

Άλγεβρα Boole

Στη γνωστή *άλγεβρα του Boole* οι παραστάσεις περιέχουν μεταβλητές $\varphi, \psi, \theta, \dots$ (που αντιστοιχίζονται σε δηλώσεις είτε τιμές αλήθειας), τις πράξεις *and, or, not*, και τις σταθερές *true, false*.

Χρησιμοποιούμε ισότητες όπως

$$\Delta(\varphi) = (\text{not } \varphi) \text{ and } \varphi \qquad \Delta'(\varphi, \psi) = (\varphi \text{ or } \psi) \text{ and } \psi \qquad (1)$$

για να ορίσουμε ότι νέα σύμβολα Δ, Δ' αντιστοιχίζονται σε δηλώσεις με ορίσματα φ, ψ . Οποιαδήποτε δήλωση (ή τιμή αλήθειας) μπορεί να αντικαταστήσει τα φ, ψ δίνοντας νέες ισότητες όπως π.χ.

$$\Delta(\psi \text{ or } \varphi) = (\text{not } (\psi \text{ or } \varphi)) \text{ and } (\psi \text{ or } \varphi)$$

$$\text{αλλά και } \Delta'(\varphi, \Delta) = (\varphi \text{ or } \Delta) \text{ and } \Delta \qquad \text{ή ακόμη } \Delta'(\varphi, \Delta') = (\varphi \text{ or } \Delta') \text{ and } \Delta',$$

αφού τα σύμβολα Δ, Δ' αντιστοιχίζονται και αυτά σε δηλώσεις.

Ερώτημα 1 Βρείτε τα ορίσματα των δηλώσεων $\Delta(\psi \text{ or } \varphi), \Delta'(\varphi, \Delta), \Delta'(\varphi, \Delta')$.

Η χρήση νέων συμβόλων δεν είναι απαραίτητη. Μπορούμε να επεκτείνουμε το συντακτικό της άλγεβρας του Boole έτσι ώστε οι ήδη υπάρχουσες μεταβλητές $\varphi, \psi, \theta, \dots$ να μπορούν να αντιστοιχίζονται, μέσω ορισμών όπως παραπάνω, σε δηλώσεις με ορίσματα -- αρκεί να καθορίσουμε εξαρχής τον αριθμό των ορισμάτων που μπορεί να πάρει κάθε μία μεταβλητή.

Φυσικά, σε έναν ορισμό όπως $\psi(\varphi_1, \dots, \varphi_k) = t$ -- όπου για την μεταβλητή ψ έχουμε καθορίσει ότι παίρνει k ορίσματα και t είναι κάποια παράσταση -- η μεταβλητή ψ που ορίζεται δεν μπορεί να είναι κάποια από τις φ_i ούτε να εμφανίζεται στην παράσταση t , για να μην προκύψει κυκλικότητα.

Παράδοξο του Russell

Καθορίζοντας ότι καθεμία από τις μεταβλητές θ , φ μπορεί να πάρει ένα όρισμα, έχουμε τον *συντακτικά σωστό* ορισμό

$$\theta(\varphi) = \text{not } \varphi(\varphi) \quad (2)$$

Ερώτημα 2 Επιβεβαιώστε ότι η παράσταση $\theta(\Delta'(\Delta, \Delta))$ -- Δ, Δ' όπως στις (1) και θ όπως στη (2) - είναι συντακτικά σωστή. Βρείτε την τιμή αλήθειας της.

Ας προσπαθήσουμε να βρούμε την τιμή αλήθειας της παράστασης $\theta(\theta)$.

Έστω $\theta(\theta) = \text{true}$: τότε $(\text{not } \theta(\theta)) = \text{false}$, και από την (2) -- βάζοντας όπου φ το θ -- $\theta(\theta) = \text{false}$.

Έστω $\theta(\theta) = \text{false}$: τότε $(\text{not } \theta(\theta)) = \text{true}$, και από την (2) -- βάζοντας όπου φ το θ -- $\theta(\theta) = \text{true}$.

Ερώτημα 3 Αν καθεμία από τις μεταβλητές θ' , φ παίρνει ένα όρισμα, έχουμε τον συντακτικά σωστό ορισμό $\theta'(\varphi) = \varphi(\varphi)$. Μπορείτε να βρείτε σε ποιά δήλωση με ορίσματα αντιστοιχίζεται η παράσταση $\theta'(\theta')$;