Συντακτικό τύπων Α' Τάξης - Αντίστοιχες δηλώσεις

1 Έστω ένα λεξιλόγιο $\Lambda = (\{R\} , \{f\} , \{e\})$, όπου:

R ένα σύμβολο σχέσης με δύο ορίσματα,

f ένα σύμβολο συνάρτησης με ένα όρισμα,

e μία σταθερά.

Για κάθε μία από τις παρακάτω *συμβολοσειρές*:

α Βρείτε άν είναι παράσταση είτε τύπος Α΄ Τάξης ως προς το παραπάνω λεξιλόγιο Λ , και το σύνολο μεταβλητών $V = \{x, y, z\}$.

β Για τις συμβολοσειρές που είναι είτε παραστάσεις είτε τύποι Α΄ Τάξης κατασκευάστε τις *αντίστοιχες μαθηματικές παραστάσεις και δηλώσεις*,
για ένα δεδομένο *μοντέλο* $M = (U, \rho, F, E)$
αντίστοιχο του $\Lambda = (\{R\} , \{f\} , \{e\})$:

U είναι ένα πεδίο τιμών ,
E είναι ένα στοιχείο του U
$\rho : U\times U \to \{true, false\}$ είναι μία σχέση με δύο ορίσματα από το U ,
$F : U \to U$ είναι μία συνάρτηση με ένα όρισμα από το U ,
$=_U$ είναι η *σχέση ισότητας* για το U

όταν οι *εμφανίσεις των μεταβλητών* x , y , z *αντικαθιστώνται*
από τις τιμές a . b , c που είναι στοιχεία του U .

$f(f(y))$ — $\{ R(x, f(y) \wedge (e = f(x) \}$

$F(F(b))$ — $\rho(a,f(b))$ and $(E =_U F(a))$

$(R(y, x) = f(x))$ — $\{ R(y, x) \wedge R(z, f(e)) \} = \{ R(z, f(e)) \vee R(y, x) \}$

$\rho(b , a) =_U$!! $F(a)$ — !!

$(\forall x \le f(z)\ R(x, x))$ — $(y \to y)$ — $(\exists xy\ R(x, y))$

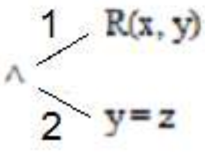
!! — b!! implies b!! — !!

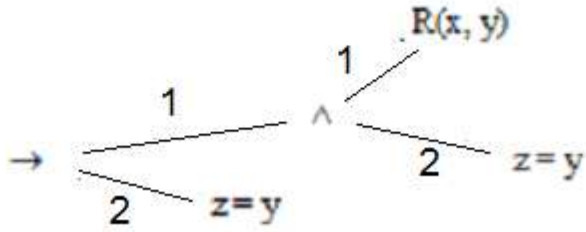
$[\forall x ((x \le f(z)) \to R(x, x))]$ — $(Y( ) \to Y( ))$ — $(\exists x (\exists y\ R(x, y)))$

Y( ) *νέο* σύμβολο σχέσης

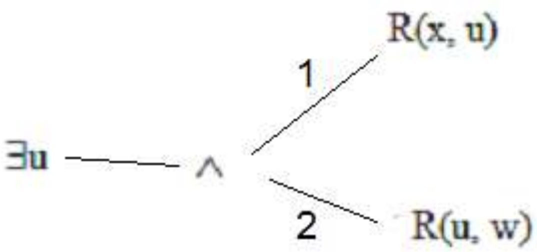
2 Κατασκευάστε τα parse-trees των παρακάτω τύπων Α′ Τάξης

$(R(x, y) \wedge (y = z))$ $\qquad$ $((R(x, y) \wedge (z = y)) \rightarrow (z = y))$



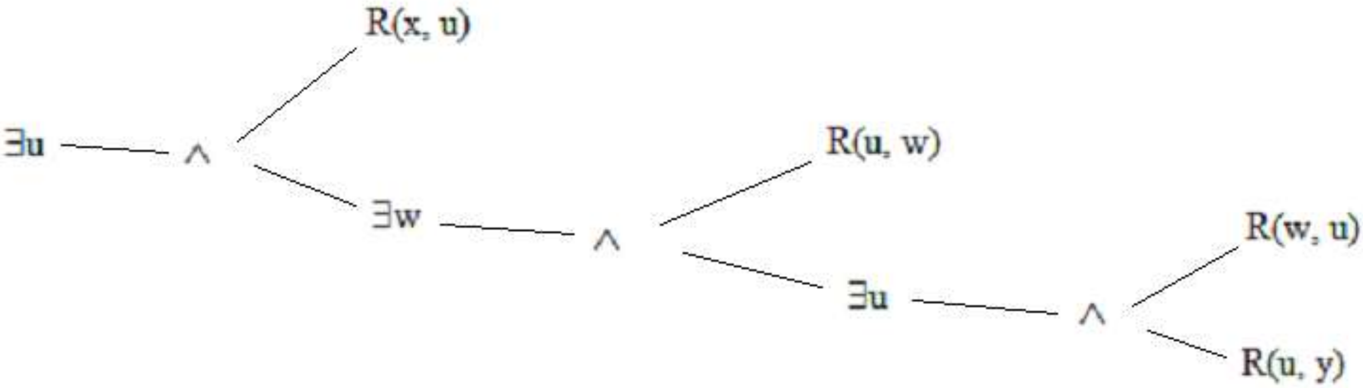


$(\exists u (R(x, u) \wedge R(u, w)))$



3 Για κάθε μία εμφάνιση μεταβλητής στον παρακάτω τύπο Α′ Τάξης,
βρείτε από ποιά εμφάνιση ποσοδείκτη δεσμεύεται ή άν είναι ελεύθερη

$(\exists u (R(x, u) \wedge (\exists w (R(u, w) \wedge (\exists u (R(w, u) \wedge R(u, y)))))))$



4 Έστω Λ ένα λεξιλόγιο με ένα σύμβολο σχέσης R με ένα όρισμα, και $M = (U, \rho)$ ένα μοντέλο αντίστοιχο του Λ .

α Κατασκευάστε τις δηλώσεις που αντιστοιχούν στους παρακάτω τύπους: οι ελεύθερες εμφανίσεις των μεταβλητών x , y να αντικαθίστανται με τα στοιχεία a1 , a2 αντίστοιχα.

$R(y)$	$\rho(a2)$
$\forall y\ R(y)$	$\text{AND}_{d \in U}\ \rho(d)$
$(\ R(x) \to \forall y\ R(y)\ )$	$(\ \rho(a1)\ \text{implies}\ (\ \text{AND}_{d \in U}\ \rho(d)\ )\ )$
$(\ \forall x\ (\ R(x) \to \forall y\ R(y)\ )$	$\text{AND}_{d \in U}\ [\ \rho(d)\ \text{implies}\ (\ \text{AND}_{d1 \in U}\ \rho(d1)\ )\ ]$
$\exists x\ (\ (\neg R(x)) \to \forall y\ R(y)\ )$	$\text{OR}_{d \in U}\ [\ (\text{not}\ \rho(d))\ \text{implies}\ (\ \text{AND}_{d1 \in U}\ \rho(d1)\ )\ ]$

β Έστω $U = \{\ n \mid n$ ακέραιος που διαιρείται με το 3 $\}$,
$\rho(n) = \text{true}$ όταν n είναι ακέραιος που διαιρείται με το 2 .

Βρείτε τις μαθηματικές ιδιότητες των a1, a2 που εκφράζονται, σε αυτό το μοντέλο, από τις παραπάνω δηλώσεις,.

$\rho(a2)$: ' ο ακέραιος a2 είναι άρτιος '

$$\begin{aligned} \text{AND}_{d \in U}\ \rho(d) &= (\ \text{AND}_{d \in U,\, d \neq 3}\ \rho(d)\ )\ \text{and}\ \rho(3) \\ &= (\ \text{AND}_{d \in U,\, d \neq 3}\ \rho(d)\ )\ \text{and false} \\ &= \text{false} \end{aligned}$$

$(\ \rho(a1)\ \text{implies}\ (\ \text{AND}_{d \in U}\ \rho(d)\ )\ )$

$= (\ \rho(a1)\ \text{implies false}\ ) = \text{not}\ \rho(a1)$

= ' ο ακέραιος a1 είναι περιττός '

$\text{AND}_{d \in U}\ [\ \rho(d)\ \text{implies}\ (\ \text{AND}_{d1 \in U}\ \rho(d1)\ )\ ]$

$= \text{AND}_{d \in U}\ (\text{not}\ \rho(d))$

$= \text{false}$, επειδή $(\text{not}\ \rho(6)) = \text{false}$

$\text{OR}_{d \in U}\ [\ (\text{not}\ \rho(d))\ \text{implies}\ (\ \text{AND}_{d1 \in U}\ \rho(d1)\ )\ ]$

$= \text{OR}_{d \in U}\ [\ (\text{not}\ \rho(d))\ \text{implies false}\ ]$

$= \text{OR}_{d \in U}\ \rho(d)$

$= \text{true}$, επειδή $\rho(6) = \text{true}$

5 Αποδείξτε ότι ο τύπος $(R(x) \rightarrow \forall y\, R(y))$ είναι *λογικά ισοδύναμος*

με τον τύπο $(\neg R(x) \lor \forall y\, R(y))$.

Έστω $M = (U, \rho)$ ένα μοντέλο και a1 ένα στοιχείο του U .

Η δήλωση δ1 που αντιστοιχεί στον τύπο $(R(x) \rightarrow \forall y\, R(y))$,
όταν οι ελεύθερες εμφανίσεις της μεταβλητής x αντικαθίστανται με το στοιχείο a1 ,

είναι $\delta 1 = (\rho(a1) \text{ implies } (\text{AND}_{d \in U}\, \rho(d)))$

Η δήλωση δ2 που αντιστοιχεί στον τύπο $(\neg R(x) \lor \forall y\, R(y))$,
όταν οι ελεύθερες εμφανίσεις της μεταβλητής x αντικαθίστανται με το στοιχείο a1 ,

είναι $\delta 2 = ((\text{not } \rho(a1)) \text{ or } (\text{AND}_{d \in U}\, \rho(d)))$

Από την προτασιακή λογική: δ1 = δ2 *για οποιαδήποτε* M , a1 .

6 Αποδείξτε ότι ο τύπος $\neg \forall y\, R(y)$ είναι *λογικά ισοδύναμος*

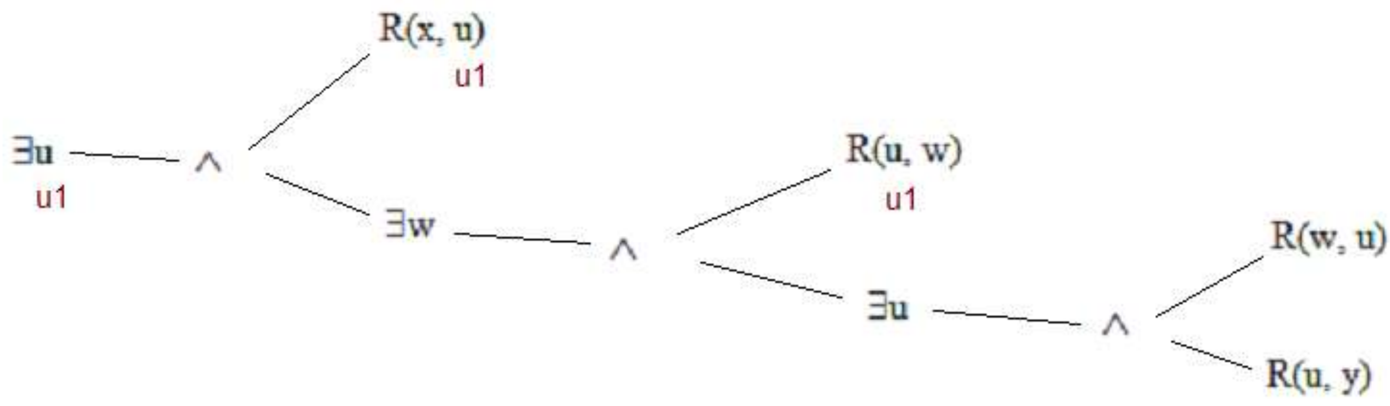
με τον τύπο $\exists y\, (\neg R(y))$.

7 Βρείτε έναν τύπο λογικά ισοδύναμο με τον

$$(\exists u\, (R(x, u) \land (\exists w\, (R(u, w) \land (\exists u\, (R(w, u) \land R(u, y)))))))$$

όπου κάθε ποσοδείκτης να δεσμεύει διαφορετική μεταβλητή.

$$(\exists \mathbf{u1}\, (R(x, u1) \land (\exists w\, (R(\mathbf{u1}, w) \land (\exists u\, (R(w, u) \land R(u, y)))))))$$



8 Αποδείξτε ότι ο τύπος $\exists x\ (R(x) \rightarrow (\forall y\ R(y)))$ είναι ταυτολογία.

Έστω $M = (U, \rho)$ ένα μοντέλο. Η δήλωση δ που αντιστοιχεί στον τύπο είναι

$$\delta = \mathrm{OR}_{d1 \in U}\ (\rho(d1)\ \text{implies}\ (\mathbf{AND}_{d \in U}\ \boldsymbol{\rho}(\mathbf{d})))$$

i Άν για το M έχουμε $\mathbf{AND}_{d \in U}\ \boldsymbol{\rho}(\mathbf{d}) = \text{true}$:

$$\delta = \mathrm{OR}_{d1 \in U}\ (\rho(d1)\ \text{implies}\ \mathbf{true})$$

$$= \mathrm{OR}_{d1 \in U}\ \text{true} = \text{true}$$

ii Άν για το M έχουμε $\mathbf{AND}_{d \in U}\ \boldsymbol{\rho}(\mathbf{d}) = \text{false}$:

$$\delta = \mathrm{OR}_{d1 \in U}\ (\rho(d1)\ \text{implies}\ \text{false})$$

$$= \mathrm{OR}_{d1 \in U}\ (\text{not}\ \rho(d1))$$

Επειδή $\mathbf{AND}_{d \in U}\ \boldsymbol{\rho}(\mathbf{d}) = \text{false}$, υπάρχει ένα τουλάχιστον $v \in U$ ώστε $\rho(v) = \text{false}$.
Επομένως $(\text{not}\ \rho(v)) = \text{true}$, και $\mathrm{OR}_{d1 \in U}\ (\text{not}\ \rho(d1)) = \text{true}$.

Άρα, για οποιοδήποτε μοντέλο $M = (U, \rho)$: $\delta = \text{true}$.