτιοκρατική ΤΜ Ν διαγιγνώσκει τη γλώσσα L τότε το συμπλήρωμα της γλώσσας L διαγιγνώσκεται από την ίδια μηχανή Ν συμπληρώνοντας τις εξόδους της.
ix. Αν ένα πρόβλημα Β ανάγεται απεικονιστικά σε πολυωνυμικό χρόνο στο πρόβλημα Α τότε και το Α μπορεί να αναχθεί απεικονιστικά σε πολυωνυμικό χρόνο στο Β.
x. Αν ένα NP-δυσχερές πρόβλημα ανήκει στο co-P τότε P=NP.

5. (35 μονάδες) (Α) (20) Δείξτε ότι το ακόλουθο πρόβλημα είναι NP-πλήρες:
$\underline{CYCLE \geq k}$: Δοθέντος κατευθυντικού γραφήματος G και θετικού ακεραίου k, υπάρχει απλός κύκλος (που σέβεται τις κατευθύνσεις των ακμών) μήκους <u>τουλάχιστον</u> k.
Υπενθυμίζεται ότι ένας απλός κύκλος είναι ένας κύκλος που δεν περιέχει επαναλήψεις κόμβων.
(Β) (6) Κατατάξτε (με συνοπτική επιχειρηματολογία) το παρακάτω πρόβλημα στη μικρότερη δυνατή κλάση χρονικής πολυπλοκότητας:
$\underline{PATH \leq k}$: Δοθέντος γραφήματος G, δύο κόμβων s, t του G και θετικού ακεραίου k, υπάρχει απλή διαδρομή από s σε t μήκους <u>το πολύ</u> k;
(Γ) (9) Χαρακτηρίστε ως αληθείς ή ψευδείς τις παρακάτω δηλώσεις και δώστε σύντομη αιτιολόγηση. Για τις απαντήσεις σας θεωρήστε ότι $P \neq NP$.
(1) Το πρόβλημα $PATH \leq k$ ανήκει στην κλάση NP.
(2) Υπάρχει αναγωγή του προβλήματος $PATH \leq k$ στο SAT.
(3) Υπάρχει αναγωγή του προβλήματος $HAMILTON\ KYK\Lambda O\Sigma$ στο πρόβλημα $PATH \leq k$.

Καλή Επιτυχία!!!

Ενδεικτικές Λύσεις Ομάδα Γ:

1. Η TM M δεν είναι διαγνώστης. Αυτό γιατί σε είσοδο α και $\alpha\alpha$ εγκλωβίζεται. Επίσης, με είσοδο την κενή λέξη απορρίπτει. Όταν η είσοδος έχει τουλάχιστον 3 α τότε σε αυτή την περίπτωση αποδέχεται. Άρα η γλώσσα της M είναι: $L(M) = aaa(a)^*$.

2. Η φράση «Το πρόβλημα απόφασης P_2 είναι NP-πλήρες» σημαίνει ότι υπάρχουν κάποια στιγμιότυπα του P_2 που είναι υπολογιστικά δύσκολα αλλά δεν είναι απαραίτητα όλα τα στιγμιότυπα δύσκολα. Επομένως, μπορεί όλα τα στιγμιότυπα του προβλήματος απόφασης P_1 να είναι εύκολα δηλαδή το P_1 να είναι υπολογιστικά εύκολο πρόβλημα. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το SAT που είναι υπολογιστικά δύσκολο και NP-πλήρες και το 2SAT που είναι υπολογιστικά εύκολο και ανήκει στο P. Επομένως η πρόταση δεν ισχύει.

3. Θα ανάγουμε το πρόβλημα της αποδοχής στο πρόβλημα που εκφράζεται από τη γλώσσα *Λ*. Έστω $M_Λ$ ο διαγνώστης για την *Λ* αφού θεωρούμε ότι είναι διαγνώσιμη. Για είσοδο $\langle M, w\rangle$ κατασκευάζουμε μία νέα μηχανή M':

Η M' σε είσοδο $\langle x\rangle$:

1. Σβήνουμε την είσοδο x και αναγράφουμε την λέξη-σταθερά w.
2. Εξομοιώνουμε την M στο w

Αν η M αποδέχεται το w τότε η γλώσσα της M' είναι το Σ^* και άρα ανήκει σε αυτή και η λέξη "ΚΑΛΟΚΑΙΡΙ". Αν η M δεν αποδέχεται το w τότε η γλώσσα της M' είναι το κενό σύνολο και άρα δεν ανήκει σε αυτή και η λέξη "ΚΑΛΟΚΑΙΡΙ". Αν εφαρμόσουμε την $M_Λ$ στην M' τότε αυτή θα αποδέχεται ή θα απορρίπτει ακριβώς όταν η M αποδέχεται ή απορρίπτει το w. Όμως το πρόβλημα της αποδοχής είναι μη διαγνώσιμο, επομένως έχουμε άτοπο και άρα ο διαγνωστής $M_Λ$ δεν μπορεί να υπάρχει. Άρα η γλώσσα *Λ* δεν είναι διαγνώσιμη.

4. Λάθος, Σωστό, Σωστό, Σωστό, Λάθος, Σωστό, Λάθος, Λάθος, Λάθος, Σωστό

5. **(A)** Δοθέντος κύκλου στο G, ελέγχεται σε πολυωνυμικό χρόνο αν ο κύκλος είναι απλός και μήκους τουλάχιστον k και συνεπώς CYCLE≥k ∈ NP.

Για την πληρότητα, η αναγωγή f(<G,s,t>)=<G,s,t,|G|> (όπου |G| είναι το πλήθος των κόμβων του G) από το HAMILTON ΚΥΚΛΟΣ επαρκεί. Πράγματι, αν <G> ∈ HAMILTON ΚΥΚΛΟΣ, τότε ο κύκλος Hamilton είναι απλός και μήκους «τουλάχιστον» |G|= k. Αντίστροφα, αν υπάρχει στο G απλό κύκλος μήκους τουλάχιστον k=|G|, τότε υποχρεωτικά είναι κύκλος Hamilton.

(Το HAMILTON ΚΥΚΛΟΣ είναι ο περιορισμός του δοθέντος προβλήματος CYCLE≥k για k=|G|).

(B) Το πρόβλημα ανήκει στην κλάση P. Πράγματι, είναι γνωστό ότι το πρόβλημα εύρεσης συντομότερης διαδρομής μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Βρίσκουμε λοιπόν το συντομότερο μονοπάτι μεταξύ s και t και αν είναι ≤k τότε αποδεχόμαστε, αλλιώς απορρίπτουμε.

Ο αλγόριθμος τρέχει προφανώς σε πολυωνυμικό χρόνο ως προς |G| και συνεπώς το πρόβλημα ανήκει στην κλάση P.

(Γ)

(1) Αληθές, διότι PATH≤k∈P⊆NP.

(2) Αληθές, διότι το SAT είναι NP-πλήρες.

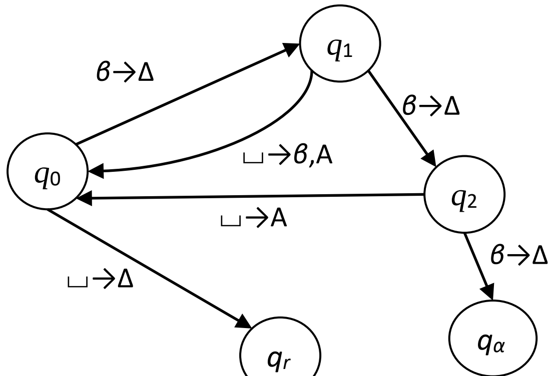
(3) Ψευδές, διότι τότε θα ίσχυε P=NP.

*ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «**ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ**» - 14/6/2022*

Διάρκεια Εξέτασης (2 ώρες και 30 λεπτά) – Ομάδα Δ

1. (35 μονάδες) (A) (20) Δείξτε ότι το ακόλουθο πρόβλημα είναι NP-πλήρες:
$\underline{CYCLE > k}$: Δοθέντος κατευθυντικού γραφήματος G και θετικού ακεραίου k, υπάρχει απλός κύκλος (που σέβεται τις κατευθύνσεις των ακμών) μήκους <u>αυστηρά μεγαλύτερου από</u> k.
Υπενθυμίζεται ότι ένας απλός κύκλος είναι ένας κύκλος που δεν περιέχει επαναλήψεις κόμβων.
(B) (6) Κατατάξτε (με συνοπτική επιχειρηματολογία) το παρακάτω πρόβλημα στη μικρότερη δυνατή κλάση χρονικής πολυπλοκότητας:
$\underline{PATH < k}$: Δοθέντος γραφήματος G, δύο κόμβων s, t του G και θετικού ακεραίου k, υπάρχει απλή διαδρομή από s σε t μήκους <u>αυστηρά μικρότερου του</u> k;
(Γ) (9) Χαρακτηρίστε ως αληθείς ή ψευδείς τις παρακάτω δηλώσεις και δώστε σύντομη αιτιολόγηση. Για τις απαντήσεις σας θεωρήστε ότι $P \neq NP$.
(1) Το πρόβλημα $PATH < k$ ανήκει στην κλάση $coNP$.
(2) Υπάρχει αναγωγή του προβλήματος $PATH < k$ στο SAT.
(3) Υπάρχει αναγωγή του προβλήματος $HAMILTON\ KYKΛΟΣ$ στο πρόβλημα $PATH < k$.

2. (20 μονάδες) Έστω η αιτιοκρατική TM M όπου $\Sigma = \{\beta\}$ και $\Gamma = \{\beta, \sqcup\}$ με την εξής συνάρτηση μετάβασης: Έστω ότι η αρχική κατάσταση είναι η q_0, η κατάσταση απόρριψης είναι η q_r και η κατάσταση αποδοχής είναι η q_α. Είναι η M διαγνώστης; Ποια είναι η γλώσσα που αναγνωρίζει η M;



3. (25 μονάδες) Έστω η γλώσσα $K = \{\langle M\rangle | \eta\ L(M)\ \pi\varepsilon\rho\iota\acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \tau\eta\ \lambda\acute{\varepsilon}\xi\eta\ "XEIM\Omega NA\Sigma"\}$. Να αποδείξετε ότι η K είναι μη-διαγνώσιμη. Με $L(M)$ συμβολίζουμε τη γλώσσα της TM M.

4. (10 μονάδες) Υποθέτοντας ότι $P \neq NP$, να αποδείξετε αν ισχύει ή όχι η εξής πρόταση: Αν κάθε στιγμιότυπο του προβλήματος απόφασης Π_1 είναι και στιγμιότυπο του προβλήματος απόφασης Π_2, και αν το Π_2 είναι NP-πλήρες τότε και το Π_1 είναι NP-πλήρες.

5. (20 μονάδες) Να αναφέρετε για κάθε μία πρόταση αν είναι Αληθής ή Ψευδής χωρίς αιτιολόγηση.
Σε αυτό το θέμα εφαρμόζεται αρνητική βαθμολόγηση. Κάθε σωστή απάντηση δίνει +0.2 και κάθε λάθος -0.2. Η αρνητική βαθμολόγηση δεν μεταφέρεται εκτός της συγκεκριμένης άσκησης.

i. Μία TM με πεπερασμένη μνήμη διαγιγνώσκει τις ίδιες γλώσσες με μία TM με άπειρη μνήμη.
ii. Αν $A \leq_m B$ και η A είναι διαγνώσιμη τότε και η B είναι διαγνώσιμη.
iii. Έστω N μία πολυταινιακή TM που τρέχει σε χρόνο $t(n)$ και διαγιγνώσκει την γλώσσα L. Τότε, υπάρχει μία αιτιοκρατική μονοταινιακή TM, D, που σε $O(t^2(n))$ βήματα διαγιγνώσκει την L.
iv. Αν SAT∈coNP τότε και coSAT∈NP.
v. Η αιτιοκρατική μονοταινιακή TM είναι ισοδύναμη με την αιτιοκρατική πολυταινιακή TM όσον αφορά το σύνολο των γλωσσών που μπορούν να διαγνώσουν.
vi. Μία καθολική TM μπορεί να εξομοιώσει οποιαδήποτε άλλη TM.
vii. Μία απεικονιστική αναγωγή εκθετικού χρόνου δεν μπορεί να διαχωρίσει τις κλάσεις P και NP.
viii. Υπάρχει απεικονιστική αναγωγή από τη γλώσσα ΑΠΟΔΟΧΗ στη γλώσσα ΚΕΝΟΤΗΤΑ.
ix. Αν μία αιτιοκρατική TM M διαγιγνώσκει τη γλώσσα L τότε το συμπλήρωμα της γλώσσας L διαγιγνώσκεται από την ίδια μηχανή M συμπληρώνοντας τις εξόδους της.
x. Αν ένα NP-δυσχερές πρόβλημα ανήκει στο coP τότε P=NP.

Καλή Επιτυχία!!!

Ενδεικτικές Λύσεις Ομάδα Δ:

1. **(Α)** Δοθέντος κύκλου στο G, ελέγχεται σε πολυωνυμικό χρόνο αν ο κύκλος είναι απλός και μήκους αυστηρά μεγαλύτερου του k και συνεπώς CYCLE>k ∈ NP.
Για την πληρότητα, η αναγωγή f(<G,s,t>)=<G,s,t,|G|-1> (όπου |G| είναι το πλήθος των κόμβων του G) από το HAMILTON ΚΥΚΛΟΣ επαρκεί. Πράγματι, αν <G> ∈ HAMILTON ΚΥΚΛΟΣ, τότε ο κύκλος Hamilton είναι απλός και μήκους αυστηρά μεγαλύτερου του |G|-1= k. Αντίστροφα, αν υπάρχει στο G απλό κύκλος μήκους αυστηρά μεγαλύτερου του k=|G|-1, τότε υποχρεωτικά είναι κύκλος Hamilton.
(Το HAMILTON ΚΥΚΛΟΣ είναι ο περιορισμός του δοθέντος προβλήματος CYCLE>k για k=|G|-1).
(Β) Το πρόβλημα ανήκει στην κλάση P. Πράγματι, είναι γνωστό ότι το πρόβλημα εύρεσης συντομότερης διαδρομής μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Βρίσκουμε λοιπόν το συντομότερο μονοπάτι μεταξύ s και t και αν είναι <k τότε αποδεχόμαστε, αλλιώς απορρίπτουμε.
Ο αλγόριθμος τρέχει προφανώς σε πολυωνυμικό χρόνο ως προς |G| και συνεπώς το πρόβλημα ανήκει στην κλάση P.
(Γ)
(1) Αληθές, διότι PATH<k∈P⊆coNP.
(2) Αληθές, διότι το SAT είναι NP-πλήρες και P⊆NP.
(3) Ψευδές, διότι τότε θα ίσχυε P=NP.

2. Η TM M δεν είναι διαγνώστης. Αυτό γιατί σε είσοδο β και $\beta\beta$ εγκλωβίζεται. Επίσης, με είσοδο την κενή λέξη απορρίπτει. Όταν η είσοδος έχει τουλάχιστον 3 β τότε σε αυτή την περίπτωση αποδέχεται. Άρα η γλώσσα της M είναι: $L(M) = \beta\beta\beta(\beta)^*$.

3. Θα ανάγουμε το πρόβλημα της αποδοχής στο πρόβλημα που εκφράζεται από τη γλώσσα K. Έστω M_K ο διαγνώστης για την K αφού θεωρούμε ότι είναι διαγνώσιμη. Για είσοδο $\langle M, w\rangle$ κατασκευάζουμε μία νέα μηχανή M':
Η M' σε είσοδο $\langle x\rangle$:

1. Σβήνουμε την είσοδο x και αναγράφουμε την λέξη-σταθερά w.
2. Εξομοιώνουμε την M στο w

Αν η M αποδέχεται το w τότε η γλώσσα της M' είναι το Σ^* και άρα ανήκει σε αυτή και η λέξη "ΧΕΙΜΩΝΑΣ". Αν η M δεν αποδέχεται το w τότε η γλώσσα της M' είναι το κενό σύνολο και άρα δεν ανήκει σε αυτή και η λέξη "ΧΕΙΜΩΝΑΣ". Αν εφαρμόσουμε την M_K στην M' τότε αυτή θα αποδέχεται ή θα απορρίπτει ακριβώς όταν η M αποδέχεται ή απορρίπτει το w. Όμως το πρόβλημα της αποδοχής είναι μη διαγνώσιμο, επομένως έχουμε άτοπο και άρα ο διαγνωστής M_K δεν μπορεί να υπάρχει. Άρα η γλώσσα K δεν είναι διαγνώσιμη.

4. Η φράση «Το πρόβλημα απόφασης Π_2 είναι NP-πλήρες» σημαίνει ότι υπάρχουν κάποια στιγμιότυπα του Π_2 που είναι υπολογιστικά δύσκολα αλλά δεν είναι απαραίτητα όλα τα στιγμιότυπα δύσκολα. Επομένως, μπορεί όλα τα στιγμιότυπα του προβλήματος απόφασης Π_1 να είναι εύκολα δηλαδή το Π_1 να είναι υπολογιστικά εύκολο πρόβλημα. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το SAT που είναι υπολογιστικά δύσκολο και NP-πλήρες και το 2SAT που είναι υπολογιστικά εύκολο και ανήκει στο P. Επομένως η πρόταση δεν ισχύει.

4. Λάθος, Λάθος, Σωστό, Σωστό, Σωστό, Σωστό, Σωστό, Λάθος, Σωστό, Σωστό.