Εισαγωγή στη Λογική Α΄ Τάξης **Σ. Κοσμαδάκης**

- **Συντακτικό τύπων Α΄ τάξης**

Α Θεωρούμε δεδομένο ένα *λεξιλόγιο* Λ , αποτελούμενο από

(1) ένα σύνολο *συμβόλων για σχέσεις*, { R , S , ... }
(2) ένα σύνολο *συμβόλων για συναρτήσεις*, { f , g , h , ... }
(3) ένα σύνολο *συμβόλων για σταθερές*, { c , d , ... } .

Κάθε ένα από τα σύμβολα σχέσεων και κάθε ένα από τα σύμβολα συναρτήσεων, έχει συγκεκριμένο αριθμό ορισμάτων. Τα παραπάνω σύνολα συμβόλων είναι ξένα μεταξύ τους.

Θεωρούμε επίσης δεδομένο ένα σύνολο *μεταβλητών* V = { x, y, z, ... } , χωρίς κοινά στοιχεία με το λεξιλόγιο Λ [1].

Ονομάζουμε *ατομικό τύπο* ως προς το λεξιλόγιο Λ και τις μεταβλητές V ,
οποιαδήποτε συμβολοσειρά $\varepsilon(\tau_1 , ... , \tau_k)$ είτε $(\tau = \tau')$ [2] , όπου

(1) το ε είναι ένα από τα σύμβολα για σχέσεις, με ακριβώς k ορίσματα, και
(2) τα $\tau_1 , ... , \tau_k , \tau , \tau'$ είναι *όροι* (αλγεβρικές παραστάσεις), που σχηματίζονται με τα σύμβολα (,) , τα σύμβολα για συναρτήσεις, τα σύμβολα για σταθερές, και μεταβλητές από το σύνολο V .

Ερώτημα 1 Δώστε έναν επαγωγικό ορισμό για το παραπάνω σύνολο παραστάσεων.

Οι *τύποι Α΄ τάξης ως προς τα* Λ , V , είναι συμβολοσειρές που σχηματίζονται με τα σύμβολα του λεξιλογίου Λ , μεταβλητές από το σύνολο V , και τα σύμβολα (,) , $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\forall$, $\exists$.

Δίνουμε έναν επαγωγικό ορισμό για το σύνολο Σ των (συντακτικά σωστών) τύπων Α΄ τάξης.

<u>Αρχικές περιπτώσεις</u> Αν φ είναι ένας ατομικός τύπος ως προς τα Λ , V , τότε $\varphi\in\Sigma$.

<u>Επαγωγική κατασκευή</u> Εστω φ , ψ οποιεσδήποτε συμβολοσειρές στο Σ , και $u\in V$.
Οι συμβολοσειρές $(\varphi\wedge\psi)$ $(\varphi\vee\psi)$ $(\neg\varphi)$ $(\varphi\rightarrow\psi)$
$(\forall u\ \varphi)$ $(\exists u\ \varphi)$ θα είναι στο Σ .

Ερώτημα 2 Δώστε έναν επαγωγικό ορισμό για το υπο-σύνολο των τύπων Α΄ τάξης που σχηματίζονται με ένα λεξιλόγιο Λ , χρησιμοποιώντας μόνο τις μεταβλητές στο σύνολο W = {x, y, z} , και τα σύμβολα (,) , $\wedge$, $\vee$, $\forall$.

Β Τα *parse-trees* των τύπων Α΄ τάξης που ορίστηκαν στο (Α) είναι δέντρα με ρίζα, με ετικέτες στους κόμβους. Κάθε κόμβος ενός parse-tree έχει το πολύ δύο -- διατεταγμένα -- παιδιά. Επίσης,

κάθε φύλλο έχει σαν ετικέτα έναν ατομικό τύπο, και

η ετικέτα ενός κόμβου που δεν φύλλο είναι: είτε ένα από τα σύμβολα $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$,
είτε μία συμβολοσειρά της μορφής $\forall u$, $\exists u$, όπου $u\in V$.

[1] Αυτός ο περιορισμός αποκλείει το παράδοξο του Russell.
[2] Το σύμβολο = δεν περιέχεται στο λεξιλόγιο, ούτε στο σύνολο V.

Ερώτημα 3 Δώστε έναν επαγωγικό ορισμό για το σύνολο pt(Σ) των parse-trees των τύπων Α΄ τάξης που ορίστηκαν στο (Α).

Παρατήρηση: Δύο διαφορετικά parse-trees που αντιστοιχούν στον ίδιο τύπο, είναι ισομορφικά.

Γ Ένας ποσοδείκτης $\forall u$ είτε $\exists u$ *δεσμεύει μιά εμφάνιση* της μεταβλητής u σε ένα τύπο, αν η συγκεκριμένη εμφάνιση βρίσκεται στο scope του ποσοδείκτη.
Μιά εμφάνιση της μεταβλητής u είναι *ελεύθερη* σε ένα τύπο, αν δεν υπάρχει ποσοδείκτης που να τη δεσμεύει.

Παρατήρηση: Μιά εμφάνιση της μεταβλητής u στο φύλλο a του parse-tree ενός τύπου είναι ελεύθερη, αν και μόνο αν δεν υπάρχει πρόγονος του a με ετικέτα $\forall u$ είτε $\exists u$.

1 Έστω τ ένα parse-tree ενός τύπου Α΄ τάξης φ , a ένα φύλλο του τ , και u μία μεταβλητή που εμφανίζεται στην ετικέτα του a .
Δίνουμε έναν επαγωγικό ορισμό μιάς συνάρτησης free(τ, a, u) , όπου free(τ, a, u) = *true*
αν και μόνο αν: οι εμφανίσεις της u στην ετικέτα του a , είναι ελεύθερες στον τύπο φ .

<u>Αρχικές περιπτώσεις</u> Έστω τ ένα δέντρο με μοναδικό κόμβο το a . Τότε free(τ, a, u) = *true* .

<u>Επαγωγικό βήμα</u>

Έστω τ ένα δέντρο, με ρίζα ένα κόμβο b με ετικέτα λ(b) , και με (ένα είτε δύο) υπο-δέντρα τ_1, τ_2 .

Αν $\lambda(b)=\forall u$ είτε $\lambda(b)=\exists u$: τότε free(τ, a, u) = *false* .

Αν $\lambda(b) \in \{\forall w , \exists w \}$ όπου η μεταβλητή w δεν είναι η u , ή $\lambda(b) \in \{ \wedge , \vee , \neg , \rightarrow \}$:

αν a στο τ_1, τότε free(τ, a, u) = free(τ_1, a, u)

αν a στο τ_2, τότε free(τ, a, u) = free(τ_2, a, u) .

Ερώτημα 4 Έστω τ ένα parse-tree ενός τύπου Α΄ τάξης φ , και u μία μεταβλητή.
Δώστε έναν επαγωγικό ορισμό μιάς συνάρτησης F(τ, u) , όπου F(τ, u) = *true* αν και μόνο αν η μεταβλητή u εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο φ .

2 Έστω τ ένα parse-tree ενός τύπου Α΄ τάξης φ , a ένα φύλλο του τ , u μία μεταβλητή που εμφανίζεται στην ετικέτα του a , και k ένας κόμβος του τ .
Δίνουμε έναν επαγωγικό ορισμό μιάς συνάρτησης binds(τ, a, u, k) , όπου binds(τ, a, u, k) = *true*
αν και μόνο αν: οι εμφανίσεις της u στην ετικέτα του a , δεσμεύονται στον τύπο φ , από κάποιο ποσοδείκτη στην ετικέτα του κόμβου k .

Παρατήρηση: binds(τ, a, u, k) = *true* αν και μόνο αν: ο κόμβος k είναι ο πρώτος πρόγονος του a , με ετικέτα $\forall u$ είτε $\exists u$, που συναντάμε στο μονοπάτι του δεντρου τ , από το φύλλο a ώς τη ρίζα του.

<u>Αρχικές περιπτώσεις</u> Έστω τ ένα δέντρο με μοναδικό κόμβο το a . Τότε binds(τ, a, u, k) = *false* .

<u>Επαγωγικό βήμα</u>

Έστω τ ένα δέντρο, με ρίζα ένα κόμβο b με ετικέτα λ(b) , και με (ένα είτε δύο) υπο-δέντρα τ_1 , τ_2 .

Αν k=b και $\lambda(b) \in \{\forall u , \exists u\}$: τότε binds(τ, a, u, k) = free(τ_1, a, u) .

Αν k=b και $\lambda(b) \notin \{\forall u , \exists u\}$: τότε binds(τ, a, u, k) = *false* .

Αν $k \neq b$:

αν k στο τ_1 και a στο τ_1 , τότε binds(τ, a, u, k) = binds(τ_1, a, u, k)

αν k στο τ_1 και a στο τ_2 , τότε binds(τ, a, u, k) = *false*

αν k στο τ_2 και a στο τ_1 , τότε binds(τ, a, u, k) = *false*

αν k στο τ_2 και a στο τ_2 , τότε binds(τ, a, u, k) = binds(τ_2, a, u, k) .

Ερώτημα 5 Έστω φ ένας τύπος Α΄ τάξης και u μία μεταβλητή. Επιβεβαιώστε ότι: στους τύπους $(\forall u\ \varphi)$ είτε $(\exists u\ \varphi)$, ο αρχικός ποσοδείκτης $\forall u$ / $\exists u$ δεσμεύει μιά εμφάνιση της μεταβλητής u , αν και μόνο αν αυτή η εμφάνιση είναι ελεύθερη στον τύπο φ .

- **Δηλώσεις που αντιστοιχούν σε τύπους Α΄ τάξης**

Θεωρούμε δεδομένο ένα ένα λεξιλόγιο Λ .

Ένα *μοντέλο* Μ *αντίστοιχο* του Λ αποτελείται από

(i) ένα σύνολο *σχέσεων* (*ελέγχων*)[3] {ρ , σ , ... }
(ii) ένα σύνολο *συναρτήσεων* {F , G , H , ... }
(iii) ένα σύνολο *σταθερών* {C , D , ... } .

Οι σχέσεις / συναρτήσεις / σταθερές του Μ αντιστοιχούν, μία προς μία, στα σύμβολα για σχέσεις / συναρτήσεις / σταθερές του Λ . Κάθε σχέση και κάθε συνάρτηση του Μ έχει συγκεκριμένο αριθμό ορισμάτων, ίσο με εκείνον του αντίστοιχου συμβόλου του Λ.

Το *πεδίο ορισμού* U του μοντέλου Μ αποτελείται από:

(i) τις τιμές που μπορούν να είναι ορίσματα των σχέσεων,
(ii) τις τιμές που μπορούν να είναι ορίσματα ή αποτελέσματα των συναρτήσεων[4] και
(iii) τις σταθερές του Μ.

Έστω φ ένας τύπος Α΄ τάξης, που σχηματίζεται χρησιμοποιώντας το λεξιλόγιο Λ .
Υποθέτουμε ότι οι μεταβλητές $u_1, \ldots, u_m$, είναι οι μόνες που εμφανίζονται ελεύθερες στον φ .
Από τον τύπο φ κατασκευάζουμε μια μαθηματική δήλωση $\varphi^M(a_1, \ldots, a_m)$:

α) Αντικαθιστούμε κάθε σύμβολο για σχέση / συνάρτηση / σταθερά που εμφανίζεται στον τύπο φ , με την αντίστοιχη σχέση / συνάρτηση / σταθερά του Μ . Το σύμβολο = παραμένει ως έχει.

β) Αντικαθιστούμε τα σύμβολα $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, με τις γνωστές πράξεις της άλγεβρας Boole and , or , not , implies .

γ) Αντικαθιστούμε κάθε ένα ποσοδείκτη $\forall u$ / $\exists u$ με AND $_{d \in U}$ / OR $_{d \in U}$.
Αντικαθιστούμε με το d *τις εμφανίσεις της μεταβλητής* u *που δεσμεύονται από τον ποσοδείκτη*.

Παρατήρηση: Ο αρχικός ποσοδείκτης του τύπου $(\forall u\ \varphi)$ / $(\exists u\ \varphi)$ δεσμεύει μιά εμφάνιση της μεταβλητής u , αν και μόνο αν η ίδια εμφάνιση είναι ελεύθερη στον τύπο φ (Ερώτημα 5).

δ) αντικαθιστούμε *τις ελεύθερες εμφανίσεις* των μεταβλητών $u_1, \ldots, u_m$, με τα στοιχεία $a_1, \ldots, a_m$ αντίστοιχα.

Τα ονόματα (όπως d) που χρησιμοποιούμε στο (γ) , επιλέγονται έτσι ώστε να αντιστοιχούν ένα-προς-ένα με τις μεταβλητές του V. Κάθε όνομα αντικαθιστά μόνο τις δεσμευμένες εμφανίσεις της μεταβλητής στην οποία αντιστοιχεί. Ανάλογα, τα ονόματα που χρησιμοποιούμε στο (δ) ($a_1, \ldots, a_m$) επιλέγονται έτσι ώστε να

[3] Μια σχέση (έλεγχος) μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνάρτηση με αποτέλεσμα *true* ή *false*.
[4] Οι σχέσεις και οι συναρτήσεις είναι *ολικές*, δηλ. ορίζονται για όλα τα στοιχεία του U .

αντιστοιχούν ένα-προς-ένα με τις μεταβλητές του V. Κάθε όνομα αντικαθιστά μόνο τις ελεύθερες εμφανίσεις της μεταβλητής στην οποία αντιστοιχεί.

Παρατήρηση: Η δήλωση $\varphi^M(a_1, \ldots, a_m)$ που κατασκευάζεται εκφράζει μια ιδιότητα του μοντέλου M , και των στοιχείων $a_1, \ldots, a_m$ του πεδίου ορισμού του M.
Άν ο τύπος φ δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές, η δήλωση φ^M που κατασκευάζεται εκφράζει μια ιδιότητα του μοντέλου M .

Αν η δήλωση $\varphi^M(a_1, \ldots, a_m)$ ισχύει, της αποδίδουμε *την τιμή αλήθειας true* .
Αν όχι, αποδίδουμε στη δήλωση $\varphi^M(a_1, \ldots, a_m)$ *την τιμή αλήθειας false* .

Παραδείγματα δηλώσεων

Εξετάζοντας τις δηλώσεις που αντιστοιχούν σε ορισμένους απλούς τύπους Α΄ τάξης, βρίσκουμε ποιές ιδιότητες εκφράζουν. Κάθε ιδιότητα αναφέρεται σε ένα μοντέλο M και στοιχεία a , b , b΄ , c του πεδίου ορισμού του M – το a αντικαθιστά τη μεταβλητή x , το b την y , το b΄ την y΄ και το c την z .

1 Έστω ψ_1 ο τύπος $(\neg(x = y) \wedge \neg(x = z)) \wedge \neg(y = z)$.
Η δήλωση $\psi_1^M(a, b, c)$ ισχύει για το μοντέλο M και τα στοιχεία a , b , c , αν και μόνο αν:
τα a , b , c είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

Έστω ψ ο τύπος $\exists x\, (\exists y\, (\exists z\ \psi_1))$.
Η δήλωση ψ^M ισχύει για το μοντέλο M , αν και μόνο αν:
το πεδίο ορισμού του M περιέχει τουλάχιστον τρία στοιχεία.

Έστω φ ο τύπος $\forall x\, (\forall y\, (x = y))$.
Η δήλωση φ^M ισχύει για το μοντέλο M , αν και μόνο αν:
το πεδίο ορισμού του M περιέχει μόνο ένα στοιχείο.

Έστω φ_0 ο τύπος $\neg(\exists x\, (\exists y\, \neg(x = y)))$.
Η δήλωση φ_0^M έχει την ίδια τιμή αλήθειας με τη δήλωση φ^M , *για οποιοδήποτε μοντέλο* M.

Ερώτημα 6 Βρείτε τύπους που οι αντίστοιχές τους δηλώσεις έχουν την ίδια τιμή αλήθειας με την παραπάνω δήλωση ψ^M , *για οποιοδήποτε μοντέλο* M .

2 Ένα μοντέλο M , με πεδίο ορισμού U και με μία διμερή σχέση ρ , παριστάνεται σαν ένας κατευθυνόμενος γράφος G = (U , P) , όπου: υπάρχει ακμή από την κορυφή u στην κορυφή v , αν και μόνο αν ρ(u, v) = *true*.

Έστω φ_1 ο τύπος $\exists y\, R(x, y)$.
Η δήλωση $\varphi_1^M(a)$ ισχύει αν και μόνο αν:
στον γράφο G η κορυφή a έχει έξω-βαθμό τουλάχιστον 1.

Έστω φ_2 ο τύπος $\exists y\, (\exists y'\, ((R(x, y) \wedge R(x, y')) \wedge \neg(y = y')))$.
Η δήλωση $\varphi_2^M(a)$ ισχύει αν και μόνο αν:
στον γράφο G η κορυφή a έχει έξω-βαθμό τουλάχιστον 2.

Έστω φ_3 ο τύπος $\forall y\, (\forall y'\, (\neg R(x, y) \vee \neg R(x, y') \vee (y = y')))$[5].
Η δήλωση $\varphi_3^M(a)$ έχει την αντίθετη τιμή αλήθειας από τη δήλωση $\varphi_2^M(a)$,
για οποιοδήποτε μοντέλο M *και για οποιοδήποτε στοιχείο* a .
Επομένως, η δήλωση $\varphi_3^M(a)$ ισχύει αν και μόνο αν:
στον γράφο G η κορυφή a έχει έξω-βαθμό το πολύ 1.

[5] Αποδίδουμε στο σύμβολο $\neg$ προτεραιότητα έναντι των $\vee, \wedge$.

Ερώτημα 7 Έστω φ_4 ο τύπος $\forall y\ (\ \forall y'\ (\ (R(x, y) \wedge R(x, y')) \rightarrow (y = y')\ )\ )$.
Επιβεβαιώστε ότι η δήλωση $\varphi_4^M(a)$ ισχύει αν και μόνο αν:
στον γράφο G η κορυφή a έχει έξω-βαθμό το πολύ 1.

3 Έστω ψ_1 ο τύπος $\neg(\exists z\ (\ R(x, z) \wedge (\neg(z = y) \wedge \neg(z = y'))\ )\ )$.
Η δήλωση $\psi_1^M(a, b, b')$ ισχύει αν και μόνο αν:
στον γράφο G η κορυφή a δεν έχει ακμή προς κορυφή διαφορετική από τις b, b΄.

Οι τύποι $\forall z\ (\ \neg R(x, z) \vee ((z = y) \vee (z = y'))\ )$ και $\forall z\ (\ R(x, z) \rightarrow ((z = y) \vee (z = y'))\ )$
αντιστοιχούν σε δηλώσεις που έχουν την ίδια τιμή αλήθειας με τη δήλωση $\psi_1^M(a, b, b')$,
για οποιοδήποτε μοντέλο M *και οποιαδήποτε στοιχεία* a , b , b΄.

Έστω ψ ο τύπος $\exists y\ (\exists y'\ \psi_1)$.
Η δήλωση $\psi^M(a)$ ισχύει αν και μόνο αν:
στον γράφο G η κορυφή a έχει έξω-βαθμό το πολύ 2.

Ερώτημα 8 Βρείτε ένα τύπο θ_1 , με δύο ελεύθερες μεταβλητές x , y , έτσι ώστε η δήλωση $\theta_1^M(a, b)$ να ισχύει αν και μόνο αν:
στον γράφο G η κορυφή a δεν έχει ακμή προς κορυφή διαφορετική από την b .

Ερώτημα 9 Έστω θ ο τύπος $\exists y\ (\forall z\ (R(x, z) \rightarrow (z = y))\ )$.
Επιβεβαιώστε ότι η δήλωση $\theta^M(a)$ ισχύει αν και μόνο αν:
στον γράφο G η κορυφή a έχει έξω-βαθμό το πολύ 1.

- **Ελεύθερες μεταβλητές τύπων Α΄ τάξης**

Έστω φ ένας τύπος Α΄ τάξης, τ ένα parse-tree του φ , και u μία μεταβλητή που εμφανίζεται στην ετικέτα ενός φύλλου a του τ .
Η εμφάνιση της u στον τύπο φ είναι ελεύθερη (δεν βρίσκεται στο scope κανενός ποσοδείκτη)
αν και μόνο αν: στο δέντρο τ δεν υπάρχει πρόγονος του φύλλου a που να έχει ετικέτα $\forall u$ είτε $\exists u$.

Έστω FV(φ) το σύνολο των μεταβλητών που έχουν κάποια ελεύθερη εμφάνιση στον τύπο φ .
Με βάση τον παραπάνω ορισμό της ελεύθερης εμφάνισης μιάς μεταβλητής, μπορούμε να παρατηρήσουμε τα εξής:

Μια μεταβλητή u έχει ελεύθερη εμφάνιση σε ένα τύπο $(\varphi_1 \bullet \varphi_2)$, όπου • οποιοδήποτε από τα σύμβολα $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, αν και μόνο αν: η u έχει ελεύθερη εμφάνιση στον φ , είτε στον φ_2 .

Μια μεταβλητή u έχει ελεύθερη εμφάνιση σε ένα τύπο $(\neg\varphi_1)$,
αν και μόνο αν: η u έχει ελεύθερη εμφάνιση στον φ_1 .

Μια μεταβλητή u έχει ελεύθερη εμφάνιση σε ένα τύπο $(\forall w\ \varphi_1)$ / $(\exists w\ \varphi_1)$,
αν και μόνο αν: η u δεν είναι η w , και επίσης η u έχει ελεύθερη εμφάνιση στον φ_1 .

Από αυτές τις παρατηρήσεις προκύπτουν οι παρακάτω αναδρομικές ιδιότητες για τα σύνολα FV(φ) :

(1) $FV(\varphi_1 \bullet \varphi_2) = FV(\varphi_1) \cup FV(\varphi_2)$, όπου • οποιοδήποτε από τα σύμβολα $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$

$FV(\neg\varphi_1) = FV(\varphi_1)$

(2) $FV(\forall w\ \varphi_1) = FV(\varphi_1) - \{w\}$

$FV(\exists w\ \varphi_1) = FV(\varphi_1) - \{w\}$.

Ερώτημα 10 Από τα (1, 2) συμπεράνετε ότι:

(1)΄ $FV(\varphi_1) \subseteq FV(\varphi_1 \bullet \varphi_2)$ όπου $\bullet$ οποιοδήποτε από τα σύμβολα $\wedge, \vee, \rightarrow$

$FV(\varphi_2) \subseteq FV(\varphi_1 \bullet \varphi_2)$ όπου $\bullet$ οποιοδήποτε από τα σύμβολα $\wedge, \vee, \rightarrow$

$FV(\varphi_1) = FV(\neg\varphi_1)$

(2)΄ $FV(\varphi_1) \subseteq FV(\forall w\ \varphi_1) \cup \{w\}$

$FV(\varphi_1) \subseteq FV(\exists w\ \varphi_1) \cup \{w\}$.

- **Επαγωγικός ορισμός τιμών αλήθειας τύπων Α΄ τάξης**

Ένας τύπος Α΄ τάξης φ αντιστοιχίζεται σε μια δήλωση $\varphi^M(a_1, \ldots, a_m)$, που εκφράζει μια ιδιότητα ενός μοντέλου M και στοιχείων $a_1, \ldots, a_m$ του πεδίου ορισμού του M .
Στη δήλωση $\varphi^M(a_1, \ldots, a_m)$, οι σχέσεις κοκ του M θα αντικαταστήσουν τα αντίστοιχα σύμβολα στον φ , και κάθε ένα στοιχείο a_i θα αντικαταστήσει τις ελεύθερες εμφανίσεις μιάς μεταβλητής u_i στον τύπο φ .

Συνοπτικά, για να μπορεί να κατασκευαστεί η δήλωση $\varphi^M(a_1, \ldots, a_m)$ είναι αναγκαία και ικανά τα εξής:

(α) Το μοντέλο M να αντιστοιχεί στο λεξιλόγιο του τύπου φ .

(β) Να ισχύει $FV(\varphi) \subseteq \{u_1, \ldots, u_m\}$.

(γ) Να δίνεται ένας *πίνακας* L που να καταχωρεί, για κάθε μεταβλητή u , ένα στοιχείο a του πεδίου ορισμού του M (συμβολικά, $L[u] = a$) .

Παρατήρηση: Ο τύπος φ ορίζει μια συνάρτηση, με ορίσματα το μοντέλο M και τον πίνακα L , και αποτέλεσμα τη *δήλωση* $\varphi^M(L[u_1], \ldots, L[u_m])$.
Θα χρησιμοποιούμε και τον συνοπτικό συμβολισμό $\varphi^M(L)$ για τη δήλωση $\varphi^M(L[u_1], \ldots, L[u_m])$.

Εξετάζοντας τον τρόπο που κατασκευάζεται η δήλωση $\varphi^M(L[u_1], \ldots, L[u_m])$, παρατηρούμε ότι μπορεί να οριστεί επαγωγικά, με αναδρομή στη δομή του φ :

<u>Αρχικές περιπτώσεις</u> Ο τύπος φ είναι ατομικός:

Για κάθε μοντέλο M και πίνακα L για τα οποία ισχύουν οι παραπάνω συνθήκες (α, β, γ) , $\varphi^M(L)$ είναι η δήλωση που προκύπτει αντικαθιστώντας στον φ

(1) κάθε σύμβολο του λεξιλογίου με την αντίστοιχη σχέση / συνάρτηση / σταθερά του M , και

(2) τις ελεύθερες εμφανίσεις των μεταβλητών $u_1, \ldots, u_m$, με τα $L[u_1], \ldots, L[u_m]$ αντίστοιχα.

<u>Επαγωγικό βήμα</u>

(i) Ο τύπος φ είναι προτασιακός συνδυασμός των τύπων φ_1, φ_2 :

Για κάθε μοντέλο M και πίνακα L για τα οποία ισχύουν οι συνθήκες (α, β, γ) ,

$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)^M(L) =_{ορσ} \varphi_1^M(L)$ and $\varphi_2^M(L)$ $\qquad$ $(\varphi_1 \vee \varphi_2)^M(L) =_{ορσ} \varphi_1^M(L)$ or $\varphi_2^M(L)$

$(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)^M(L) =_{ορσ} \varphi_1^M(L)$ implies $\varphi_2^M(L)$ $\qquad$ $(\neg\varphi_1)^M(L) =_{ορσ}$ not $\varphi_1^M(L)$.

(ii) Ο τύπος φ είναι $(\forall u\ \varphi_1)$ / $(\exists u\ \varphi_1)$:

Για κάθε μοντέλο M και πίνακα L για τα οποία ισχύουν οι συνθήκες (α, β, γ) ,

$$(\forall u\ \varphi_1)^M(L) =_{\text{ορσ}} \text{AND}_{d\in U}\ \varphi_1^M(L\ ;\ u \mid\!\rightarrow d)$$
$$(\exists u\ \varphi_1)^M(L) =_{\text{ορσ}} \text{OR}_{d\in U}\ \varphi_1^M(L\ ;\ u \mid\!\rightarrow d)$$

$L\ ;\ u \mid\!\rightarrow d$ είναι ο πίνακας που περιέχει όλες τις καταχωρήσεις του πίνακα L , με μόνη τη διαφορά ότι για τη μεταβλητή u καταχωρεί το στοιχείο d .

***Σημείωση για το Επαγωγικό βήμα* (i)**

Για να επιβεβαιώσουμε ότι μπορεί να εκτελεστεί το Επαγωγικό βήμα (i) , πρέπει να ελέγξουμε ότι οι δηλώσεις $\varphi_1^M(L)$, $\varphi_2^M(L)$ που χρησιμοποιούνται για το τελικό αποτέλεσμα μπορούν να κατασκευαστούν. Δηλαδή, ότι θα ισχύουν για αυτές τις δηλώσεις οι συνθήκες (α, β, γ) , όταν οι ίδιες συνθήκες ισχύουν για τη δήλωση $(\varphi_1 \bullet \varphi_2)^M(L)$ (όπου $\bullet$ ένα από τα $\wedge, \vee, \rightarrow$) , είτε για τη δήλωση $(\neg\varphi_1)^M(L)$.

Οι συνθήκες (α) και (γ) είναι προφανείς, οπότε επιβεβαιώνουμε τη συνθήκη (β) .

Έστω ότι ισχύει $FV(\varphi_1 \bullet \varphi_2) \subseteq \{u_1, \ldots, u_m\}$, όπου $\bullet$ ένα από τα σύμβολα $\wedge, \vee, \rightarrow$ (υπόθεση).
Από τη σχέση (1)΄ έχουμε ότι $FV(\varphi_1) \subseteq FV(\varphi_1 \bullet \varphi_2)$, άρα $FV(\varphi_1) \subseteq \{u_1, \ldots, u_m\}$.
Όμοια, $FV(\varphi_2) \subseteq \{u_1, \ldots, u_m\}$.

Έστω ότι ισχύει $FV(\neg\varphi_1) \subseteq \{u_1, \ldots, u_m\}$ (υπόθεση).
Από τη σχέση (1)΄ έχουμε ότι $FV(\varphi_1) = FV(\neg\varphi_1)$, άρα $FV(\varphi_1) \subseteq \{u_1, \ldots, u_m\}$.

***Σημείωση για το Επαγωγικό βήμα* (ii)**

Για να επιβεβαιώσουμε ότι μπορεί να εκτελεστεί το Επαγωγικό βήμα (ii), πρέπει να ελέγξουμε ότι οι δηλώσεις $\varphi_1^M(L\ ;\ u \mid\!\rightarrow d)$ που χρησιμοποιούνται για το τελικό αποτέλεσμα μπορούν να κατασκευαστούν. Δηλαδή, ότι θα ισχύουν για αυτές τις δηλώσεις οι συνθήκες (α, β, γ) , όταν οι ίδιες συνθήκες ισχύουν για τη δήλωση $(\forall u\ \varphi_1)^M(L)$, είτε για τη δήλωση $(\exists u\ \varphi_1)^M(L)$.

Οι συνθήκες (α) και (γ) είναι προφανείς, οπότε επιβεβαιώνουμε τη συνθήκη (β) .

Έστω ότι ισχύει $FV(\forall u\ \varphi_1) \subseteq \{u_1, \ldots, u_m\}$ (υπόθεση).
Από τη σχέση (2)΄ έχουμε ότι $FV(\varphi_1) = FV(\forall u\ \varphi_1) \cup \{u\}$, άρα $FV(\varphi_1) \subseteq \{u_1, \ldots, u_m\} \cup \{u\}$.
Όμοια για τη δήλωση $(\exists u\ \varphi_1)^M(L)$.

Ερώτημα 11
Έστω φ ένας τύπος Α΄ τάξης, όπου $FV(\varphi) \subseteq \{u_1, \ldots, u_m\}$.
Έστω L , K δύο πίνακες όπως παραπάνω, όπου $L[u_j] = K[u_j]$, $j = 1,\ldots,m$.
Επιβεβαιώστε ότι οι δηλώσεις $\varphi^M(L)$, $\varphi^M(K)$, έχουν την ίδια τιμή αλήθειας.

Επαγωγικές ιδιότητες των τιμών αλήθειας

Εξετάζοντας τον παραπάνω επαγωγικό ορισμό της δήλωσης $\varphi^M(L)$ -- και χρησιμοποιώντας τον ίδιο συμβολισμό, $\varphi^M(L)$, για την τιμή αλήθειας της -- προκύπτουν οι παρακάτω ιδιότητες:

(ι) Για κάθε (κατάλληλο) μοντέλο M και πίνακα L ,

$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)^M(L) = \varphi_1^M(L)$ and $\varphi_2^M(L)$

$(\varphi_1 \vee \varphi_2)^M(L) = \varphi_1^M(L)$ or $\varphi_2^M(L)$

$(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)^M(L) = \varphi_1^M(L)$ implies $\varphi_2^M(L)$

$(\neg \varphi_1)^M(L) =$ not $\varphi_1^M(L)$

(ιι) Για κάθε (κατάλληλο) μοντέλο M και πίνακα L ,

$(\forall u\ \varphi_1)^M(L) =$ AND $_{d \in U}$ $\varphi_1^M(L\ ;\ u \mid\!\rightarrow d)$

$(\exists u\ \varphi_1)^M(L) =$ OR $_{d \in U}$ $\varphi_1^M(L\ ;\ u \mid\!\rightarrow d)$

- **Συνεπαγωγή τύπων Α΄ τάξης**

Ο τύπος ψ *συνεπάγεται* από τους τύπους $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (συμβολικά $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$), αν:

Για κάθε (κατάλληλο) μοντέλο M και πίνακα L ,
αν $\varphi_i^M(L) =$ *true* για i=1,...,n , τότε $\psi^M(L) =$ *true* .

Αντίστοιχα, ο τύπος ψ *δεν συνεπάγεται* από τους $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (συμβολικά $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \not\models \psi$), αν:

Υπάρχει ένα μοντέλο M και πίνακας L , ώστε
$\varphi_i^M(L) =$ *true* για i=1,...,n , και $\psi^M(L) =$ *false* .

Τα M , L αποτελούν *αντιπαράδειγμα* για τη συνεπαγωγή.

Ένας τύπος ψ ονομάζεται *έγκυρος* (συμβολικά $\models \psi$), αν:

Για κάθε μοντέλο M και πίνακα L ,
$\psi^M(L) =$ *true* .

Ο όρος «έγκυρος» είναι ταυτόσημος με τον όρο «ταυτολογία».

Ο συμβολισμός $\not\models \psi$ σημαίνει ότι ο τύπος ψ *δεν είναι έγκυρος*.

Δύο τύποι φ, ψ ονομάζονται *λογικά ισοδύναμοι* (συμβολικά $\varphi \models\,=\!\mid \psi$), αν:

$\varphi \models \psi$ και $\psi \models \varphi$.

Ερώτημα 12 Επιβεβαιώστε ότι: $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$ αν και μόνο αν
$\models (\varphi_1 \wedge \ldots (\varphi_{n-1} \wedge \varphi_n) \ldots) \rightarrow \psi$.

Ερώτημα 13 Επιβεβαιώστε ότι: $\models \psi$ αν και μόνο αν $\models \forall u\ \psi$.

Ερώτημα 14 Ποιοί από τους τύπους στα παραδείγματα δηλώσεων είναι λογικά ισοδύναμοι;

Παραδείγματα συνεπαγωγών

1 Έστω φ ο τύπος $\forall x\,(\forall y\,(R(x, y) \wedge R(y, x)))$ και ψ ο τύπος $\forall x\,(\forall y\,(R(x, y) \rightarrow R(y, x)))$.

Επιβεβαιώνουμε ότι $\varphi \models \psi$:

Έστω M ένα μοντέλο -- με πεδίο ορισμού U και με μία διμερή σχέση ρ -- όπου $\varphi^M = \textit{true}$.
Για οποιαδήποτε στοιχεία a, b του U , θα είναι $\rho(a, b) = \textit{true}$ και $\rho(b, a) = \textit{true}$.
Άρα θα είναι και $(\rho(a, b) \text{ implies } \rho(b, a)) = \textit{true}$, για οποιαδήποτε a, b στο U . Άρα $\psi^M = \textit{true}$.

Επιβεβαιώνουμε ότι $\psi \not\models \varphi$:

Έστω M το μοντέλο με πεδίο ορισμού $U = \{1, 2\}$ και με διμερή σχέση ρ , όπου:
$\rho(a, b) = \textit{true}$ αν και μόνο αν $(a, b) = (1, 2)$ είτε $(a, b) = (2, 1)$.
Εξετάζοντας τις δυνατές περιπτώσεις, βλέπουμε ότι: για οποιαδήποτε a , b στο U θα είναι
$(\rho(a, b) \text{ implies } \rho(b, a)) = \textit{true}$. Άρα $\psi^M = \textit{true}$.
Όμως, για $(a, b) = (1, 1)$ είτε $(a, b) = (2, 2)$ θα είναι $(\rho(a, b) \text{ and } \rho(b, a)) = \textit{false}$. Άρα $\varphi^M = \textit{false}$.

Ερώτημα 15 Έστω φ ο τύπος $(R(x, y) \wedge R(y, x))$ και ψ ο τύπος $(R(x, y) \rightarrow R(y, x))$.
Επιβεβαιώστε ότι $\varphi \models \psi$ και ότι $\psi \not\models \varphi$.

Ερώτημα 16 Έστω θ ο τύπος $\exists w\,(\forall z\,(S(z) \rightarrow (z = w)))$.
Έστω θ′ ο τύπος $\forall y\,(\forall y'\,((S(y) \wedge S(y')) \rightarrow (y = y')))$.
Επιβεβαιώστε ότι $\theta \models\,=\!|\ \theta'$.

2 Έστω Δ ένα σύμβολο σχέσης με τρία ορίσματα, και M ένα μοντέλο με μία τριμερή σχέση δ , την οποία παριστάνουμε ως ένα πίνακα T με στήλες NAME , ADDR , ID : μία 3-άδα (n, a, i) θα περιέχεται στον πίνακα T αν και μόνο αν $\delta(n, a, i) = \textit{true}$.

Από τον πίνακα T κατασκευάζουμε ένα πίνακα T_1 με στήλες NAME , ADDR , παραλείποντας τη στήλη ID.

Έστω θ_1 ο τύπος $\exists z\,\Delta(x, y, z)$, έστω ότι το στοιχείο n αντικαθιστά τη μεταβλητή x και το a την y .
Η δήλωση $\theta_1^M(n, a)$ ισχύει, αν και μόνο αν η 2-άδα (n, a) περιέχεται στον πίνακα T_1 .

Από τον πίνακα T κατασκευάζουμε επίσης ένα πίνακα T_2 με στήλες ADDR , ID , παραλείποντας τη στήλη NAME.

Έστω θ_2 ο τύπος $\exists x\,\Delta(x, y, z)$, έστω ότι το στοιχείο i αντικαθιστά τη μεταβλητή z .
Η δήλωση $\theta_2^M(a, i)$ ισχύει, αν και μόνο αν η 2-άδα (a, i) περιέχεται στον πίνακα T_2 .

Ο πίνακας *join*(T_1 , T_2) αποτελείται από τις 3-άδες (n, a, i) , για τις οποίες $(n, a) \in T_1$ και $(a, i) \in T_2$.

Έστω θ ο τύπος $\theta_1 \wedge \theta_2$. Η δήλωση $\theta^M(n, a, i)$ ισχύει, αν και μόνο αν η 3-άδα (n, a, i) περιέχεται στον πίνακα *join*(T_1, T_2) .

Ερώτημα 17 Επιβεβαιώστε ότι $\Delta(x, y, z) \models \theta_1 \wedge \theta_2$. Συμπεράνετε ότι $T \subseteq$ *join*(T_1 , T_2) .

Ερώτημα 18 Επιβεβαιώστε ότι $\not\models (\theta_1 \wedge \theta_2) \rightarrow \Delta(x, y, z)$.
Συμπεράνετε ότι υπάρχει πίνακας T , για τον οποίο *join*$(T_1 , T_2) \not\subset T$.

Έστω φ ο τύπος $\forall x\,\forall y\,\forall z\,\forall x'\,\forall z'\,((\Delta(x, y, z) \wedge \Delta(x', y, z')) \rightarrow (x = x'))$.
Η δήλωση φ^M ισχύει, αν και μόνο αν η στήλη ADDR του πίνακα T είναι *κλειδί* για τη στήλη NAME .

Ερώτημα 19 Επιβεβαιώστε ότι $\varphi \models (\theta_1 \wedge \theta_2) \rightarrow \Delta(x, y, z)$.

- **Στοιχειώδεις συνεπαγωγές τύπων Α΄ τάξης**

1 Προτασιακοί συνδυασμοί

Έστω φ , φ' , θ , τύποι Α΄ τάξης. Άν ισχύει $\varphi \models \varphi'$, θα ισχύουν οι συνεπαγωγές

$(\varphi \wedge \theta) \models (\varphi' \wedge \theta)$ $\qquad$ $(\varphi \vee \theta) \models (\varphi' \vee \theta)$

$(\varphi' \to \theta) \models (\varphi \to \theta)$ $\qquad$ $(\theta \to \varphi) \models (\theta \to \varphi')$

$(\neg\varphi') \models (\neg\varphi)$.

Οι παραπάνω συνεπαγωγές μπορούν να επιβεβαιωθούν χρησιμοποιώντας τις Επαγωγικές ιδιότητες (ι) των τιμών αλήθειας.

Επιβεβαιώνουμε τη συνεπαγωγή $(\varphi \wedge \theta) \models (\varphi' \wedge \theta)$:

Έστω M ένα μοντέλο και L ένας πίνακας, για τα οποία $(\varphi \wedge \theta)^M(L) = \mathit{true}$.
Θα δείξουμε ότι $(\varphi' \wedge \theta)^M(L) = \mathit{true}$.
Από τις ιδιότητες (ι) έχουμε $(\varphi \wedge \theta)^M(L) = \varphi^M(L)$ and $\theta^M(L)$,
άρα $\varphi^M(L) = \mathit{true}$ και $\theta^M(L) = \mathit{true}$.
Επειδή $\varphi \models \varphi'$, από τη σχέση $\varphi^M(L) = \mathit{true}$ παίρνουμε $(\varphi')^M(L) = \mathit{true}$,
οπότε $(\varphi')^M(L)$ and $\theta^M(L) = \mathit{true}$.
Από τις ιδιότητες (ι) παίρνουμε $(\varphi')^M(L)$ and $\theta^M(L) = (\varphi' \wedge \theta)^M(L)$, άρα $(\varphi' \wedge \theta)^M(L) = \mathit{true}$.

2 Ποσοδείκτες

(A) Έστω φ , φ' τύποι Α΄ τάξης για τους οποίους ισχύει $\varphi \models \varphi'$.
Θα ισχύουν οι συνεπαγωγές $(\exists u\, \varphi) \models (\exists u\, \varphi')$ $\qquad$ $(\forall u\, \varphi) \models (\forall u\, \varphi')$.

Οι παραπάνω συνεπαγωγές μπορούν να επιβεβαιωθούν χρησιμοποιώντας τις Επαγωγικές ιδιότητες (ιι) των τιμών αλήθειας.

Επιβεβαιώνουμε τη συνεπαγωγή $(\exists u\, \varphi) \models (\exists u\, \varphi')$:

Έστω M ένα μοντέλο και L ένας πίνακας, για τα οποία $(\exists u\, \varphi)^M(L) = \mathit{true}$.
Θα δείξουμε ότι $(\exists u\, \varphi')^M(L) = \mathit{true}$.
Από τις ιδιότητες (ιι) έχουμε $(\exists u\, \varphi)^M(L) = \mathrm{OR}_{d \in U}\ \varphi^M(L\,;\, u \mapsto d)$,
άρα $\varphi^M(L\,;\, u \mapsto a) = \mathit{true}$, για κάποιο στοιχείο a του πεδίου ορισμού του M .
Επειδή $\varphi \models \varphi'$, από τη σχέση $\varphi^M(L\,;\, u \mapsto a) = \mathit{true}$ παίρνουμε $(\varphi')^M(L\,;\, u \mapsto a) = \mathit{true}$,
οπότε $\mathrm{OR}_{d \in U}\ (\varphi')^M(L\,;\, u \mapsto d) = \mathit{true}$.
Από τις ιδιότητες (ιι) παίρνουμε $(\exists u\, \varphi')^M(L) = \mathit{true}$.

(B) Έστω φ τύπος Α΄ τάξης. Ισχύουν οι λογικές ισοδυναμίες

$\exists w\, (\exists u\, \varphi) \models\!\!=\!\!| \exists u\, (\exists w\, \varphi)$ $\qquad$ $\forall w\, (\forall u\, \varphi) \models\!\!=\!\!| \forall u\, (\forall w\, \varphi)$.

(Γ) Έστω φ τύπος Α΄ τάξης, και $u \notin FV(\varphi)$.
Ισχύουν οι λογικές ισοδυναμίες $(\exists u\, \varphi) \models\!\!=\!\!| \varphi$ $\qquad$ $(\forall u\, \varphi) \models\!\!=\!\!| \varphi$

Για τις συνεπαγωγές (Β , Γ) χρησιμοποιούνται οι Επαγωγικές ιδιότητες (ιι) των τιμών αλήθειας, και επίσης το ότι: $\varphi^M(L\,;\, u \mapsto d) = \varphi^M(L)$, όταν $u \notin FV(\varphi)$ (βλέπε και το Ερώτημα 11).

3 Μετακίνηση ποσοδεικτών

(A) Έστω φ ένας τύπος Α΄ τάξης.
Ισχύουν οι λογικές ισοδυναμίες:

$$\neg(\exists u\ \varphi) \models\!\!=\!\!| (\forall u\ \neg\varphi) \qquad \neg(\forall u\ \varphi) \models\!\!=\!\!| (\exists u\ \neg\varphi)\ .$$

(B) Έστω φ , θ τύποι Α΄ τάξης, και $u \notin FV(\theta)$.
Ισχύουν οι λογικές ισοδυναμίες:

$$\exists u\ (\varphi \wedge \theta) \models\!\!=\!\!| (\exists u\ \varphi) \wedge \theta \qquad \exists u\ (\varphi \vee \theta) \models\!\!=\!\!| (\exists u\ \varphi) \vee \theta$$

$$\forall u\ (\varphi \wedge \theta) \models\!\!=\!\!| (\forall u\ \varphi) \wedge \theta \qquad \forall u\ (\varphi \vee \theta) \models\!\!=\!\!| (\forall u\ \varphi) \vee \theta$$

Οι παραπάνω λογικές ισοδυναμίες μπορούν να επιβεβαιωθούν χρησιμοποιώντας τις Επαγωγικές ιδιότητες (ι , ιι) των τιμών αλήθειας.

Επιβεβαιώνουμε τη συνεπαγωγή $\exists u\ (\varphi \wedge \theta) \models (\exists u\ \varphi) \wedge \theta$:

Έστω M ένα μοντέλο και L ένας πίνακας, για τα οποία $(\exists u\ (\varphi \wedge \theta))^M(L) = \mathit{true}$.
Θα δείξουμε ότι $((\exists u\ \varphi) \wedge \theta)^M(L) = \mathit{true}$.
Από τις ιδιότητες (ιι) έχουμε $(\exists u\ (\varphi \wedge \theta))^M(L) = \mathsf{OR}_{\,d\in U}\ (\varphi \wedge \theta)^M(L\ ;\ u \mapsto d)$,
άρα $(\varphi \wedge \theta)^M(L\ ;\ u \mapsto a) = \mathit{true}$, για κάποιο στοιχείο a του πεδίου ορισμού του M .
Από τις ιδιότητες (ι) έχουμε $\varphi^M(L\ ;\ u \mapsto a) = \mathit{true}$ και $\theta^M(L\ ;\ u \mapsto a) = \mathit{true}$.
Από τη σχέση $\varphi^M(L\ ;\ u \mapsto a) = \mathit{true}$ και τις ιδιότητες (ιι) παίρνουμε $(\exists u\ \varphi)^M(L) = \mathit{true}$.
Επειδή $u \notin FV(\theta)$, οι πίνακες L και $L\ ;\ u \mapsto a$ συμφωνούν στις μεταβλητές του συνόλου $FV(\theta)$ – επομένως, $\theta^M(L\ ;\ u \mapsto a) = \theta^M(L)$ (βλέπε και το Ερώτημα 11).
Από τη σχέση $\theta^M(L\ ;\ u \mapsto a) = \mathit{true}$, παίρνουμε $\theta^M(L) = \mathit{true}$.
Από τις σχέσεις $(\exists u\ \varphi)^M(L) = \mathit{true}$, $\theta^M(L) = \mathit{true}$, και τις ιδιότητες (ι) ,
παίρνουμε $((\exists u\ \varphi) \wedge \theta)^M(L) = \mathit{true}$.

Παρατήρηση: Η συνεπαγωγή $\exists u\ (\varphi \wedge \theta) \models (\exists u\ \varphi) \wedge \theta$ δεν ισχύει γενικά, για $u \in FV(\theta)$.

Επιβεβαιώνουμε ότι $\exists u\ (R(u) \wedge S(u)) \not\models (\exists u\ R(u)) \wedge S(u)$:

Έστω M ένα μοντέλο με πεδίο ορισμού {1, 2} , και με σχέσεις ρ , σ , όπου:
$\rho(1) = \mathit{true}$, $\sigma(1) = \mathit{true}$, $\sigma(2) = \mathit{false}$. Έστω L ένας πίνακας, όπου $L(u) = 2$.
Επειδή $\rho(1) = \mathit{true}$ και $\sigma(1) = \mathit{true}$, από τις ιδιότητες (ι , ιι) παίρνουμε
$(\ \exists u\ (R(u) \wedge S(u))\ )^M(L) = \mathit{true}$.
Επειδή $\sigma(2) = \mathit{false}$, από τις ιδιότητες (ι) παίρνουμε
$(\ (\exists u\ (R(u)) \wedge S(u)\ )^M(L) = \mathit{false}$.
Επομένως, $\exists u\ (R(u) \wedge S(u)) \not\models (\exists u\ R(u)) \wedge S(u)$.

Ερώτημα 20 Επιβεβαιώστε ότι οι συνεπαγωγές
$\forall u\ (\varphi \wedge \theta) \models (\forall u\ \varphi) \wedge \theta$ και $(\exists u\ \varphi) \vee \theta \models \exists u\ (\varphi \vee \theta)$,
ισχύουν για οποιουσδήποτε τύπους φ , θ .

Ερώτημα 21 Επιβεβαιώστε ότι: οι συνεπαγωγές (Β) που *δεν αναφέρονται στο Ερώτημα 20,* δεν ισχύουν γενικά, για $u \in FV(\theta)$.

(Γ) Έστω φ , θ τύποι Α΄ τάξης, και $u \notin FV(\theta)$.

Ισχύουν οι λογικές ισοδυναμίες:

$$\exists u\, (\varphi \to \theta) \models\!\!\!= (\forall u\, \varphi) \to \theta \qquad \exists u\, (\theta \to \varphi) \models\!\!\!= (\theta \to \exists u\, \varphi)$$

$$\forall u\, (\varphi \to \theta) \models\!\!\!= (\exists u\, \varphi) \to \theta \qquad \forall u\, (\theta \to \varphi) \models\!\!\!= (\theta \to \forall u\, \varphi)$$

Οι παραπάνω λογικές ισοδυναμίες μπορούν να επιβεβαιωθούν χρησιμοποιώντας τις Επαγωγικές ιδιότητες (ι , ιι) των τιμών αλήθειας.

Επιβεβαιώνουμε την ισοδυναμία $\exists u\, (\varphi \to \theta) \models\!\!\!= (\forall u\, \varphi) \to \theta$:

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (ι) παίρνουμε $(\varphi \to \theta) \models\!\!\!= (\neg\varphi) \vee \theta$,
και εφαρμόζοντας την (2Α) παίρνουμε $\exists u\, (\varphi \to \theta) \models\!\!\!= \exists u\, ((\neg\varphi) \vee \theta)$.

Από την (3Β) έχουμε $\exists u\, ((\neg\varphi) \vee \theta) \models\!\!\!= (\exists u\, \neg\varphi) \vee \theta$.
Εφαρμόζοντας τις (3Α , 1) παίρνουμε $(\exists u\, \neg\varphi) \vee \theta \models\!\!\!= \neg(\forall u\, \varphi) \vee \theta$.
Χρησιμοποιώντας τις (ι) παίρνουμε $\neg(\forall u\, \varphi) \vee \theta \models\!\!\!= (\forall u\, \varphi) \to \theta$.

Από τις προηγούμενες ισοδυναμίες προκύπτει $\exists u\, (\varphi \to \theta) \models\!\!\!= (\forall u\, \varphi) \to \theta$.

Παρατήρηση: Η συνεπαγωγή $\exists u\, (\varphi \to \theta) \models (\forall u\, \varphi) \to \theta$ δεν ισχύει γενικά, για $u \in FV(\theta)$.

Επιβεβαιώνουμε ότι $\exists u\, (R(u) \to S(u)) \not\models (\forall u\, R(u)) \to S(u)$:

Έστω M το μοντέλο με πεδίο ορισμού {1, 2} και τις σχέσεις ρ , σ , όπου: $\rho(1) = \mathit{true}$, $\rho(2) = \mathit{true}$, $\sigma(1) = \mathit{true}$, $\sigma(2) = \mathit{false}$.
Έστω L ένας πίνακας, όπου $L[u] = 2$.
Επειδή $\rho(1) = \mathit{true}$ και $\sigma(1) = \mathit{true}$, από τις ιδιότητες (ι , ιι) παίρνουμε
$(\, \exists u\, (R(u) \to S(u))\,)^M(L) = \mathit{true}$.
Επειδή $\rho(1) = \mathit{true}$ και $\rho(2) = \mathit{true}$, από τις ιδιότητες (ι , ιι) παίρνουμε
$(\forall u\, R(u))^M(L) = \mathit{true}$.
Επειδή $\sigma(2) = \mathit{false}$, από τις ιδιότητες (ι) παίρνουμε
$(\, (\forall u\, (R(u)) \to S(u)\,)^M(L) = \mathit{false}$.
Επομένως, $\exists u\, (R(u) \to S(u)) \not\models (\forall u\, R(u)) \to S(u)$.

Ερώτημα 22 Επιβεβαιώστε ότι οι συνεπαγωγές
$(\forall u\, \varphi) \to \theta \models \exists u\, (\varphi \to \theta)$ και $\theta \to (\exists u\, \varphi) \models \exists u\, (\theta \to \varphi)$,
ισχύουν για οποιουσδήποτε τύπους φ , θ .

Ερώτημα 23 Επιβεβαιώστε ότι: οι συνεπαγωγές (Γ) που *δεν αναφέρονται στο Ερώτημα 22,* δεν ισχύουν γενικά, για $u \in FV(\theta)$.