

Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

Φροντιστηριακές ασκήσεις

1 Ντετερμινιστικές μηχανές

Ερώτηση 1. Πότε μια γλώσσα λέγεται αναγνωρίσιμη και πότε διαγνώσιμη;

Απάντηση. Μια γλώσσα λέγεται αναγνωρίσιμη αν υπάρχει μηχανή Turing που να την αναγνωρίζει, δηλαδή, αν υπάρχει μηχανή Turing που να αποδέχεται όλες τις λέξεις της γλώσσας και δεν αποδέχεται τις υπόλοιπες (είτε τις απορρίπτει είτε εγκλωβίζεται). Από την άλλη, μια γλώσσα λέγεται διαγνώσιμη αν υπάρχει μηχανή Turing που να την διαγιγνώσκει, δηλαδή, αν υπάρχει μηχανή Turing που να αποδέχεται όλες τις λέξεις της γλώσσας και να απορρίπτει όλες τις λέξεις που δεν ανήκουν στην γλώσσα. Η κλάση των διαγνώσιμων γλωσσών είναι υποκλάση της κλάσης των αναγνωρίσιμων γλωσσών.

Ερώτηση 2. Είναι δυνατόν μια μηχανή Turing να διαβάσει στο πρώτο βήμα λειτουργία της κάποιο σύμβολο που δεν ανήκει στο αλφάβητο εισόδου και δεν είναι το κενό;

Απάντηση. ΟΧΙ! Όταν μια μηχανή Turing ξεκινά την λειτουργία της, η κεφαλή είναι τοποθετημένη στην πρώτη θέση της συμβολοσειράς εισόδου. Συνεπώς, η μηχανή στο πρώτο βήμα θα διαβάσει είτε κάποιο σύμβολο από το αλφάβητο εισόδου είτε το σύμβολο κενού σε περίπτωση που η είσοδος είναι η κενή συμβολοσειρά.

Ερώτηση 3. Είναι δυνατόν μια μηχανή Turing να διαβάσει στο δεύτερο βήμα λειτουργία της κάποιο σύμβολο που δεν ανήκει στο αλφάβητο εισόδου και δεν είναι το κενό;

Απάντηση. ΝΑΙ! Αρχικά η κεφαλή βρίσκεται στο πρώτο κελί της ταινίας. Τώρα, φανταστείτε ότι στο πρώτο βήμα η μηχανή γράφει εκεί ένα σύμβολο $x \in \Gamma \setminus \{\Sigma \cup \{\sqcup\}\}$ και επιχειρεί να μετακινήσει την κεφαλή αριστερά. Αφού δεν γίνεται να πάει πιο αριστερά, η κεφαλή παραμένει στο πρώτο κελί της ταινίας. Επομένως, στο δεύτερο βήμα η μηχανή αναγκαστικά θα διαβάσει το x το οποίο ούτε ανήκει στο αλφάβητο εισόδου ούτε είναι το κενό.

Ερώτηση 4. Είναι δυνατόν μια ντετερμινιστική μηχανή Turing να βρεθεί περισσότερες από μία φορές στην κατάσταση αποδοχής;

Απάντηση. ΟΧΙ! Οι ειδικές καταστάσεις αποδοχής και απόρριψης (τερματικές καταστάσεις) προκαλούν τον άμεσο τερματισμό του υπολογισμού. □

Ερώτηση 5. Είναι δυνατόν μια μηχανή Turing να βρεθεί περισσότερες από μία φορές στην αρχική κατάσταση q_0 ;

Απάντηση. Προφανώς! Φανταστείτε την μηχανή Turing

	α	\sqcup
q_0	(q_1, \sqcup, Δ)	$(q_{\text{ΟΧΙ}}, \sqcup, A)$
q_1	(q_0, \sqcup, Δ)	$(q_{\text{ΝΑΙ}}, \sqcup, A)$

η οποία διαγιγνώσκει την γλώσσα που αποτελείται από συμβολοσειρές με περιττό πλήθος από α . Για είσοδο συμβολοσειρές που περιέχουν περισσότερα του ενός α βρίσκεται αρκετές φορές τόσο στη q_0 όσο και στη q_1 . □

Ερώτηση 6. Πότε μπορεί να εγκλωβιστεί ένας διαγνώστης;

Απάντηση. Ποτέ! Ένας διαγνώστης τερματίζει πάντα: είτε αποδέχεται είτε απορρίπτει την είσοδο. □

Ερώτηση 7. Είναι δυνατόν μια μηχανή Turing να μη φτάνει ποτέ ούτε στην κατάσταση αποδοχής $q_{\text{ΝΑΙ}}$ ούτε στην κατάσταση απόρριψης $q_{\text{ΟΧΙ}}$;

Απάντηση. ΝΑΙ! Για παράδειγμα, έστω η μηχανή Turing

	α	\sqcup
q_0	(q_1, α, A)	(q_1, α, A)
q_1	(q_1, α, A)	$(q_{\text{ΝΑΙ}}, \sqcup, \Delta)$

η οποία, για οποιαδήποτε είσοδο, εγκλωβίζεται στη κατάσταση q_1 . □

Άσκηση 8. Δίνονται γλώσσες A και B που ορίζονται πάνω στο ίδιο αλφάβητο εισόδου Σ . Αποδείξτε ότι αν οι A και B είναι διαγνώσιμες (αναγνωρίσιμες), τότε και η γλώσσα $A \cap B$ είναι διαγνώσιμη (αναγνωρίσιμη).

Λύση. Έστω M_A και M_B οι μηχανές Turing που τις διαγιγνώσκουν, αντίστοιχα. Ο διαγνώστης για την γλώσσα $A \cap B$ θα πρέπει να εκτελέσει σειριακά τις δύο αυτές μηχανές ως εξής:

$M_{A \cap B}$ = “Για είσοδο μια συμβολοσειρά w :

1. Τρέξε την M_A για είσοδο w .
2. Αν απορρίψει, τότε απέρριψε.

3. Αλλιώς:

- α. Τρέξε την M_B για είσοδο w .
- β. Αν αποδεχτεί, τότε αποδέξου.
- γ. Αλλιώς, απέρριψε.”

Η συγκεκριμένη μηχανή μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την περίπτωση όπου οι A και B είναι αναγνωρίσιμες γλώσσες. Ας κάνουμε debug για να το διαπιστώσουμε.

- Έστω μια συμβολοσειρά $w \in A \cap B$. Τότε, εφόσον η M_A αναγνωρίζει την γλώσσα A και $w \in A$, η M_A τερματίζει και αποδέχεται την w . Αντίστοιχα, εφόσον η M_B αναγνωρίζει την γλώσσα B και $w \in B$, η M_B αποδέχεται και αυτή την w . Συνεπώς, η $M_{A \cap B}$ τερματίζει και αποδέχεται όλες τις λέξεις $w \in A \cap B$.
- Έστω μια συμβολοσειρά $w \notin A \cap B$. Τότε, υπάρχουν τρεις περιπτώσεις,
 1. Αν $(w \notin A, w \notin B)$, τότε εφόσον η M_A εκτελείται πρώτη και αναγνωρίζει την A , είτε θα απορρίψει την A είτε θα εγκλωβιστεί. Συνεπώς, η $M_{A \cap B}$ είτε θα απορρίψει είτε θα εγκλωβιστεί.
 2. Αν $(w \notin A, w \in B)$, τότε και πάλι η M_A είτε θα απορρίψει είτε θα εγκλωβιστεί με αποτέλεσμα η $M_{A \cap B}$ είτε να απορρίψει είτε να εγκλωβιστεί.
 3. Αν $(w \in A, w \notin B)$, τότε η M_A θα αποδεχτεί την w και στην συνέχεια η M_B , εφόσον αναγνωρίζει την B , είτε θα απορρίψει είτε θα εγκλωβιστεί. Συνεπώς, και πάλι η $M_{A \cap B}$ είτε θα απορρίψει είτε θα εγκλωβιστεί. □

Άσκηση 9. Δίνονται γλώσσες A και B που ορίζονται πάνω στο ίδιο αλφάβητο εισόδου Σ . Αποδείξτε ότι αν οι A και B είναι διαγνώσιμες (αναγνωρίσιμες), τότε και η γλώσσα $A \cup B$ είναι διαγνώσιμη (αναγνωρίσιμη).

Απάντηση. Έστω M_A και M_B οι μηχανές Turing που διαγιγνώσκουν τις δυο γλώσσες. Ο διαγνώστης για την γλώσσα $A \cup B$ θα πρέπει να εκτελέσει σειριακά τις δύο αυτές μηχανές ως εξής:

$M_{A \cup B} =$ “Για είσοδο μια συμβολοσειρά w :

1. Τρέξε την M_A για είσοδο w .
2. Αν αποδεχτεί, τότε αποδέξου.
3. Αλλιώς:
 - α. Τρέξε την M_B για είσοδο w .
 - β. Αν αποδεχτεί, τότε αποδέξου.
 - γ. Αλλιώς, απέρριψε.”

Τώρα, προσέξτε ότι η συγκεκριμένη μηχανή **δεν** μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την περίπτωση των αναγνωρίσιμων γλωσσών. Αν $w \in A \cup B$, τότε στην περίπτωση όπου ($w \notin A, w \in B$) η M_A ενδέχεται να εγκλωβιστεί με αποτέλεσμα να εγκλωβιστεί και η $M_{A \cup B}$ καθώς ο έλεγχος δεν θα φτάσει ποτέ στην M_B . Συνεπώς, θα πρέπει να εκτελέσουμε *ταυτόχρονα* τις δύο μηχανές. Αν κάποια από αυτές αποδεχτεί, τότε αποδεχόμαστε. Αν και οι δύο απορρίψουν, τότε απορρίπτουμε. Αν κάποια από αυτές εγκλωβιστεί, τότε εγκλωβίζομαστε. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε την εξής μηχανή:

$M_{A \cup B} =$ “Για είσοδο μια συμβολοσειρά w :

1. Τρέξε ταυτόχρονα τις M_A και M_B για είσοδο w .
2. Αν κάποια από αυτές αποδεχτεί, τότε αποδέξου.
3. Αλλιώς, απέρριψε.” □

Άσκηση 10. Δείξτε ότι αν η γλώσσα A είναι αναγνωρίσιμη και η γλώσσα B είναι διαγνώσιμη, τότε η γλώσσα $A \cap \bar{B}$ είναι αναγνωρίσιμη.

Απάντηση. Εφόσον η κλάση των διαγνώσιμων γλωσσών είναι κλειστή ως προς το συμπλήρωμα και η γλώσσα B είναι διαγνώσιμη, τότε η γλώσσα \bar{B} είναι επίσης διαγνώσιμη. Εφόσον η κλάση των διαγνώσιμων γλωσσών είναι υποκλάση της κλάσης των αναγνωρίσιμων γλωσσών, η \bar{B} είναι και αναγνωρίσιμη. Ακόμη, γνωρίζουμε ότι η κλάση των αναγνωρίσιμων γλωσσών είναι κλειστή ως προς την τομή. Συνεπώς, η γλώσσα $A \cap \bar{B}$ είναι αναγνωρίσιμη. □

Άσκηση 11. Δίνεται μια μηχανή Turing με αρχική κατάσταση q_0 και συνάρτηση μεταβάσεων η οποία δίνεται από τον πίνακα:

	α	\sqcup
q_0	(q_1, α, Δ)	(q_0, α, A)
q_1	(q_2, α, Δ)	(q_{OXI}, \sqcup, A)
q_2	(q_0, α, Δ)	(q_{NAI}, \sqcup, A)

Ποια είναι η γλώσσα του αλφαβήτου $\Sigma = \{\alpha\}$ που αναγνωρίζει η μηχανή αυτή; Είναι διαγνώστης;

Απάντηση. Για να βρούμε την γλώσσα που αναγνωρίζει η μηχανή, θα πρέπει να κάνουμε κάποια παραδείγματα. Αρχικά, πρέπει να ελέγξουμε αν αποδέχεται ή όχι την κενή συμβολοσειρά. Σε μια τέτοια περίπτωση, έχουμε την εξής ακολουθία φάσεων του υπολογισμού:

$q_0 \sqcup$
 $q_0 \alpha \sqcup$
 $\alpha q_1 \sqcup$
 $q_{OXI} \alpha \sqcup$

Συνεπώς, η μηχανή δεν αποδέχεται την κενή συμβολοσειρά. Από το ίδιο παράδειγμα μπορούμε να δούμε ότι η μηχανή δεν αποδέχεται και την συμβολοσειρά $w = \alpha$.

Στην περίπτωση όπου η είσοδος είναι η συμβολοσειρά $w = \alpha\alpha$, έχουμε την εξής ακολουθία φάσεων υπολογισμού:

$$\begin{aligned} q_0\alpha\alpha\sqcup \\ \alpha q_1\alpha\sqcup \\ \alpha\alpha q_2\sqcup \\ \alpha q_{\text{NAI}}\alpha\sqcup \end{aligned}$$

Συνεπώς, η μηχανή αποδέχεται την συμβολοσειρά $w = \alpha\alpha$.

Στην περίπτωση όπου η είσοδος είναι η συμβολοσειρά $w = \alpha\alpha\alpha$, έχουμε την εξής ακολουθία φάσεων υπολογισμού:

$$\begin{aligned} q_0\alpha\alpha\alpha\sqcup \\ \alpha q_1\alpha\alpha\sqcup \\ \alpha\alpha q_2\alpha\sqcup \\ \alpha\alpha\alpha q_0\sqcup \\ \alpha\alpha q_0\alpha\alpha\sqcup \\ \alpha\alpha\alpha q_1\alpha\sqcup \\ \alpha\alpha\alpha\alpha q_2\sqcup \\ \alpha\alpha\alpha q_{\text{NAI}}\alpha\sqcup \end{aligned}$$

Συνεπώς, η μηχανή αποδέχεται την συμβολοσειρά $w = \alpha\alpha\alpha$.

Στο σημείο αυτό μπορούμε να βρούμε την γλώσσα που αναγνωρίζει η μηχανή. Παρατηρήστε το γεγονός ότι όταν η μηχανή βρίσκεται είτε στην κατάσταση q_0 (και η κεφαλή δε βρίσκεται στη πρώτη θέση της ταινίας) είτε στην κατάσταση q_2 και η συμβολοσειρά που απομένει είναι της μορφής $(\alpha\alpha\alpha)^*$, τότε γίνεται ένας κύκλος στις καταστάσεις ο οποίος οδηγεί στην κατάσταση αποδοχής. Αντίθετα, όταν η μηχανή βρίσκεται στην κατάσταση q_1 και η συμβολοσειρά που απομένει είναι της μορφής $(\alpha\alpha\alpha)^*$, τότε γίνεται ένας κύκλος στις καταστάσεις ο οποίος οδηγεί στην κατάσταση απόρριψης. Αυτό σημαίνει ότι η γλώσσα που αναγνωρίζει η μηχανή είναι η $(\alpha\alpha + \alpha\alpha\alpha)(\alpha\alpha\alpha)^*$. Η μηχανή είναι διαγνώστης καθώς απορρίπτει όλες τις υπόλοιπες λέξεις, δηλαδή την κενή και οποιαδήποτε συμβολοσειρά της μορφής $\alpha(\alpha\alpha\alpha)^*$. □

2 Μη-ντετερμινιστικές μηχανές

Ερώτηση 12. Πότε λέμε ότι μια μη-ντετερμινιστική μηχανή Turing αποδέχεται και πότε ότι απορρίπτει;

Απάντηση. Μια μη-ντετερμινιστική μηχανή Turing αποδέχεται την είσοδο της όταν υπάρχει κάποιος κλάδος υπολογισμού ο οποίος να οδηγεί στην κατάσταση αποδοχής. Αντίθετα, αν όλοι οι κλάδοι υπολογισμού οδηγούν στην κατάσταση απόρριψης, τότε και μόνο τότε μια τέτοια μηχανή λέμε ότι απορρίπτει. □

Ερώτηση 13. Πότε μια μη-ντετερμινιστική μηχανή Turing λέγεται διαγνώστης;

Απάντηση. Μια μη-ντετερμινιστική μηχανή Turing λέγεται διαγνώστης όταν όλοι οι κλάδοι υπολογισμού τερματίζουν είτε στην κατάσταση αποδοχής είτε στην κατάσταση απόρριψης. □

Ερώτηση 14. Υπάρχει μη-ντετερμινιστική μηχανή με γλώσσα το Σ^* που δεν είναι διαγνώστης;

Απάντηση. ΝΑΙ! Για παράδειγμα, η μη-ντετερμινιστική μηχανή Turing με αλφάβητο $\Sigma = \{\alpha\}$,

	α	\sqcup
q_0	$(q_{\text{ΝΑΙ}}, \sqcup, A)$ (q_0, α, A)	$(q_{\text{ΝΑΙ}}, \sqcup, A)$

αποδέχεται όλες τις συμβολοσειρές, αλλά επίσης εγκλωβίζεται καθώς, κατά τον υπολογισμό, δημιουργεί όλες τις συμβολοσειρές που περιέχουν οσοδήποτε αριθμό από α . □

Άσκηση 15. Δίνεται μια μηχανή Turing με αρχική κατάσταση q_0 και συνάρτηση μεταβάσεων η οποία δίνεται από τον πίνακα:

	α	\sqcup
q_0	$(q_{\text{ΝΑΙ}}, \sqcup, A)$ (q_1, α, Δ)	$(q_{\text{ΟΧΙ}}, \sqcup, A)$
q_1	(q_0, α, A)	$(q_{\text{ΟΧΙ}}, \sqcup, A)$

Ποια είναι η γλώσσα του αλφαβήτου $\Sigma = \{\alpha\}$ που αναγνωρίζει η μηχανή αυτή; Είναι διαγνώστης;

Απάντηση. Αν η είσοδος είναι η κενή συμβολοσειρά, τότε έχουμε την εξής ακολουθία φάσεων υπολογισμού:

$q_0 \sqcup$

$q_0 \alpha \sqcup$

Αν η είσοδος είναι η συμβολοσειρά $w = \alpha$, τότε η μηχανή την αποδέχεται καθώς υπάρχει η εξής ακολουθία φάσεων υπολογισμού:

$$q_0 \alpha \sqcup$$

$$q_{\text{ΝΑΙ}} \sqcup$$

Γενικά, παρατηρήστε ότι αν η μηχανή βρίσκεται στην κατάσταση q_0 και διαβάσει το σύμβολο α τότε υπάρχει πάντα μετάβαση στην κατάσταση αποδοχής. Αυτό σημαίνει ότι η μηχανή απορρίπτει μόνο την κενή συμβολοσειρά και άρα, η γλώσσα που αναγνωρίζει είναι η $\alpha\alpha^*$.

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα σχετικά με το αν η μη-ντετερμινιστική αυτή μηχανή είναι διαγνώστης, θα πρέπει να θυμηθούμε ότι ένας μη-ντετερμινιστικός διαγνώστης είναι μια μηχανή η οποία τερματίζει για κάθε είσοδο και σε κάθε κλάδο υπολογισμού. Είναι εύκολο να δούμε ότι αυτή η μηχανή δεν είναι διαγνώστης καθώς για είσοδο $w = \alpha\alpha$ υπάρχει ένας κλάδος ο οποίος οδηγεί σε αέναη επανάληψη μεταξύ των δύο καταστάσεων της μηχανής. □

Άσκηση 16. Δίνεται μια μηχανή Turing με αρχική κατάσταση q_0 και συνάρτηση μεταβάσεων η οποία δίνεται από τον πίνακα:

	α	\sqcup
q_0	(q_0, α, Δ) (q_1, α, A)	$(q_{\text{ΝΑΙ}}, \sqcup, A)$
q_1	(q_1, α, A)	$(q_{\text{ΟΧΙ}}, \sqcup, A)$

Ποια είναι η γλώσσα του αλφαβήτου $\Sigma = \{\alpha\}$ που αναγνωρίζει η μηχανή αυτή; Είναι διαγνώστης;

Απάντηση. Όχι, δεν είναι διαγνώστης καθώς με είσοδο τη συμβολοσειρά $w = \alpha$, ο ένας κλάδος υπολογισμού κολλάει στη κατάσταση q_1 . Αναγνωρίζει όλες τις πιθανές συμβολοσειρές. Προφανώς, αποδέχεται το κενό. Για οποιαδήποτε συμβολοσειρά περιέχει α , υπάρχει κλάδος υπολογισμού που οδηγεί στην αποδοχή: η μηχανή σειριακά διαβάζει όλη τη συμβολοσειρά μέχρι να φτάσει στο τέλος της όπου διαβάζει το σύμβολο του κενού και αποδέχεται. □