Απαγωγικοί κανόνες (deduction rules) για το $\wedge$

and - introduction

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi}$$

Ορθότητα του κανόνα and - introduction

Για οποιουσδήποτε τύπους φ , ψ , αληθεύει η συνεπαγωγή $\varphi \,,\, \psi \models \varphi \wedge \psi$

and - elimination 1

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$$

Ορθότητα του κανόνα and - elimination 1

Για οποιουσδήποτε τύπους φ , ψ , αληθεύει η συνεπαγωγή $\varphi \wedge \psi \models \varphi$

and - elimination 2

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$$

Ορθότητα του κανόνα and - elimination 2

Για οποιουσδήποτε τύπους φ , ψ , αληθεύει η συνεπαγωγή $\varphi \wedge \psi \models \psi$

F - elimination

$$\frac{F}{\varphi}$$

Ορθότητα του κανόνα F - elimination

Για οποιοδήποτε τύπο φ , αληθεύει η συνεπαγωγή $F \models \varphi$

1 Να αποδειχτεί τυπικά ότι $p \wedge q \ \vdash \ q \wedge p$

1	$p \wedge q$	υπόθεση
2	p	1 , and - elimination 1
3	q	1 , and - elimination 2
4	$q \wedge p$	2 , 3 , and - introduction

2 Να αποδειχτεί τυπικά ότι $(p \wedge \neg q) \wedge (\neg s \wedge r) \ \vdash \ (\neg s \wedge p) \wedge (\neg q \wedge r)$

1	$(p \wedge \neg q) \wedge (\neg s \wedge r)$	υπόθεση
2	$(p \wedge \neg q)$	1 , and - elimination 1
3	$(\neg s \wedge r)$	1 , and - elimination 2
4	p	2 , and - elimination 1
5	$\neg q$	2 , and - elimination 2
6	$\neg s$	3 , and - elimination 1
7	r	3 , and - elimination 1
8	$(\neg s \wedge p)$	4 , 6 , and - introduction
9	$(\neg q \wedge r)$	5 , 7 , and - introduction
10	$(\neg s \wedge p) \wedge (\neg q \wedge r)$	8 , 9 , and - introduction

3 Να αποδειχτεί τυπικά ότι $(p \wedge q) \wedge s \ \vdash \ p \wedge (q \wedge s)$

1	$(p \wedge q) \wedge s$	υπόθεση
2	$(p \wedge q)$	1 , and - elimination 1
3	s	1 , and - elimination 2
4	p	2 , and - elimination 1
5	q	2 , and - elimination 2
6	$(q \wedge s)$	3 , 5 , and - introduction
7	$p \wedge (q \wedge s)$	4 , 6 , and - introduction

4 Να αποδειχτεί τυπικά ότι $(p \wedge F) \wedge s \ \vdash \ p \wedge (r \wedge s)$

1 $(p \wedge F) \wedge s$

2 $(p \wedge F)$

3 p

4 s

5 F

6 r

7 $(r \wedge s)$

8 $p \wedge (r \wedge s)$

5 Μπορεί να αποδειχτεί τυπικά ότι $(p \wedge q) \wedge s \ \vdash \ p \wedge (r \wedge s)$ **?**

1 $(p \wedge q) \wedge s$

2 $(p \wedge q)$

3 s

4 p

5 q

r **??**

$(r \wedge s)$ **??**

$p \wedge (r \wedge s)$ **??**

6 Μπορεί να αποδειχτεί τυπικά ότι $(p \wedge q) \wedge s \ \vdash \ p \wedge (r \wedge F)$ **?**

$(p \wedge q) \wedge s \ \vdash \ p \wedge (s \wedge F)$ **?**

$(p \wedge q) \wedge s \ \vdash \ p \wedge (r \wedge q)$ **?**

Θεώρημα *Ορθότητας* των τυπικών αποδείξεων

Άν κάθε απαγωγικός κανόνας είναι ορθός, και υπάρχει μία τυπική απόδειξη του sequent $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \vdash \psi$: θα αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \psi$.

Πόρισμα Άν δεν αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \psi$, δεν μπορεί να υπάρξει τυπική απόδειξη του sequent $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \vdash \psi$ όπου να χρησιμοποιούνται μόνο ορθοί απαγωγικοί κανόνες.

Αναζήτηση τυπικής απόδειξης (proof search)

Input specification sequent $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \vdash \psi$
όπου εμφανίζονται: προτασιακά γράμματα, το $\wedge$, και το F

Output specification

Άν αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \psi$:
Επιστρέφεται μια τυπική απόδειξη του $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \vdash \psi$,
με τους κανόνες and - introduction
and - elimination 1 , and - elimination 2
F – elimination

Άν δεν αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \psi$:
Επιστρέφεται 'ERROR'

Ιδιότητες της συνεπαγωγής τύπων με $\wedge$

1 Η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \psi1 \wedge \psi2$ αληθεύει *άν και μόνο άν* αληθεύουν οι συνεπαγωγές $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \psi1$
$\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \psi2$

2 Η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \gamma$, όπου γ ένα προτασιακό γράμμα, αληθεύει *άν και μόνο άν* το γράμμα γ είτε το F εμφανίζεται σε κάποιον από τους τύπους $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n$.

Η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models F$, αληθεύει *άν και μόνο άν* το F εμφανίζεται σε κάποιον από τους τύπους $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n$.

Αλγόριθμος Proof-Search($\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \vdash \psi$ **)**

a ψ είναι $\psi_1 \wedge \psi_2$:

Proof-Search($\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \vdash \psi_1$ **)** , **Proof-Search(** $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \vdash \psi_2$ **)**

If κάποιο από τα δύο έδωσε 'ERROR'

then return 'ERROR'

else εφάρμοσε and - introduction
στις τελευταίες γραμμές των δύο αποδείξεων

b ψ είναι F , ή ψ είναι το προτασιακό γράμμα γ :

Εφάρμοσε επαναληπτικά τους κανόνες and - elimination 1 , and - elimination 2
στους τύπους $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n$

άν προκύψει το F : εφάρμοσε F – elimination

άν προκύψει το γ : **stop** (η απόδειξη ολοκληρώθηκε)

αλλοιώς, άν δεν υπάρχει *νέα* εφαρμογή των κανόνων:
return 'ERROR'

Ιδιότητα *Πληρότητας* του αλγόριθμου Proof-Search

Άν στο sequent $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \vdash \psi$ εμφανίζονται μόνο προτασιακά γράμματα,
το $\wedge$ και το F . και *αληθεύει* η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \psi$:

Ο αλγόριθμος θα επιστρέψει μια τυπική απόδειξη του $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \vdash \psi$,
με τους κανόνες and - introduction , and - elimination 1 , and - elimination 2 ,
και F – elimination .

Ιδιότητα *Ορθότητας* του αλγόριθμου Proof-Search

Άν στο sequent $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \vdash \psi$ εμφανίζονται μόνο προτασιακά γράμματα,
το $\wedge$ και το F . και *δεν αληθεύει* η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \psi$:

Ο αλγόριθμος θα επιστρέψει 'ERROR' .

Να αποδειχτεί τυπικά ότι $(p \wedge q) \wedge (s \wedge r) \;|\!-\; (s \wedge p) \wedge (q \wedge r)$

1	$(p \wedge q) \wedge (\neg s \wedge r)$	υπόθεση		
2	$(p \wedge q)$	1 , and - elimination 1		
3	$(s \wedge r)$	1 , and - elimination 2		
3a	p	2 , and - elimination 1		
3b	q	2 , and - elimination 2		
3c	s	3 , and - elimination 1		
3d	r	3 , and - elimination 2		
4	r	ΣΤΟΧΟΣ 2-1	3d	Copy
5	q	ΣΤΟΧΟΣ 2-2	3b	Copy
6	s	ΣΤΟΧΟΣ 1-1	3c	Copy
7	p	ΣΤΟΧΟΣ 1-2	3a	Copy
8	$(q \wedge r)$	ΣΤΟΧΟΣ 2		5 , 4 , and - introduction
9	$(s \wedge p)$	ΣΤΟΧΟΣ 1		7 , 6 , and - introduction
10	$(s \wedge p) \wedge (q \wedge r)$	ΣΤΟΧΟΣ 0		9 , 8 , and - introduction