Κανόνας $\forall$ introduction

Παράδειγμα 1α Να δειχτεί ότι αληθεύει $\models \forall z\,(Q(z, y) \rightarrow Q(z, y))$ (1)

Έστω α μία "*τυχαία τιμή*" της μεταβλητής z :

Αρκεί να δειχτεί ότι $\models (Q(\alpha, y) \rightarrow Q(\alpha, y))$ (2)

Σημείωση Η συνθήκη (2) είναι ικανή *και αναγκαία* για να αληθεύει η (1)

[1. $Q(\alpha, y)$	υπόθεση
2. $Q(\alpha, y)$ **]**	1, copy
3. $(Q(\alpha, y) \rightarrow Q(\alpha, y))$	{1, 2} , implies – introduction

forall u - introduction

$$\frac{[\ \ldots\ \phi[u0 / u]\ ]}{\forall u\ \phi}$$

u0 ***νέα τοπική μεταβλητή***

<u>*Ορθότητα* του κανόνα forall u – introduction</u>

Για οποιοδήποτε τύπο φ για τον οποίο αληθεύει μια συνεπαγωγή

$\Sigma \models \phi[u0 / u]$ όπου Σ κάποιο σύνολο τύπων,

u0 δεν εμφανίζεται στα Σ, φ

Θα αληθεύει και η συνεπαγωγή $\Sigma \models \forall u\ \phi$

Σημείωση 1 Η συνεπαγωγή $\phi[u0 / u] \models \forall u\ \phi$ δεν αληθεύει γενικά

Αντιπαράδειγμα για το ότι $Q(u0, y) \models \forall u\ Q(u, y)$:

q είναι η σχέση "<" για τους ακέραιους

u0 παίρνει την τιμή 2 y παίρνει την τιμή 3 forall u - introduction

$$\frac{[\ \ldots\ \phi[u0 / u]\ ]}{\forall u\ \phi}$$ u0 ***νέα τοπική μεταβλητή***

Παράδειγμα 1β Να αποδειχτεί τυπικά ότι $|\!-\!-\ \forall z\ (Q(z, y) \rightarrow Q(z, y))$

[	u0 ***νέα τοπική μεταβλητή***
[1. $Q(u0, y)$	υπόθεση
2. $Q(u0, y)$ **]**	1, copy
3. $(Q(u0, y) \rightarrow Q(u0, y))$ **]**	{1, 2} , implies – introduction
4. $\forall z\ (Q(z, y) \rightarrow Q(z, y))$	forall z – introduction στις {1 ... 3}
	ϕ είναι $(Q(z, y) \rightarrow Q(z, y))$
	$\phi[u0 / u]$ είναι $(Q(u0, y) \rightarrow Q(u0, y))$

Παράδειγμα 1γ Η μεταβλητή u0 πρέπει να είναι *νέα* - να μην έχει ήδη εμφανιστεί.

<u>Δεν αποδεικνύεται τυπικά ότι</u> $Q(z, y)\ |\!-\!-\ \forall z\ Q(z, y)$

1. $Q(z, y)$	
[	z μεταβλητή ?
2. $Q(z, y)$ **]**	1, copy
3. $\forall z\ Q(z, y)$	forall z – introduction στις { 2 }
	ϕ είναι $Q(z, y)$ $\phi[z / z]$ είναι $Q(z, y)$

Παράδειγμα 1δ Η μεταβλητή u0 πρέπει να είναι *τοπική* - να μην εμφανίζεται αφού κλείσει η υπο-απόδειξη όπου δηλώνεται η u0 .

<u>Δεν αποδεικνύεται τυπικά ότι</u> $|\!-\!-\ \forall z\ (z = u0)$

[	u0 νέα μεταβλητή ?
1. $(u0 = u0)$ **]**	ανακλαστικότητα του =
3. $\forall z\ (z = u0)$	forall z – introduction στις { 1 }
	ϕ είναι $(z = u0)$ $\phi[u0 / z]$ είναι $(u0 = u0)$

Παράδειγμα 2 Να αποδειχτεί τυπικά ότι $\forall z \ \neg\neg Q(z , y) \ |\text{--} \ \forall z \ Q(z , y)$

$\forall z \ \neg\neg Q(z , y) \ |\text{--} \ \forall x \ Q(x , y)$

1. $\forall z \ \neg\neg Q(z , y)$

[u0 ***νέα τοπική μεταβλητή***

2. $\neg\neg Q(u0 , y)$ 1, forall z - elimination

3. $Q(u0 , y)$ **]** 2, not not - elimination

4. $\forall x \ Q(x , y)$ forall x – introduction στις {2, 3}
φ είναι $Q(x , y)$ φ[u0 / x] είναι $Q(u0 , y)$

Ερώτημα 1 Έστω ότι δίνεται μία τυπική απόδειξη του φ |-- ψ , όπου εμφανίζονται μόνο προτασιακά συνδετικά. Μπορείτε να κατασκευάσετε μία τυπική απόδειξη του $\forall x \, \phi \ |\text{--} \ \forall x \, \psi$;

Ερώτημα 2 Έστω ότι η μεταβλητή x δεν είναι ελεύθερη στους τύπους θ , η .
Να αποδειχτεί τυπικά ότι: $\theta \ |\text{–} \ \forall x \, (\theta \vee \eta)$

Κανόνας $\exists$ elimination

Παράδειγμα 3α Να δειχτεί ότι αληθεύει $\exists z\ \neg\neg Q(z , y)\ |=\ \exists x\ Q(x , y)$ (1)

Έστω α μία “κατάλληλη τιμή” της μεταβλητής z , ώστε να αληθεύει $\neg\neg Q(\alpha , y)$:
Αρκεί να δειχτεί ότι $\neg\neg Q(\alpha , y)\ |=\ \exists x\ Q(x , y)$ (2)

Σημείωση Η συνθήκη (2) είναι ικανή *και αναγκαία* για να αληθεύει η (1)

1. $\neg\neg Q(\alpha , y)$
2. $Q(\alpha , y)$ 1, not not - elimination
3. $\exists x\ Q(x , y)$ 2, thereis x – introduction

thereis u – elimination

$$\frac{\exists u\ \phi \qquad [\ \phi[u0 / u]\ \ \dots\ \ \chi\ ]}{\chi}$$

u0 ***νέα τοπική μεταβλητή***

<u>*Ορθότητα* του κανόνα thereis u - elimination</u>

Για οποιουσδήποτε τύπους ϕ , χ για τους οποίους αληθεύει η συνεπαγωγή

$\Sigma\ ,\ \phi[u0 / u]\ \ |=\ \ \chi$

όπου Σ κάποιο σύνολο τύπων,
u0 δεν εμφανίζεται στα Σ, φ, χ :

Θα αληθεύει και η συνεπαγωγή $\Sigma\ ,\ \exists u\ \phi\ \ |=\ \ \chi$

Σημείωση 2 Η συνεπαγωγή $\exists u\ \phi\ |=\ \phi[u0 / u]$ δεν αληθεύει γενικά

Να βρεθεί αντιπαράδειγμα για το ότι $\exists u\ Q(u , y)\ |=\ Q(u0 , y)$

q είναι η σχέση ">" για τους ακέραιους
u0 παίρνει την τιμή 2 y παίρνει την τιμή 3

Ορθότητα του κανόνα thereis u - elimination

Για οποιουσδήποτε τύπους φ , χ για τους οποίους αληθεύει η συνεπαγωγή

Σ , φ[u0 / u] |= χ

όπου Σ κάποιο σύνολο τύπων,

u0 δεν εμφανίζεται στα Σ, φ, χ :

Θα αληθεύει και η συνεπαγωγή Σ , ∃u φ |= χ

Παράδειγμα 3β Να αποδειχτεί τυπικά ότι ∃z ¬¬Q(z , y) |-- ∃x Q(x , y)

1. ∃z ¬¬Q(z , y)

[2. ¬¬Q(u0 , y) u0 ***νέα τοπική μεταβλητή***

3. Q(u0 , y) 2, not not - elimination

4. ∃x Q(x , y)] 3, thereis x – introduction

5. ∃x Q(x , y) thereis z – elimination στις 1 , {2, 3, 4}

Παράδειγμα 3γ Η μεταβλητή u0 πρέπει να είναι *νέα* - να μην έχει ήδη εμφανιστεί.

Δεν αποδεικνύεται τυπικά ότι ∃y Q(z , y) |-- ∃y Q(y , y)

1. ∃y Q(z , y)

[

2. Q(z , z) z μεταβλητή ?

3. ∃y Q(y , y)] 2, thereis y – introduction

4. ∃y Q(y , y) thereis y – elimination στις 1, { 2, 3 }

Παράδειγμα 3δ Η μεταβλητή u0 πρέπει να είναι *τοπική* - να μην εμφανίζεται αφού κλείσει η υπο-απόδειξη όπου δηλώνεται η u0 .

Δεν αποδεικνύεται τυπικά ότι ∃y ¬(z = y) |-- ¬(z = u0)

1. ∃y ¬(z = y)

[

2. ¬(z = u0) z νέα μεταβλητή ?]

3. ¬(z = u0) thereis y – elimination στις 1, { 2 }

Παράδειγμα 4 Να αποδειχτεί τυπικά ότι ∃y (∃z Q(z , y)) |-- ∃z (∃y Q(z , y))

1. ∃y (∃z Q(z , y))

[[2. (∃z Q(z , u0)) u0 **νέα *τοπική* μεταβλητή**

[3. Q(u1 , u0) u1 **νέα *τοπική* μεταβλητή**

4. Q(**T0** , **T1**) 3, copy **T0** είναι u1 , **T1** είναι u0
στόχος 5

5. (∃y Q(**T0** , y)) 4, thereis y – introduction
στόχος 4

6. ∃z (∃y Q(z , y)) 5, thereis z – introduction
στόχος 3

]

7. ∃z (∃y Q(z , y)) thereis z – elimination στις 2 , {3 ... 6}
στόχος 2

]]

8. ∃z (∃y Q(z , y)) thereis y – elimination στις 1 , {2 ... 7}
στόχος 1

Ερώτημα 3 Έστω ότι δίνεται μία τυπική απόδειξη του φ |-- ψ ,
όπου εμφανίζονται μόνο προτασιακά συνδετικά. Μπορείτε να κατασκευάσετε
μία τυπική απόδειξη του ∃x φ |-- ∃x ψ ;

Ερώτημα 4 Έστω ότι η μεταβλητή x δεν είναι ελεύθερη στους τύπους θ , η .
Να αποδειχτεί τυπικά ότι: $\exists x\ (\theta \wedge \eta)\ \vdash\ \theta$

Παράδειγμα 5α Να αποδειχτεί τυπικά ότι $\exists y\ (\forall z\ Q(z, y))\ |\text{--}\ \forall z\ (\exists y\ Q(z, y))$

1. $\exists y\ (\forall z\ Q(z, y))$		
[[	2. $(\forall z\ Q(z, u0))$	u0 ***νέα τοπική* μεταβλητή**
[		u1 ***νέα τοπική* μεταβλητή**
	3. $Q(\mathbf{T1}, u0)$	2, forall z – elimination
	4. $Q(u1, \mathbf{T0}))$	3, copy **T0** είναι u0 , **T1** είναι u1 στόχος 4
	5. $(\exists y\ Q(u1, y))$	4, thereis y – introduction στόχος 3
	]	
	6. $\forall z\ (\exists y\ Q(z, y))$	forall z – introduction στις {3 ... 5} στόχος 2
	]]	
7. $\forall z\ (\exists y\ Q(z, y))$		thereis y – elimination στις 1 , {2 ... 6} στόχος 1

Παράδειγμα 5b Να αποδειχτεί τυπικά ότι ∃y (∀z Q(z , y)) |-- ∀z (∃y Q(z , y))

1. ∃y (∀z Q(z , y))

[[z0 ***νέα τοπική* μεταβλητή**

{ 2. (∀z Q(z , u0)) u0 ***νέα τοπική* μεταβλητή**

3. Q(**T1** , u0) 2, forall z – elimination

4. Q(z0 , **T0**)) 3, copy **T0** είναι u0 , **T1** είναι z0
στόχος 4

5. (∃y Q(z0 , y)) 4, thereis y – introduction
στόχος 3

}

6. ∃y Q(z0 , y)) thereis y – elimination στις {2 ... 5}
στόχος 2

]]

7. ∀z (∃y Q(z , y)) forall z – introduction στις 1 , {2 ... 6}
στόχος 1