Το πρόβλημα συνεπαγωγής τύπων *Α' τάξης*

Input Σ , σ **Question** Αληθεύει ότι $\Sigma \models \sigma$;

Γενική περίπτωση

Το πρόβλημα είναι ***μη-αποφασίσιμο***

Το ελάχιστο μέγεθος ενός *αντι-παραδείγματος* της $\Sigma \models \psi$
δεν είναι υπολογίσιμο από τα Σ , σ

Υπάρχουν αποδεικτικά συστήματα -- *πχ* *natural deductions* --
που είναι *ορθά και πλήρη*

Ορθότητα Άν υπάρχει μία τυπική απόδειξη του $\Sigma \vdash \psi$:
Θα αληθεύει η συνεπαγωγή $\Sigma \models \psi$.

Πληρότητα Άν αληθεύει η συνεπαγωγή $\Sigma \models \psi$:
Θα υπάρχει μία τυπική απόδειξη του $\Sigma \vdash \psi$.

Για αποδεικτικά συστήματα όπως παραπάνω,
υπάρχουν *αλγόριθμοι αναζήτησης αποδείξεων* που είναι *πλήρεις* :

Άν αληθεύει η συνεπαγωγή $\Sigma \models \psi$:
Η αναζήτηση θα βρεί μία τυπική απόδειξη του $\Sigma \vdash \psi$.

Το ελάχιστο μέγεθος μιάς τυπικής απόδειξης του $\Sigma \vdash \psi$
δεν είναι υπολογίσιμο *από το* $\Sigma \vdash \psi$

Ο χρόνος που θα χρειαστεί η αναζήτηση απόδειξης
δεν είναι υπολογίσιμος από τα Σ , σ

Το πρόβλημα συνεπαγωγής τύπων *Α' τάξης*

Ειδική περίπτωση: Τύποι χωρίς $\forall$, $\exists$

Το πρόβλημα είναι ***αποφασίσιμο***

G.Nelson - D.C. Oppen 'Fast decision procedures based on congruence closure'

I $\phi_1 \wedge \ldots \phi_n \models \psi$ άν και μόνο άν $\models (\phi_1 \wedge \ldots \phi_n) \rightarrow \psi$

άν και μόνο άν ***δεν υπάρχει αντι-παράδειγμα***

άν και μόνο άν $(\phi_1 \wedge \ldots \phi_n) \wedge (\neg\psi)$ ***μη-ικανοποιήσιμος***

II Έστω $(\theta_1 \vee \ldots \theta_m)$ η διαζευκτική κανονική μορφή *του* $(\phi_1 \wedge \ldots \phi_n) \wedge (\neg\psi)$:

θ_k είναι ένας τύπος $(\eta(k, 1) \wedge \ldots \eta(k, m_k))$

Κάθε $\eta(k, j)$ είναι ατομικός τύπος ή άρνηση ατομικού τύπου

$(\theta_1 \vee \ldots \theta_m)$ *μη-ικανοποιήσιμος*

άν και μόνο άν **κάθε** θ_k ***μη-ικανοποιήσιμος***

III θ_k είναι $(\eta(k,1) \wedge \ldots \eta(k,m_k))$

Κάθε $\eta(k,j)$ είναι ατομικός τύπος ή άρνηση ατομικού τύπου

a Ο τύπος θ_k δεν περιέχει το = .

Κάθε $\eta(k,j)$ είναι τύπος της μορφής $P(\tau_1, \ldots \tau_\lambda)$ είτε της μορφής $\neg P(\tau_1, \ldots \tau_\lambda)$, όπου P ένα σύμβολο σχέσης και $\tau_1, \ldots \tau_\lambda$ είναι παραστάσεις.

Ο θ_k είναι μη-ικανοποιήσιμος *άν και μόνο άν*:

Υπάρχουν δύο τύποι $\eta(k,j)$, $\eta(k,j')$,
που ο ένας από τους δύο να είναι η άρνηση του άλλου.

b Ο τύπος θ_k δεν περιέχει σύμβολα για σχέσεις.

Κάθε $\eta(k,j)$ είναι ατομικός τύπος της μορφής $(\tau = \tau')$
είτε της μορφής $\neg(\tau = \tau')$, όπου τ, τ' είναι παραστάσεις.

G.Nelson - D.C. Oppen 'Fast decision procedures based on congruence closure'

Εφαρμόζουμε επαναληπτικά τους *κανόνες για την ομοιότητα* (congruence) :

$$\frac{}{t \approx t} \qquad \frac{t \approx t'}{t' \approx t} \qquad \frac{t_1 \approx t \qquad t \approx t_2}{t_1 \approx t_2}$$

$$\frac{t_1 \approx s_1 \; \ldots \; t_m \approx s_m}{f(t_1, \ldots, t_m) \approx f(s_1, \ldots, s_m)} \qquad \textit{για κάθε συνάρτηση } f$$

Ο θ_k είναι μη-ικανοποιήσιμος *άν και μόνο άν* : προκύπτει ένας τύπος $(\tau = \tau')$,
που η άρνησή του $\neg(\tau = \tau')$ είναι ένας από τους τύπους $\eta(k,j)$.

III θ_k είναι $(\, \eta(k, 1) \wedge \dots \eta(k, m_k)\,)$

Κάθε $\eta(k, j)$ είναι ατομικός τύπος ή άρνηση ατομικού τύπου,
και μπορεί να περιέχει οποιαδήποτε σύμβολα.

G.Nelson - D.C. Oppen 'Fast decision procedures based on congruence closure'

Εφαρμόζουμε επαναληπτικά τους κανόνες για την ομοιότητα, *και τους κανόνες*

$$\frac{t_1 \approx s_1 \;\; \dots \;\; t_m \approx s_m \qquad R(t_1, \dots, t_m)}{R(s_1, \dots, s_m)} \qquad \text{για κάθε σχέση } R$$

Ο θ_k είναι μη-ικανοποιήσιμος *άν και μόνο άν* : προκύπτει ένας ατομικός τύπος ϕ που η άρνησή του $\neg\phi$ είναι ένας από τους τύπους $\eta(k, j)$.

Παράδειγμα Έστω Σ το σύνολο τύπων $\{ f(f(f(f(x)))) = x,\ f(f(f(f(f(f(x)))))) = x \}$.
Χρησιμοποιείστε τον αλγόριθμο Nelson-Oppen για να δείξετε ότι:

$$\Sigma \models f(f(x)) = f(f(f(f(x))))$$

$$\Sigma \cup \{ R(x, f(x)) \} \not\models R(f(f(x)), f(f(f(x)))) \wedge (f(x) = x).$$