

Κανόνας \forall introduction

Παράδειγμα 1α Να δειχτεί ότι αληθεύει $\models \forall z (Q(z, \gamma) \rightarrow Q(z, \gamma))$ (1)

Έστω α μία “τυχαία τιμή” της μεταβλητής z :

Αρκεί να δειχτεί ότι $\models (Q(\alpha, \gamma) \rightarrow Q(\alpha, \gamma))$ (2)

Σημείωση Η συνθήκη (2) είναι ικανή και αναγκαία για να αληθεύει η (1)

- | | |
|--|--------------------------------|
| [1. $Q(\alpha, \gamma)$ | υπόθεση |
| 2. $Q(\alpha, \gamma)$] | 1, copy |
| 3. $(Q(\alpha, \gamma) \rightarrow Q(\alpha, \gamma))$ | {1, 2}, implies – introduction |

forall u - introduction

[... $\phi[u_0 / u]$] u_0 **νέα τοπική μεταβλητή**

$\forall u \phi$

Ορθότητα του κανόνα forall u – introduction

Για οποιοδήποτε τύπο ϕ για τον οποίο αληθεύει μια συνεπαγωγή

$\Sigma \models \phi[u_0 / u]$ όπου Σ κάποιο σύνολο τύπων,
 u_0 δεν εμφανίζεται στα Σ, ϕ

Θα αληθεύει και η συνεπαγωγή $\Sigma \models \forall u \phi$

Παράδειγμα 1β Να αποδειχτεί τυπικά ότι $\vdash \forall z (Q(z, \gamma) \rightarrow Q(z, \gamma))$

- | | |
|--|---|
| [| u_0 νέα τοπική μεταβλητή |
| [1. $Q(u_0, \gamma)$ | υπόθεση |
| 2. $Q(u_0, \gamma)$] | 1, copy |
| 3. $(Q(u_0, \gamma) \rightarrow Q(u_0, \gamma))$] | {1, 2}, implies – introduction |
| 4. $\forall z (Q(z, \gamma) \rightarrow Q(z, \gamma))$ | forall z – introduction στις {1 ... 3}
ϕ είναι $(Q(z, \gamma) \rightarrow Q(z, \gamma))$
$\phi[u_0 / u]$ είναι $(Q(u_0, \gamma) \rightarrow Q(u_0, \gamma))$ |

Σημείωση 1 Η συνεπαγωγή $\phi[u_0 / u] \models \forall u \phi$ δεν αληθεύει γενικά

Να βρεθεί αντιπαράδειγμα για το ότι $Q(u_0, \gamma) \models \forall u Q(u, \gamma)$

q είναι η σχέση "<" για τους ακέραιους

u_0 παίρνει την τιμή 2 γ παίρνει την τιμή 3

Παράδειγμα 1γ Η μεταβλητή u_0 πρέπει να είναι νέα - να μην έχει ήδη εμφανιστεί.

Δεν αποδεικνύεται τυπικά ότι $Q(z, \gamma) \dashv\vdash \forall z Q(z, \gamma)$

1. $Q(z, \gamma)$

[z νέα μεταβλητή ?

2. $Q(z, \gamma)$] 1, copy

3. $\forall z Q(z, \gamma)$ forall z – introduction στις { 2 }

ϕ είναι $Q(z, \gamma)$ $\phi[z / z]$ είναι $Q(z, \gamma)$

Παράδειγμα 1δ Η μεταβλητή u_0 πρέπει να είναι τοπική - να μην εμφανίζεται αφού κλείσει η υπο-απόδειξη όπου δηλώνεται η u_0 .

Δεν αποδεικνύεται τυπικά ότι $\dashv\vdash \forall z (z = u_0)$

[u_0 τοπική μεταβλητή ?

1. $(u_0 = u_0)$] ανακλαστικότητα του =

3. $\forall z (z = u_0)$ forall z – introduction στις { 1 }

ϕ είναι $(z = u_0)$ $\phi[u_0 / z]$ είναι $(u_0 = u_0)$

Παράδειγμα 2 Να αποδειχτεί τυπικά ότι $\forall z \neg\neg Q(z, \gamma) \dashv\vdash \forall z Q(z, \gamma)$
 $\forall z \neg\neg Q(z, \gamma) \dashv\vdash \forall x Q(x, \gamma)$

1. $\forall z \neg\neg Q(z, \gamma)$

[u_0 **νέα τοπική μεταβλητή**

2. $\neg\neg Q(u_0, \gamma)$ 1, forall z - elimination

3. $Q(u_0, \gamma)$] 2, not not - elimination

4. $\forall x Q(x, \gamma)$ forall x – introduction στις {2, 3}
 ϕ είναι $Q(x, \gamma)$ $\phi[u_0 / x]$ είναι $Q(u_0, \gamma)$

Ερώτημα 1 Έστω ότι δίνεται μία τυπική απόδειξη του $\phi \dashv\vdash \psi$, όπου εμφανίζονται μόνο προτασιακά συνδετικά. Μπορείτε να κατασκευάσετε μία τυπική απόδειξη του $\forall x \phi \dashv\vdash \forall x \psi$;

Ερώτημα 2 Έστω ότι η μεταβλητή x δεν είναι ελεύθερη στους τύπους θ, η .
 Να αποδειχτεί τυπικά ότι: $\theta \vdash \forall x (\theta \vee \eta)$

Κανόνας \exists elimination

Παράδειγμα 3α Να δειχτεί ότι αληθεύει $\exists z \neg\neg Q(z, \gamma) \models \exists x Q(x, \gamma)$ (1)

Έστω α μία “κατάλληλη τιμή” της μεταβλητής z , ώστε να αληθεύει $\neg\neg Q(\alpha, \gamma)$:
 Αρκεί να δειχτεί ότι $\neg\neg Q(\alpha, \gamma) \models \exists x Q(x, \gamma)$ (2)

Σημείωση Η συνθήκη (2) είναι ικανή και αναγκαία για να αληθεύει η (1)

1. $\neg\neg Q(\alpha, \gamma)$
2. $Q(\alpha, \gamma)$ 1, not not - elimination
3. $\exists x Q(x, \gamma)$ 2, thereis x – introduction

$$\begin{array}{c}
 \text{thereis } u \text{ – elimination} \\
 \exists u \phi \quad [\phi[u_0 / u] \dots \chi] \quad u_0 \text{ **νέα τοπική μεταβλητή**} \\
 \hline
 \chi
 \end{array}$$

Ορθότητα του κανόνα thereis u - elimination

Για οποιουσδήποτε τύπους ϕ, χ για τους οποίους αληθεύουν οι συνεπαγωγές

$$\Sigma \models \exists u \phi \quad \Sigma, \phi[u_0 / u] \models \chi$$

όπου Σ κάποιο σύνολο τύπων,
 u_0 δεν εμφανίζεται στα Σ, ϕ, χ :

Θα αληθεύει και η συνεπαγωγή $\Sigma \models \chi$

Παράδειγμα 3β Να αποδειχτεί τυπικά ότι $\exists z \neg\neg Q(z, \gamma) \vdash \exists x Q(x, \gamma)$

1. $\exists z \neg\neg Q(z, \gamma)$
- [2. $\neg\neg Q(u_0, \gamma)$ u_0 **νέα τοπική μεταβλητή**
3. $Q(u_0, \gamma)$ 2, not not - elimination
4. $\exists x Q(x, \gamma)$] 3, thereis x – introduction
5. $\exists x Q(x, \gamma)$ thereis z – elimination στις 1, {2, 3, 4}

Σημείωση 2 Η συνεπαγωγή $\exists u \phi \models \phi[u_0 / u]$ δεν αληθεύει γενικά

Να βρεθεί αντιπαράδειγμα για το ότι $\exists u Q(u, y) \models Q(u_0, y)$

q είναι η σχέση ">" για τους ακέραιους

u_0 παίρνει την τιμή 2 y παίρνει την τιμή 3

Παράδειγμα 3γ Η μεταβλητή u_0 πρέπει να είναι νέα - να μην έχει ήδη εμφανιστεί.

Δεν αποδεικνύεται τυπικά ότι $\exists y Q(z, y) \vdash \exists y Q(y, y)$

1. $\exists y Q(z, y)$

[

2. $Q(z, z)$ z νέα μεταβλητή ?

3. $\exists y Q(y, y)$] 2, thereis y – introduction

4. $\exists y Q(y, y)$ thereis y – elimination στις 1, { 2, 3 }

Παράδειγμα 3δ Η μεταβλητή u_0 πρέπει να είναι τοπική - να μην εμφανίζεται αφού κλείσει η υπο-απόδειξη όπου δηλώνεται η u_0 .

Δεν αποδεικνύεται τυπικά ότι $\exists y \neg(z = y) \vdash \neg(z = u_0)$

1. $\exists y \neg(z = y)$

[

2. $\neg(z = u_0)$ z τοπική μεταβλητή ?

]

3. $\neg(z = u_0)$ thereis y – elimination στις 1, { 2 }

Παράδειγμα 4 Να αποδειχτεί τυπικά ότι $\exists y (\exists z Q(z, y)) \vdash \exists z (\exists y Q(z, y))$

1. $\exists y (\exists z Q(z, y))$

[2. $(\exists z Q(z, u_0))$ u_0 νέα τοπική μεταβλητή

[3. $Q(u_1, u_0)$ u_1 νέα τοπική μεταβλητή

4. $Q(\mathbf{T0}, \mathbf{T1})$ 3, copy $\mathbf{T0}$ είναι u_1 , $\mathbf{T1}$ είναι u_0
στόχος 5

5. $(\exists y Q(\mathbf{T0}, y))$ 4, thereis y – introduction
στόχος 4

6. $\exists z (\exists y Q(z, y))$ 5, thereis z – introduction
στόχος 3

]

7. $\exists z (\exists y Q(z, y))$ thereis z – elimination στις 2, {3 ... 6}
στόχος 2

]

8. $\exists z (\exists y Q(z, y))$ thereis y – elimination στις 1, {2 ... 7}
στόχος 1

Ερώτημα 3 Έστω ότι δίνεται μία τυπική απόδειξη του $\phi \vdash \psi$, όπου εμφανίζονται μόνο προτασιακά συνδετικά. Μπορείτε να κατασκευάσετε μία τυπική απόδειξη του $\exists x \phi \vdash \exists x \psi$;

Ερώτημα 4 Έστω ότι η μεταβλητή x δεν είναι ελεύθερη στους τύπους θ, η .
Να αποδειχτεί τυπικά ότι: $\exists x (\theta \wedge \eta) \vdash \theta$

Παράδειγμα 5 Να αποδειχτεί τυπικά ότι $\exists y (\forall z Q(z , y)) \vdash \forall z (\exists y Q(z , y))$

1. $\exists y (\forall z Q(z , y))$

[2. $(\forall z Q(z , u_0))$ u_0 νέα τοπική μεταβλητή

[u_1 νέα τοπική μεταβλητή

3. $Q(T_1 , u_0)$ 2, forall z – elimination

4. $Q(u_1 , T_0)$ 3, copy T_0 είναι u_0 , T_1 είναι u_1
στόχος 4

5. $(\exists y Q(u_1 , y))$ 4, thereis y – introduction
στόχος 3

]

6. $\forall z (\exists y Q(z , y))$ forall z – introduction στις {3 ... 5}
στόχος 2

]

7. $\forall z (\exists y Q(z , y))$ thereis y – elimination στις 1 , {2 ... 6}
στόχος 1