NP-πλήρη προβλήματα #2

Διαληθευσιμότητα

Έστω η γλώσσα ΔΙΑΛΗΘΕΥΣΙΜΟΤΗΤΑ$= \{\langle\phi\rangle$: Ο ϕ είναι λογικός τύπος σε ΣΚΜ με τουλάχιστον δύο αναθέσεις αληθείας$\}$.

Θεώρημα 1. *Η γλώσσα* ΔΙΑΛΗΘΕΥΣΙΜΟΤΗΤΑ *είναι NP-πλήρης.*

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ότι ΔΙΑΛΗΘΕΥΣΙΜΟΤΗΤΑ $\in$ NP. Έστω ϕ ένας λογικός τύπος σε ΣΚΜ και a_1, a_2 δύο αναθέσεις λογικών τιμών στις μεταβλητές του. Πρέπει να ελέγξουμε αν οι a_1 και a_2 περιέχουν λογικές τιμές για όλες τις μεταβλητές του ϕ, είναι διαφορετικές μεταξύ τους, και αληθοποιούν τον ϕ. Όλα αυτά μπορούν να επαληθευτούν σε πολυωνυμικό χρόνο. Επομένως, έχουμε ότι ΔΙΑΛΗΘΕΥΣΙΜΟΤΗΤΑ $\in$ NP.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, θα κάνουμε αναγωγή από τη γλώσσα SAT $= \{\langle\phi\rangle$: Ο ϕ είναι λογικός τύπος σε ΣΚΜ με τουλάχιστον μία ανάθεση αληθείας$\}$ η οποία γνωρίζουμε ότι είναι NP-πλήρης. Έστω y_1 και y_2 δύο νέες λογικές μεταβλητές. Απεικονίζουμε τον λογικό τύπο ϕ στον $\phi' = \phi \wedge (y_1 \vee y_2)$, προφανώς σε πολυωνυμικό χρόνο. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι $\langle\phi\rangle \in$ SAT αν και μόνο αν $\langle\phi'\rangle \in$ ΔΙΑΛΗΘΕΥΣΙΜΟΤΗΤΑ.

[$\Rightarrow$] Έστω ότι $\langle\phi\rangle \in$ SAT και a μια ανάθεση τιμών αληθείας στις μεταβλητές του ϕ η οποία τον αληθοποιεί. Τότε, υπάρχουν τρεις διαφορετικές αναθέσεις τιμών αληθείας στις μεταβλητές του ϕ' οι οποίες τον αληθοποιούν. Πιο συγκεκριμένα, οι αναθέσεις είναι οι $a_1 = (a, 0, 1)$, $a_2 = (a, 1, 0)$, $a_3 = (a, 1, 1)$. Επομένως, $\langle\phi'\rangle \in$ ΔΙΑΛΗΘΕΥΣΙΜΟΤΗΤΑ.

[$\Leftarrow$] Έστω ότι $\langle\phi\rangle \notin$ SAT. Τότε, δεν υπάρχει ανάθεση τιμών αληθείας στις λογικές μεταβλητές του ϕ που να τον αληθοποιούν και, άρα, δεν υπάρχει ανάθεση τιμών αληθείας στις μεταβλητές του ϕ' που να τον αληθοποιούν (καθώς ορίζεται με βάση τον ϕ). Επομένως, $\langle\phi'\rangle \notin$ ΔΙΑΛΗΘΕΥΣΙΜΟΤΗΤΑ. □

Παραλλαγές Διαληθευσιμότητας

Έστω οι εξής γλώσσες:

SAT$_3 = \{\langle\phi\rangle$: Ο ϕ είναι λογικός τύπος σε ΣΚΜ με τουλάχιστον 3 αναθέσεις αληθείας$\}$.

SAT$_{37} = \{\langle\phi\rangle$: Ο ϕ είναι λογικός τύπος σε ΣΚΜ με τουλάχιστον 37 αναθέσεις αληθείας$\}$.

SAT$_{65} = \{\langle\phi\rangle$: Ο ϕ είναι λογικός τύπος σε ΣΚΜ με τουλάχιστον 65 αναθέσεις αληθείας$\}$.

Για να αποδείξουμε ότι αυτές οι γλώσσες είναι NP-πλήρεις, πρέπει να κάνουμε αναγωγή από το SAT ακολουθώντας τη λογική που χρησιμοποιήσαμε με τη ΔΙΑΛΗΘΕΥΣΙΜΟΤΗΤΑ. Πιο συγκεκριμένα, για το SAT$_3$ αρκεί να χρησιμοποιήσουμε δύο επιπλέον μεταβλητές, για το SAT$_{37}$ χρειαζόμαστε έξι νέες μεταβλητές, ενώ για το SAT$_{65}$ αρκούν επτά νέες μεταβλητές. Γενικά, εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι μια φράση που αποτελείται από k διαφορετικές μεταξύ τους μεταβλητές διαθέτει $2^k - 1$ διαφορετικές αναθέσεις τιμών αληθείας στις μεταβλητές αυτές που την αληθοποιούν.

Περιττό 3-SAT

Έστω η γλώσσα Περιττο 3-SAT$=\{\langle\phi\rangle$: Ο ϕ είναι λογικός τύπος σε ΣΚΜ με 3 λεξιγράμματα ανά φράση, έχει περιττό αριθμό φράσεων και υπάρχει τουλάχιστον μία ανάθεση που τον αληθοποιεί$\}$.

Θεώρημα 2. *Η γλώσσα* Περιττο 3-SAT *είναι NP-πλήρης.*

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ότι Περιττο 3-SAT $\in$ NP. Είναι εύκολο να ελέγξουμε σε πολυωνυμικό χρόνο αν ένας δεδομένος λογικός τύπος ϕ είναι σε ΣΚΜ, έχει τρία λεξιγράμματα ανά φράση, έχει περιττό πλήθος φράσεων και μια συγκεκριμένη ανάθεση τιμών αληθείας στις μεταβλητές του τον αληθοποιεί. Επομένως, έχουμε ότι Περιττο 3-SAT $\in$ NP.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, θα κάνουμε αναγωγή από τη γλώσσα 3-SAT $=\{\langle\phi\rangle$: Ο ϕ είναι λογικός τύπος σε ΣΚΜ με τρία λεξιγράμματα ανά φράση και με τουλάχιστον μία ανάθεση που τον αληθοποιεί$\}$ η οποία γνωρίζουμε ότι είναι NP-πλήρης. Έστω m το πλήθος των φράσεων ενός λογικού τύπου ϕ ο οποίος είναι σε ΣΚΜ και έχει τρία λεξιγράμματα ανά φράση. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν το m είναι περιττός αριθμός, τότε άμεσα έχουμε ότι $\langle\phi\rangle \in$ 3-SAT αν και μόνο αν $\langle\phi\rangle \in$ Περιττο 3-SAT.
- Αν το m είναι άρτιος αριθμός, τότε απεικονίζουμε τον λογικό τύπο ϕ στον $\phi' = \phi \wedge (x \vee y \vee z)$, όπου x, y, z είναι τρεις νέες μεταβλητές. Έτσι, ο ϕ' είναι ένας λογικός τύπος σε ΣΚΜ με τρία λεξιγράμματα ανά φράση και περιττό πλήθος φράσεων. Είναι προφανές, λόγω της κατασκευής του ϕ', ότι $\langle\phi\rangle \in$ 3-SAT αν και μόνο αν $\langle\phi'\rangle \in$ Περιττο 3-SAT. □

8-Φράση

Έστω η γλώσσα 8-Φραση$=\{\langle\phi\rangle$: Ο ϕ είναι ένα σύνολο φράσεων και υπάρχει ανάθεση τιμών αληθείας στις μεταβλητές του τέτοια ώστε #(αληθών φράσεων) $\geq 8\cdot$#(ψευδών φράσεων).

Θεώρημα 3. *Η γλώσσα* 8-Φραση *είναι NP-πλήρης.*

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ότι 8-Φραση $\in$ NP. Έστω ένα σύνολο φράσεων. Είναι εύκολο να ελέγξουμε σε πολυωνυμικό χρόνο αν μια ανάθεση τιμών αληθείας στις μεταβλητές των φράσεων έχει ως αποτέλεσμα το πλήθος των αληθών φράσεων να είναι οκτώ φορές μεγαλύτερο το πλήθος των ψευδών. Επομένως, έχουμε ότι 8-Φραση $\in$ NP.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, θα κάνουμε την αναγωγή SAT $\leq_p$ 8-Φραση.

Πριν προχωρήσουμε ας κάνουμε μία πολύ χρήσιμη παρατήρηση. Έστω τρεις λογικές μεταβλητές x, y, z. Υπάρχουν οκτώ πιθανοί συνδυασμοί λογικών τιμών για τις μεταβλητές αυτές. Στους επτά από αυτούς υπάρχει πάντα τουλάχιστον μία που είναι αληθής. Αυτό σημαίνει αν κατασκευάσουμε όλες τις πιθανές φράσεις που μπορούμε με αυτές τις τρεις μεταβλητές, οι επτά από αυτές θα είναι πάντα αληθείς και μόνο μία θα είναι πάντα ψευδής.

Έστω m το πλήθος των φράσεων ενός λογικού τύπου ϕ ο οποίος είναι σε ΣΚΜ. Κατασκευάζουμε ένα σύνολο φράσεων ϕ' το οποίο περιέχει τις m φράσεις του ϕ και επιπλέον $8m$ φράσεις οι οποίες παράγονται από $3m$ νέες μεταβλητές σύμφωνα με την παραπάνω παρατήρηση. Αυτό σημαίνει ότι από τις $8m$ φράσεις οι $7m$ είναι πάντα αληθείς, ενώ οι υπόλοιπες m είναι πάντα ψευδείς. Ας αποδείξουμε τώρα ότι $\langle\phi\rangle \in$ SAT αν και μόνο αν $\langle\phi'\rangle \in$ 8-Φραση.

$[\Rightarrow]$ Έστω ότι $\langle\phi\rangle \in$ SAT. Τότε, υπάρχει μια ανάθεση τιμών αληθείας στις μεταβλητές του ϕ τέτοια ώστε οι m φράσεις που περιέχει να είναι όλες αληθείς. Αυτό σημαίνει ότι ο ϕ' αποτελείται από $m + 7m = 8m$ αληθείς και m ψευδείς φράσεις. Άρα, $\langle\phi'\rangle \in$ 8-Φραση.

[$\Leftarrow$] Έστω ότι $\langle \phi \rangle \notin$ SAT. Τότε, για οποιαδήποτε ανάθεση τιμών αληθείας στις μεταβλητές του ϕ, υπάρχει πάντα τουλάχιστον μία φράση c η οποία είναι ψευδής. Αυτό σημαίνει ότι ο ϕ' αποτελείται το πολύ από $m-1+7m=8m-1$ αληθείς και $m+1$ ψευδείς φράσεις. Άρα, $\langle \phi' \rangle \notin$ 8-Φραση. $\square$

Κυρίαρχο Σύνολο Μαύρων Κόμβων

Έστω ένα γράφημα $G=(V_A \cup V_M, E)$ το οποίο αποτελείται από άσπρους (V_A) και μαύρους (V_M) κόμβους. Ένα κυρίαρχο σύνολο μαύρων κόμβων είναι ένα σύνολο μαύρων κόμβων $S \subseteq V_M$ τέτοιο ώστε κάθε άσπρος κόμβος $v \in V_A$ να έχει γείτονα στο S. Με δεδομένο έναν ακέραιο k, υπάρχει κυρίαρχο σύνολο μαύρων κόμβων μεγέθους το πολύ k? Μπορούμε να περιγράψουμε το πρόβλημα και ως γλώσσα: ΚΣΜΚ$= \{\langle G,k \rangle$: Το G περιέχει κυρίαρχο σύνολο μαύρων κόμβων μεγέθους το πολύ $k\}$.

Θεώρημα 4. *Η γλώσσα* ΚΣΜΚ *είναι NP-πλήρης.*

Απόδειξη. Ισχύει ότι ΚΣΜΚ $\in$ NP καθώς με δεδομένο ένα γράφημα G, έναν ακέραιο k και ένα σύνολο κόμβων S είναι εύκολο να ελέγξουμε σε πολυωνυμικό χρόνο αν το S αποτελείται μόνο από μαύρους κόμβους και αν κάθε άσπρος κόμβος του G έχει γείτονα στο S.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη θα κάνουμε την αναγωγή ΚΚ $\leq_p$ ΚΣΜΚ, όπου ΚΚ$= \{\langle G,k \rangle$: το G περιέχει κομβικό κάλυμμα μεγέθους το πολύ $k\}$. Υπενθυμίζουμε ότι ένα κομβικό κάλυμμα είναι ένα σύνολο κόμβων τέτοιο ώστε κάθε ακμή του γραφήματος να προσπίπτει σε κάποιον κόμβο του συνόλου αυτού. Η ιδέα της αναγωγής είναι η αντιστοιχία των επόμενων δύο προτάσεων: Ένα κομβικό κάλυμμα είναι ένα σύνολο κόμβων που *καλύπτει* όλες τις ακμές του γραφήματος, ενώ ένα κυρίαρχο σύνολο μαύρων κόμβων είναι ένα σύνολο μαύρων κόμβων που *καλύπτει* όλους τους άσπρους κόμβους του γραφήματος.

Η αναγωγή έχει ως εξής. Με δεδομένο ένα γράφημα $G=(V,E)$, κατασκευάζουμε ένα γράφημα $G'=(V_A \cup V_M, E')$. Για κάθε κόμβο $v \in V$, έχουμε έναν αντίστοιχο μαύρο κόμβο $v \in V_M$. Για κάθε ακμή $e=(u,v) \in E$, έχουμε έναν αντίστοιχο άσπρο κόμβο $x_e \in V_A$ τον οποίο συνδέουμε με ακμή με τους u και v, δηλαδή, $(x_e,u),(x_e,v) \in E'$. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι $\langle G,k \rangle \in$ ΚΚ αν και μόνο αν $\langle G',k \rangle \in$ ΚΣΜΚ.

[$\Rightarrow$] Έστω ότι $\langle G,k \rangle \in$ ΚΚ. Τότε, υπάρχει ένα σύνολο k κόμβων S τέτοιο ώστε για κάθε ακμή $e=(u,v) \in E$ να ισχύει ότι $y \in S$, με $y \in \{u,v\}$. Το S αποτελεί ΚΣΜΚ για το G' καθώς κάθε άσπρος κόμβος x_e που αντιστοιχεί στην ακμή e έχει τουλάχιστον έναν γείτονα (τον y) στο S. Άρα, $\langle G',k \rangle \in$ ΚΣΜΚ.

[$\Leftarrow$] Έστω ότι $\langle G',k \rangle \in$ ΚΣΜΚ. Τότε, υπάρχει ένα σύνολο k μαύρων κόμβων S του G' τέτοιο ώστε κάθε άσπρος κόμβος $x_e \in V_A$ να έχει έναν γείτονα $y \in S$. Λόγω της κατασκευής του G', ο x_e έχει μόνο δύο γείτονες οι οποίοι αντιστοιχούν στα άκρα της ακμής e στο G. Επομένως, κάθε ακμή e προσπίπτει σε κάποιον κόμβο του S το οποίο αποτελεί κομβικό κάλυμμα στο G. Άρα, $\langle G,k \rangle \in$ ΚΚ. $\square$

Κυρίαρχο Σύνολο

Έστω ένα γράφημα $G=(V,E)$. Ένα κυρίαρχο σύνολο S είναι ένα σύνολο κόμβων τέτοιο ώστε για κάθε κόμβο $v \in V$ να ισχύει είτε ότι ανήκει στο S είτε ότι έχει γείτονα στο S. Με δεδομένο έναν ακέραιο k, υπάρχει κυρίαρχο σύνολο μεγέθους το πολύ k? Μπορούμε να περιγράψουμε το πρόβλημα και ως γλώσσα: ΚΣ$= \{\langle G,k \rangle$: Το G περιέχει κυρίαρχο σύνολο μεγέθους το πολύ $k\}$.

Θεώρημα 5. *Η γλώσσα* ΚΣ *είναι NP-πλήρης.*

Απόδειξη. Ισχύει ότι ΚΣ $\in$ NP καθώς με δεδομένο ένα γράφημα G, έναν ακέραιο k και ένα σύνολο κόμβων S είναι εύκολο να ελέγξουμε σε πολυωνυμικό χρόνο αν το S έχει μέγεθος k και για κάθε κόμβο ισχύει ότι είτε συμμετέχει στο S είτε ότι έχει γείτονα στο S.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη θα κάνουμε την αναγωγή ΚΚ $\leq_p$ ΚΣ. Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$ σύμφωνα με το οποίο κατασκευάζουμε ένα νέο γράφημα $G' = (V', E'), V \subseteq V', E' \subseteq E$ ως εξής. Για κάθε ακμή $e = (u, v) \in E$ δημιουργούμε έναν νέο κόμβο x_e τον οποίο συνδέουμε με τους u και v έτσι ώστε να δημιουργηθεί ένα τρίγωνο, δηλαδή, το G' περιέχει τις ακμές (u, v), (x_e, u) και (x_e, v). Έστω n_0 = #(απομονωμένων κόμβων). Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι $\langle G, k\rangle \in$ ΚΚ αν και μόνο αν $\langle G', k + n_0\rangle \in$ ΚΣ.

$[\Rightarrow]$ Έστω ότι $\langle G, k\rangle \in$ ΚΚ και S ένα κομβικό κάλυμμα μεγέθους k για το G. Κάθε ακμή $e = (u, v)$ προσπίπτει σε κάποιον κόμβο του S, δηλαδή, $u \in S$ ή $v \in S$. Αυτό σημαίνει ότι το S μαζί με τους απομονωμένους κόμβους του G (αν υπάρχουν) συνιστούν ένα κυρίαρχο σύνολο για το G'. Αυτό ισχύει καθώς στο κυρίαρχο σύνολο συμπεριλαμβάνουμε τους απομονωμένους κόμβους και έναν κόμβο για κάθε τρίγωνο (u, v, x_e) στο G'. Άρα, $\langle G', k + n_0\rangle \in$ ΚΣ.

$[\Leftarrow]$ Έστω ότι $\langle G', k + n_0\rangle \in$ ΚΣ και S' ένα κυρίαρχο σύνολο μεγέθους $k + n_0$ για το G'. Κατασκευάζουμε ένα κομβικό κάλυμμα S για το G με βάση το S' ως εξής. Για κάθε ακμή $e = (u, v)$ του G πρέπει να ισχύει ότι $u \in S'$ ή $v \in S'$ ή $x_e \in S'$ έτσι ώστε να πληρούνται οι προϋποθέσεις του κυρίαρχου συνόλου. Αν $y \in S'$, με $y \in \{u, v\}$, τότε προσθέτουμε τον y στο υπό κατασκευή κομβικό κάλυμμα S. Αν $x_e \in S'$, τότε επιλέγουμε αυθαίρετα είτε τον u είτε τον v και τον προσθέτουμε στο S. Σε κάθε περίπτωση έχουμε καλύψει την ακμή e στο G. Το S στο τέλος αυτής της διαδικασίας είναι προφανώς ένα κομβικό κάλυμμα μεγέθους k καθώς δεν έχουμε συμπεριλάβει κάποιον απομονωμένο κόμβο. Άρα, $\langle G, k\rangle \in$ ΚΚ. $\square$