Τυπικοί συλλογισμοί σε γενική μορφή

Τυπικός συλλογισμός 1

Υποθέσεις $p \to q$ $\neg q$

Συμπέρασμα $\neg p$

Ο τυπικός συλλογισμός 1 είναι σωστός:

Αληθεύει η συνεπαγωγή $p \to q\ ,\ \neg q \ \models\ \neg p$

Απόδειξη Έστω ότι $v(p \to q) = T$ και $v(\neg q) = T$. Τότε $v(q) = F$.
Από τον πίνακα αληθείας της συνάρτησης $\to$, $v(p) = F$. Άρα $v(\neg p) = T$.

Α Ένας τυπικός συλλογισμός που είναι σωστός, συμβολίζεται ως ***sequent***:

Τυπικός συλλογισμός 1: $p \to q\ ,\ \neg q \ \vdash\ \neg p$

Β Ένας τυπικός συλλογισμός που είναι σωστός ***γενικεύεται,*** αντικαθιστώντας κάθε ένα προτασιακό γράμμα (p , q , ...) με μια αντίστοιχη μεταβλητή ϕ , ψ , ... που συμβολίζει *μιά τυχαία φόρμουλα*.

***Γενικευμένος* συλλογισμός 1:** $\phi \to \psi\ ,\ \neg\psi \ \vdash\ \neg\phi$

όπου ϕ , ψ είναι τύποι

Ο γενικευμένος συλλογισμός 1 είναι τυπικά σωστός:

Αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi \to \psi\ ,\ \neg\psi \ \models\ \neg\phi$

για οποιουσδήποτε τύπους ϕ , ψ

Απόδειξη Έστω ότι $v(\phi \to \psi) = T$ και $v(\neg\psi) = T$. Τότε $v(\psi) = F$.
Από τον πίνακα αληθείας της συνάρτησης $\to$, $v(\phi) = F$. Άρα $v(\neg\phi) = T$.

Γ **Ένας γενικός συλλογισμός *εξειδικεύεται,*** αντικαθιστώντας κάθε μία από τις μεταβλητές ϕ , ψ , ... με μιά φόρμουλα.

Από τον γενικευμένο συλλογισμό 1 , αντικαθιστώντας $\phi := (p \vee q)$ $\psi := (q \wedge r)$

προκύπτει: $(p \vee q) \to (q \wedge r)\ ,\ \neg(q \wedge r) \ \vdash\ \neg(p \vee q)$

Δ Ένας τυπικά σωστός συλλογισμός σε γενική μορφή μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ***απαγωγικός κανόνας*** **(deduction rule).**

Κανόνας modus tollens

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \neg\psi}{\neg\phi}$$

<u>*Ορθότητα* του κανόνα modus tollens</u>

Για οποιουσδήποτε τύπους φ , ψ , αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi \to \psi \ , \ \neg\psi \ \models \ \neg\phi$

Ε **Τυπική απόδειξη (formal deduction)** ονομάζεται μια ακολουθία τύπων, που προκύπτουν με <u>εφαρμογές</u> *ορισμένων απαγωγικών κανόνων* στις *υποθέσεις* της απόδειξης.
Η καταληκτική φόρμουλα της ακολουθίας είναι το *συμπέρασμα* της απόδειξης.

Απαγωγικοί κανόνες για μετατροπή σε συζευκτική / διαζευκτική κανονική μορφή (conjunctive / disjunctive normal form)

Αντιμεταθετικότητα - Προσεταιριστικότητα

$$\frac{\phi\wedge\psi}{\psi\wedge\phi} \qquad \frac{\phi\wedge(\chi\wedge\psi)}{(\phi\wedge\chi)\wedge\psi} \qquad \frac{\phi\vee\psi}{\psi\vee\phi} \qquad \frac{\phi\vee(\chi\vee\psi)}{(\phi\vee\chi)\vee\psi}$$

De Morgan

$$\frac{\neg(\phi\wedge\psi)}{\neg\phi \vee \neg\psi} \qquad \frac{\neg(\phi\vee\psi)}{\neg\phi \wedge \neg\psi}$$

Επιμεριστικότητες

$$\frac{\phi\vee(\chi \wedge \psi)}{(\phi\vee\chi) \wedge (\phi\vee\psi)} \qquad \frac{(\phi \wedge \chi)\vee\psi}{(\phi\vee\psi) \wedge (\chi\vee\psi)}$$

Απλοποιήσεις των $\neg$ $\rightarrow$

$\neg(\neg\phi)$	$\phi \rightarrow \psi$
-----------	-----------
ϕ	$\neg\phi \vee \psi$

Απλοποιήσεις των T F

$\phi\vee(\neg\phi)$	$\phi\wedge(\neg\phi)$	$\neg T$	$\neg F$	$\phi\vee T$	$\phi\wedge T$	$\phi\vee F$	$\phi\wedge F$
-----------	-----------	----	-----	------	------	------	------
T	F	F	T	T	ϕ	ϕ	F

Επίλυση (resolution)

$$\frac{\neg\phi \vee \psi_1 \qquad\qquad \phi \vee \psi_2}{\psi_1 \vee \psi_2}$$

Παραδείγματα

1 Μετατρέψτε τον τύπο $\neg((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$ σε συζευκτική κανονική μορφή.

$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

2 Μετατρέψτε τον τύπο $\neg((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$ σε διαζευκτική κανονική μορφή.

$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$