Το πρόβλημα συνεπαγωγής τύπων *Α' τάξης*

Input Σ , σ **Question** Αληθεύει ότι Σ|= σ ;

Γενική περίπτωση

Το πρόβλημα είναι ***μη-αποφασίσιμο***

Το ελάχιστο μέγεθος ενός *αντι-παραδείγματος* της Σ |= ψ
δεν είναι υπολογίσιμο από τα Σ , σ

Υπάρχουν αποδεικτικά συστήματα -- *πχ* *natural deductions* --
που είναι *ορθά και πλήρη*

Ορθότητα Άν υπάρχει μία τυπική απόδειξη του Σ |– ψ :
Θα αληθεύει η συνεπαγωγή Σ |= ψ .

Πληρότητα Άν αληθεύει η συνεπαγωγή Σ |= ψ :
Θα υπάρχει μία τυπική απόδειξη του Σ |– ψ .

Για τα αποδεικτικά συστήματα, υπάρχουν *αλγόριθμοι αναζήτησης αποδείξεων*
που είναι *πλήρεις* :

Άν αληθεύει η συνεπαγωγή Σ |= ψ :
Η αναζήτηση θα βρεί μία τυπική απόδειξη του Σ |– ψ .

Το ελάχιστο μέγεθος μιάς τυπικής απόδειξης του Σ |– ψ
δεν είναι υπολογίσιμο *από το* Σ |– ψ

Ο χρόνος που θα χρειαστεί η αναζήτηση απόδειξης
δεν είναι υπολογίσιμος από τα Σ , σ

Το πρόβλημα συνεπαγωγής τύπων *Α' τάξης*

<u>*Ειδική περίπτωση*</u>: Τύποι χωρίς $\forall$, $\exists$

Το πρόβλημα είναι ***αποφασίσιμο***

G.Nelson - D.C. Oppen 'Fast decision procedures based on congruence closure'

I $\phi_1 \wedge \ldots \phi_n \models \psi$ άν και μόνο άν $\models (\phi_1 \wedge \ldots \phi_n) \to \psi$

άν και μόνο άν ***δεν υπάρχει αντι-παράδειγμα***

άν και μόνο άν $(\phi_1 \wedge \ldots \phi_n) \wedge (\neg\psi)$ ***μη-ικανοποιήσιμος***

II Έστω $(\theta_1 \vee \ldots \theta_m)$ <u>η διαζευκτική κανονική μορφή</u> *του* $(\phi_1 \wedge \ldots \phi_n) \wedge (\neg\psi)$:

$(\theta_1 \vee \ldots \theta_m)$ *μη-ικανοποιήσιμος*

άν και μόνο άν **κάθε** θ_k ***μη-ικανοποιήσιμος***

III Έστω ότι θ_k είναι ένας τύπος $(\eta(k, 1) \wedge \ldots \eta(k, m_k))$

Κάθε $\eta(k, j)$ είναι ατομικός τύπος ή άρνηση ατομικού τύπου

a Ο τύπος θ_k δεν περιέχει το = .

Κάθε $\eta(k, j)$ είναι τύπος της μορφής $P(\tau_1, \ldots \tau_\lambda)$ είτε $\neg P(\tau_1, \ldots \tau_\lambda)$,
όπου P ένα σύμβολο σχέσης και $\tau_1, \ldots \tau_\lambda$ είναι παραστάσεις.

Term_Models(Λ) είναι η κλάση μοντέλων όπου

Πεδίο ορισμού U : *οι παραστάσεις* που σχηματίζονται με τα σύμβολα για συναρτήσεις, τα σύμβολα για σταθερές, και τις μεταβλητές.

Συναρτήσεις : $F(\tau_1, \ldots \tau_\lambda)$ ορίζεται ως *η παράσταση* $f(\tau_1, \ldots \tau_\lambda)$

Σταθερές : C ορίζεται ως *η παράσταση* c

Λήμμα Κάθε τύπος της μορφής $P(\tau_1, \ldots \tau_\lambda)$ είτε $\neg P(\tau_1, \ldots \tau_\lambda)$
είναι ικανοποιήσιμος, σε κάποιο μοντέλο της κλάσης Term_Models(Λ)

Πρόταση Άν ο τύπος θ_k δεν περιέχει το = ,
ο θ_k είναι ικανοποιήσιμος *άν και μόνο άν*:

Δεν υπάρχουν δύο τύποι $\eta(k, j)$, $\eta(k, j')$,
που ο ένας από τους δύο να είναι η άρνηση του άλλου.

Απόδειξη Επιλογή κατάλληλου μοντέλου της κλάσης Term_Models(Λ)

b Ο τύπος θ_k δεν περιέχει σύμβολα για σχέσεις.

Κάθε $\eta(k , j)$ είναι ατομικός τύπος της μορφής $(\tau = \tau')$ είτε $\neg(\tau = \tau')$,
όπου τ , τ' είναι παραστάσεις.

G.Nelson - D.C. Oppen 'Fast decision procedures based on congruence closure'

Ορισμός 1 Μία σχέση ισοδυναμίας ρ λέγεται *ομοιότητα* (congruence) ως προς μία συνάρτηση F (γενικά: ως προς ένα σύνολο συναρτήσεων) όταν:

Άν $\rho(a_1 , b_1) , \dots \rho(a_\lambda , b_\lambda)$ Τότε $\rho(F(a_1 , \dots a_\lambda) , F(b_1 , \dots b_\lambda))$.

Ορισμός 2 Μία (διμερής) σχέση ρ *περιέχεται* σε μία σχέση ρ' ($\rho \subseteq \rho'$) όταν:

Άν $\rho(a , b)$ Τότε $\rho'(a , b)$.

Ορισμός 3 Μία ομοιότητα ρ^0 ονομάζεται *congruence closure* μίας σχέσης ρ όταν:

i) $\rho \subseteq \rho^0$

ii) Άν $\rho \subseteq \sigma$ και η σχέση σ είναι ομοιότητα
Τότε $\rho^0 \subseteq \sigma$

Θεώρημα Για κάθε σχέση ρ , *υπάρχει μοναδική* σχέση ρ^0 που είναι *congruence closure* της σχέσης ρ .