τύπος $\forall y\ R(y, x)$: « για κάθε y αληθεύει ότι $R(y, x)$ » **(1)**

αντίστοιχη δήλωση: $\text{AND}_{d \in U}\ \rho(d, a)$ **(2)**

<u>εφαρμογή</u> της **(2)** για $d = h$: $\rho(h, a)$

<u>εφαρμογή</u> της (1) για $y =$ **??** : « αληθεύει ότι R(**??** , x) »

τύπος R(**??** , x) « αληθεύει ότι R(**??** , x) »

R(**??** , x) θα προκύψει με *συντακτική αντικατάσταση της* y με *παράσταση* t

η τιμή της t ανήκει στο πεδίο ορισμού U

Συντακτική αντικατάσταση (substitution) μεταβλητής με παράσταση

Έστω φ ένας τύπος Α΄ τάξης, t μία παράσταση, u μία μεταβλητή.

Συμβολίζουμε με φ[t / u] , τον τύπο που προκύπτει *μεταγράφοντας κάθε <u>ελεύθερη</u> εμφάνιση* της μεταβλητής u στον τύπο φ , με την παράσταση t .

Παραδείγματα συντακτικής αντικατάστασης

$(\forall z\ R(z, x))\ [t / z]$ θα είναι ο τύπος $(\forall z\ R(z, x))$, για οποιαδήποτε παράσταση t

$(\exists z\ R(z, y))\ [y / y]$ είναι ο τύπος $(\exists z\ R(z, y))$

$(\forall z\ (S(\mathbf{x}, z, \mathbf{x}) \to (\exists x\ S(x, z, x))))\ [f(x, z) / \mathbf{x}]$

είναι ο τύπος $(\forall z\ (S(\mathbf{f(x, z)}, z, \mathbf{f(x, z)}) \to (\exists x\ S(x, z, x))))$

$(\forall z\ (S(\mathbf{x}, z, \mathbf{x}) \to (\exists x\ S(x, z, x))))\ [f(x, y) / \mathbf{x}]$

είναι ο τύπος $(\forall z\ (S(\mathbf{f(x, y)}, z, \mathbf{f(x, y)}) \to (\exists x\ S(x, z, x))))$

Παραδείγματα *αναδρομικής* συντακτικής αντικατάστασης

$(S(\mathbf{x}, z, \mathbf{x}) \rightarrow (\exists x\ S(x, z, x)))\ [f(x, y) / \mathbf{x}]$

είναι ο τύπος $(S(\mathbf{x}, z, \mathbf{x}) [f(x, y) / \mathbf{x}] \rightarrow (\exists x\ S(x, z, x)) [f(x, y) / \mathbf{x}])$

$(\exists x\ S(x, z, x)) [f(x, y) / \mathbf{x}]$

είναι ο τύπος $(\exists x\ S(x, z, x))$

$(\exists x\ S(x, \mathbf{z}, x)) [f(x, y) / \mathbf{z}]$

είναι ο τύπος $\exists x\ (S(x, \mathbf{z}, x) [f(x, y) / \mathbf{z}])$

Ιδιότητες της συντακτικής αντικατάστασης

$\phi[t / u]$ θα είναι ο τύπος ϕ, όταν η u *δεν εμφανίζεται ελεύθερη* στον ϕ

$\phi[u / u]$ θα είναι ο τύπος ϕ, για οποιαδήποτε ϕ, u

$(\phi \wedge \psi)\ [t / u]$ *είναι ο τύπος* $\phi[t / u] \wedge \psi[t / u]$

$(\phi \vee \psi)\ [t / u]$ *είναι ο τύπος* $\phi[t / u] \vee \psi[t / u]$

$(\neg\phi)\ [t / u]$ *είναι ο τύπος* $\neg (\phi[t / u])$

Όταν η u εμφανίζεται ελεύθερη στον $(\forall w\ \phi)$:

$(\forall w\ \phi) [t / u]$ *είναι ο τύπος* $\forall w\ (\phi[t / u])$

Όταν η u *ΔΕΝ* εμφανίζεται ελεύθερη στον $(\forall w\ \phi)$:

$(\forall w\ \phi) [t / u]$ *είναι ο τύπος* $(\forall w\ \phi)$

Θεώρημα Αντικατάστασης

Έστω ϕ ένας τύπος Α΄ τάξης και t μία παράσταση.

Για ένα δεδομένο μοντέλο M και στοιχεία a1, …, am του πεδίου ορισμού του M :
όταν το ak αντικαθιστά τη μεταβλητή uk ,

t^M(a1, …, am) είναι η τιμή της παράστασης t ,

ϕ^M(a1, …, am) είναι η δήλωση που αντιστοιχεί στον τύπο ϕ ,

$\phi[t / u1]^M$(a1, …, am) είναι η δήλωση που αντιστοιχεί στον τύπο $\phi[t / u1]$.

Υποθέτουμε ότι:

Οι εμφανίσεις μεταβλητών στην t , *είναι ελεύθερες στον τύπο* ϕ[t / u1] .

Θα αληθεύει ότι: $\phi[t / u1]^M$(a1, …, am) = ϕ^M(t^M(a1, …, am) , a2 , …, am) ,

για κάθε ϕ , t , M , u1 , … , um , a1 , …, am όπως παραπάνω

Επαλήθευση του Θεωρήματος Αντικατάστασης

΄Εστω Λ ένα λεξιλόγιο με ένα σύμβολο σχέσης R με τρία ορίσματα και ένα σύμβολο συνάρτησης f με δύο ορίσματα. ΄Εστω M = (U, ρ, F) ένα μοντέλο αντίστοιχο του Λ .

Κατασκευάζουμε τις δηλώσεις που αντιστοιχούν στους παρακάτω τύπους: οι ελεύθερες εμφανίσεις των μεταβλητών u1 , u2 , z αντικαθίστανται με τα στοιχεία a1 , a2 , b αντίστοιχα.

ϕ : $\forall$z R(z , **u1** , u2)

Η αντίστοιχη δήλωση είναι (AND $_{d\in U}$ ρ(d , **a1** , a2)) = ϕ^M(**a1** , a2)

ϕ[f(u2 , u1) / **u1**] είναι ο τύπος

$\forall$z R(z , **f(u2 , u1)** , u2)

Η αντίστοιχη δήλωση είναι (AND $_{d\in U}$ ρ(d , **F(a2, a1)** , a2)) = ϕ^M (**F(a2, a1)** , a2)

F(a2, a1) είναι η τιμή της παράστασης **f(u2 , u1)** όταν το ak αντικαθιστά την uk :

Το Θεώρημα Αντικατάστασης επαληθεύεται

ϕ[f(u2 , z) / **u1**] είναι ο τύπος

($\forall$z R(z , **f(u2 , z)** , u2))

Η αντίστοιχη δήλωση είναι (AND $_{d\in U}$ ρ(d , **F(a2, d)** , a2)) $\neq$ ϕ^M (**F(a2, b)** , a2)

F(a2, b) είναι η τιμή της παράστασης **f(u2 , z)** όταν τα a2 , b αντικαθιστούν τις u2 , z :

Το Θεώρημα Αντικατάστασης δεν εφαρμόζεται

Απαγωγικοί κανόνες (deduction rules) για τα $\forall$, $\exists$

thereis u - introduction

$$\frac{\phi[\, t / u\,]}{\exists u\ \phi}$$

Οι εμφανίσεις μεταβλητών στην t *είναι ελεύθερες στον τύπο* $\phi[\, t / u\,]$

Ορθότητα του κανόνα thereis u - introduction

Για οποιαδήποτε ϕ , t , u όπως παραπάνω, αληθεύει η συνεπαγωγή

$$\phi[\, t / u\,] \ \ |= \ \exists u\ \phi$$

Απόδειξη Έστω τυχαία M , a1, …, am , (το ak αντικαθιστά την uk) , ώστε $\phi[\, t / u\,]^M$(a1, …, am) = true .

Από το Θεώρημα Αντικατάστασης -- υποθέτοντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η μεταβλητή u είναι η u1 -- έχουμε ότι

$\phi[\, t / u\,]^M$(a1, …, am) = ϕ^M(**t^M(a1, …, am)** , a2 , …, am) = true .

Επομένως $\mathrm{OR}_{\mathbf{h}\in U}$ ϕ^M(**h** , a2 , …, am) = true , και $(\exists u\ \phi)^M$(a1, …, am) = true .

forall u - elimination

$$\frac{\forall u\ \phi}{\phi[\, t / u\,]}$$

Οι εμφανίσεις μεταβλητών στην t *είναι ελεύθερες στον τύπο* $\phi[\, t / u\,]$

Ορθότητα του κανόνα forall u - elimination

Για οποιαδήποτε ϕ , t , u όπως παραπάνω, αληθεύει η συνεπαγωγή

$$\forall u\ \phi \ \ |= \ \ \phi[\, t / u\,]$$

Παραδείγματα τυπικών αποδείξεων με thereis u - introduction , forall u - elimination

Να αποδειχτεί τυπικά ότι $Q(f(x, z) , g(z, y))$ |-- $(\exists y\, Q(f(x, z) , y))$

1	$Q(f(x, z) , g(z, y))$	υπόθεση
2	$(\exists y\, Q(f(x, z) , y))$	1 , thereis y – introduction: φ είναι $Q(f(x, z) , y)$ t είναι $g(z, y)$

Να αποδειχτεί τυπικά ότι $Q(f(x, z) , g(z, y))$ |-- $\exists z (\exists y\, Q(z , y))$

1	$Q(f(x, z) , g(z, y))$	υπόθεση
2	$(\exists y\, Q(f(x, z) , y))$	1 , thereis y – introduction: φ είναι $Q(f(x, z) , y)$ t είναι $g(z, y)$
3	$\exists z (\exists y\, Q(z , y))$	2 , thereis z – introduction: φ είναι $(\exists y\, Q(z , y))$ t είναι $f(x, z)$

Να αποδειχτεί τυπικά ότι $\forall z (\exists y\, Q(z , y))$ |-- $\exists y\, Q(f(x, z) , y)$

1	$\forall z (\exists y\, Q(z , y))$	υπόθεση
2	$(\exists y\, Q(f(x, z) , y))$	1 , forall z – elimination: φ είναι $(\exists y\, Q(z , y))$ t είναι $f(x, z)$

Να βρεθεί αντιπαράδειγμα για το ότι $\forall z (\exists y\, Q(z , y))$ |= $\exists y\, Q(y , y)$

Να αποδειχτεί τυπικά ότι: Για οποιουσδήποτε τύπους Α' τάξης θ , η ,

$\forall u\,(\theta \wedge \eta)\ \mid\!-\ \theta \qquad (\theta \wedge \eta)\ \mid\!-\ \exists u\,\theta$

$(\forall u\,\theta)\ \mid\!-\ \theta \qquad \theta\ \mid\!-\ \exists u\,\theta$

$(\forall u\,\theta)\ \mid\!-\ \theta$

1	$(\forall u\,\theta)$	υπόθεση
2	θ[u / u]	1 , forall u – elimination: φ είναι θ t είναι u θ[u / u] *είναι ο τύπος* θ

$(\theta \wedge \eta)\ \mid\!-\ \exists u\,\theta$

1	$\theta[\,u / u\,] \wedge \eta[\,u / u\,]$	υπόθεση $(\theta \wedge \eta)$ *είναι ο τύπος* $(\theta \wedge \eta)\,[\,u / u\,]$ $(\theta \wedge \eta)\,[\,u / u\,]$ *είναι ο τύπος* $\theta[\,u / u\,] \wedge \eta[\,u / u\,]$
2	θ[u / u]	1 , and – elimination
3	∃u θ	1 , thereis u – introduction: φ είναι θ t είναι u