Γενική ιδέα της συνεπαγωγής

Για τις υποθέσεις ϕ_1 ϕ_2 ... ϕ_n και το *συμπέρασμα* ψ ,

Θεωρούμε ότι *αληθεύει η συνεπαγωγή* $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \psi$ όταν:

Σε κάθε περίπτωση όπου αληθεύουν (ταυτόχρονα) όλες οι υποθέσεις,
θα αληθεύει και το συμπέρασμα.

Η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \psi$ δεν αληθεύει όταν:

Υπάρχει μία (τουλάχιστον περίπτωση) όπου αληθεύουν όλες οι υποθέσεις,
και δεν αληθεύει το συμπέρασμα.

Γενική ιδέα της ταυτολογίας

Άν ο τύπος ψ έχει τιμή αλήθειας true σε κάθε περίπτωση , ο ψ ονομάζεται *ταυτολογία*.

Για ένα δεδομένο μοντέλο **M** και στοιχεία **α1 , α2 ,** ... του M :

δ(φ) είναι η δήλωση (επίσης η τιμή αλήθειας της δήλωσης)
που αντιστοιχεί στον τύπο Α' τάξης φ , όταν
τα σύμβολα συναρτήσεων / σχέσεων / σταθερών του φ ερμηνεύονται με βάση το M ,
και το στοιχείο α_K αντικαταστήσει τις ελεύθερες εμφανίσεις της μεταβλητής x_K

Για τύπους Α' τάξης $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n , \psi$

Η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \psi$ αληθεύει όταν:

για οποιοδήποτε μοντέλο M (αντίστοιχο με το λεξιλόγιο των τύπων)
και οποιαδήποτε στοιχεία α1 , α2 , ... του M

είτε $(\delta(\phi_1)$ and $\delta(\phi_2)$ ... and $\delta(\phi_n))$ = false , είτε $\delta(\psi)$ = true

Η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \psi$ δεν αληθεύει όταν:

υπάρχει ένα (τουλάχιστον) μοντέλο M και στοιχεία α1 , α2 , ... του M , ώστε

$(\delta(\phi_1)$ and $\delta(\phi_2)$ ... and $\delta(\phi_n))$ = true , και $\delta(\psi)$ = false

Ο τύπος ψ είναι ταυτολογία όταν:

για οποιοδήποτε μοντέλο M (αντίστοιχο με το λεξιλόγιο των τύπων)
και οποιαδήποτε στοιχεία α1 , α2 , ... του M

$\delta(\psi)$ = true

Παραδείγματα

1 Η συνεπαγωγή $R(x, y) \models R(y, x)$ δεν αληθεύει

Αντιπαράδειγμα ρ = η σχέση « < » για τους ακέραιους , α = 2 , β = 3

Για το παραπάνω σύνολο, $\delta(R(x, y)) =$ ‘ 2 < 3 ’ = true ,
$\delta(R(y, x)) =$ ‘ 3 < 2 ’ = false

2 Η συνεπαγωγή $(f(x) = y), (z = f(y)) \models (f(f(x)) = z)$ αληθεύει

Έστω τυχαία F , a , b , c *ώστε* $\delta((f(x) = y)) =$ true , $\delta((z = f(y))) =$ true :

Τότε $F(a) =_U b$, και $c =_U F(b)$.

Επειδή η $=_U$ είναι *σχέση ισοδυναμίας άρα συμμετρική*, $F(b) =_U c$.

Επειδή η $=_U$ είναι *ομοιότητα ως προς την* F, $F(F(a)) =_U F(b)$.

Επειδή η $=_U$ είναι *σχέση ισοδυναμίας άρα μεταβατική*, $F(F(a)) =_U c$.
Άρα $\delta((f(f(x)) = z)) =$ true .

3 Η συνεπαγωγή $R(x, y) \vee (f(x) = y) \models (f(x) = y) \vee R(x, y))$ αληθεύει

Έστω τυχαία ρ , F , a , b , ώστε $\delta(R(x, y) \vee (f(x) = y)) =$ true ,

άρα $\delta(R(x, y))$ or $\delta((f(x) = y)) =$ true .

Τότε $\delta((f(x) = y) \vee R(x, y)) = \delta((f(x) = y))$ or $\delta(R(x, y))$

$= \delta(R(x, y))$ or $\delta((f(x) = y)) =$ true .

4 *Έστω τυχαία* F , a , b : $\delta((f(x) = y))$ αληθεύει *άν και μόνο άν*

$\delta((y = f(x)))$ αληθεύει .

$\delta((f(x) = y)) =$ true *άν και μόνο άν* $F(a) =_U b$

$\delta((y = f(x))) =$ true *άν και μόνο άν* $b =_U F(a)$

$F(a) =_U b$ *άν και μόνο άν* $b =_U F(a)$ (επειδή η $=_U$ είναι *συμμετρική σχέση*)

5 Η συνεπαγωγή $R(x, y) \vee (f(x) = y) \models R(x, y) \vee (y = f(x))$ αληθεύει

Έστω τυχαία ρ , F , a , b , ώστε $\delta(R(x, y) \vee (f(x) = y)) =$ true ,

άρα $\delta(R(x, y))$ or $\delta((f(x) = y)) =$ true .

Τότε $\delta(R(x, y) \vee (y = f(x))) = \delta(R(x, y))$ or $\delta((y = f(x))$

$= \delta(R(x, y))$ or $\delta((f(x) = y)) =$ true .

6 Η συνεπαγωγή $\exists x\,(R(x,y) \vee (f(x)=y)) \models \exists x\,(R(x,y) \vee (y=f(x)))$ αληθεύει

Έστω τυχαία ρ , F , a , b , ώστε $\delta(\exists x\,(R(x,y) \vee (f(x)=y))) = \text{true}$,

άρα $\mathrm{OR}_{h\in U}$ [$\delta'(R(x,y) \vee (f(x)=y))$ όταν x παίρνει τιμή h] = true ,

$\mathrm{OR}_{h\in U}$ [$\delta'(R(x,y))$ or $\delta'((f(x)=y))$ όταν x παίρνει τιμή h] = true .

Έχουμε $\delta'(R(x,y) \vee (y=f(x)))$ όταν x παίρνει τιμή h

= $\delta'(R(x,y))$ or $\delta'((y=f(x))$

= $\delta'(R(x,y))$ or $\delta'((f(x)=y))$

= $\delta'(R(x,y) \vee (f(x)=y))$ όταν x παίρνει τιμή h ,

άρα $\delta(\exists x\,(R(x,y) \vee (y=f(x))))$

= $\mathrm{OR}_{h\in U}$ [$\delta'(R(x,y) \vee (y=f(x)))$ όταν x παίρνει τιμή h]

= $\mathrm{OR}_{h\in U}$ [$\delta'(R(x,y) \vee (f(x)=y)$] όταν x παίρνει τιμή h]

= $\delta(\exists x\,(R(x,y) \vee (f(x)=y))) = \text{true}$.

Ερωτήματα

1 Για ποιούς τύπους Α' τάξης αληθεύουν οι παρακάτω συνεπαγωγές;

$\text{true} \models \psi$ $\qquad$ $\text{false} \models \psi$

$\phi \models \text{true}$ $\qquad$ $\phi \models \text{false}$

2 Αποδείξτε ότι: Η συνεπαγωγή τύπων Α' τάξης $\phi_1 , \phi_2 \ \ldots , \phi_n \models \psi$ αληθεύει, *άν και μόνο άν* ο τύπος Α' τάξης $(\phi_1 \wedge \phi_2 \ \ldots \wedge \phi_n) \to \psi$ είναι ταυτολογία.

3 Αποδείξτε ότι αληθεύουν οι παρακάτω συνεπαγωγές:

$(R(x) \to \forall y\, S(y,x))\,,\ (z=x) \models (x=z) \wedge ((\neg R(z)) \vee \forall y\, S(y,z))$

$\neg R(x,y) \models \neg((\exists x\, \forall y\, R(y,x)) \wedge R(x,y))$

4 Αποδείξτε ότι αληθεύει η λογική ισοδυναμία

$(g(f(x), g(y,z)) = h(y,x,x)) \models \;\!\!=\!\!| \ (h(y,x,x) = g(f(x), g(y,z)))$

5 Αποδείξτε ότι αληθεύει η συνεπαγωγή

$\forall x\,(R(x,y) \wedge (f(x)=y)) \models \forall x\,(y=f(x))$

6 Για καθένα από τα παραδείγματα 3, 5, 6 : Αποδείξτε ότι αληθεύει και η *αντίστροφη* συνεπαγωγή.