Απαγωγικοί κανόνες (deduction rules) για το $\wedge$

and - introduction

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi}$$

<u>*Ορθότητα* του κανόνα and - introduction</u>

Για οποιουσδήποτε τύπους φ , ψ , αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi , \psi \models \phi \wedge \psi$

and - elimination 1

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi}$$

<u>*Ορθότητα* του κανόνα and - elimination 1</u>

Για οποιουσδήποτε τύπους φ , ψ , αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi \wedge \psi \models \phi$

and - elimination 2

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\psi}$$

<u>*Ορθότητα* του κανόνα and - elimination 2</u>

Για οποιουσδήποτε τύπους φ , ψ , αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi \wedge \psi \models \psi$

Απαγωγικοί κανόνες για το $\rightarrow$

implies - elimination

$$\frac{\phi \rightarrow \psi \qquad \phi}{\psi}$$

<u>*Ορθότητα* του κανόνα implies - elimination</u>

Για οποιουσδήποτε τύπους ϕ, ψ, αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi \rightarrow \psi \,,\, \phi \models \psi$

implies - introduction

$$\frac{[\ \phi \ \ldots \ \psi\ ]}{\phi \rightarrow \psi}$$

<u>*Ορθότητα* του κανόνα implies - introduction</u>

Για οποιουσδήποτε τύπους ϕ, ψ, για τους οποίους αληθεύει μια συνεπαγωγή

$\Sigma \,,\, \phi \models \psi$ όπου Σ κάποιο σύνολο τύπων:

θα αληθεύει και η συνεπαγωγή $\Sigma \models \phi \rightarrow \psi$

Απαγωγικός κανόνας για το F

F - elimination

$$\frac{F}{\phi}$$

<u>*Ορθότητα* του κανόνα F - elimination</u>

Για οποιοδήποτε τύπο ϕ, αληθεύει η συνεπαγωγή $F \models \phi$

Απαγωγικοί κανόνες για το $\neg$

not - elimination

$$\frac{\neg\phi \qquad \phi}{F}$$

<u>*Ορθότητα* του κανόνα not - elimination</u>

Για οποιουσδήποτε τύπους φ , ψ , αληθεύει η συνεπαγωγή $\neg\phi \, , \, \phi \models F$

not - introduction

$$\frac{[\ \phi \ \ \ldots \ \ F\ ]}{\neg\phi}$$

<u>*Ορθότητα* του κανόνα not - introduction</u>

Για οποιουσδήποτε τύπους φ , ψ , για τους οποίους αληθεύει μια συνεπαγωγή

$\Sigma \, , \, \phi \models F$ όπου Σ κάποιο σύνολο τύπων:

θα αληθεύει και η συνεπαγωγή $\Sigma \models \neg\phi$

Θεώρημα Ορθότητας των τυπικών αποδείξεων

Άν κάθε απαγωγικός κανόνας είναι ορθός, και υπάρχει μία τυπική απόδειξη του sequent $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \vdash \psi$: θα αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \models \psi$.

Πόρισμα Άν δεν αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \models \psi$, δεν μπορεί να υπάρξει τυπική απόδειξη του sequent $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \vdash \psi$ (όπου να χρησιμοποιούνται μόνο ορθοί απαγωγικοί κανόνες).

1 Να αποδειχτεί τυπικά ότι $p \to (s \wedge q) \ |\!-\ p \to q$

1	$p \to (s \wedge q)$		υπόθεση		
2	[p		*υπόθεση*	$1 \models 2$?	**ΟΧΙ**
3	$s \wedge q$	1 , 2 ,	implies – elimination	$1, 2 \models 3$	ΝΑΙ
4	q]	3 ,	and - elimination 2	$1, 2 \models 4$	ΝΑΙ
				$1 \models 4$?	**ΟΧΙ**
5	$p \to q$	{ 2 , 3 , 4 } ,	implies – introduction	$1 \models (2 \to 4) \equiv 5$	

2 Να αποδειχτεί τυπικά ότι $p \to s,\ p \to (\neg s)\ |\!-\ \neg p$

1	$p \to s$		υπόθεση		
2	$p \to (\neg s)$		υπόθεση		
3	[p		*υπόθεση*	$1, 2 \models 3$?	**ΟΧΙ**
4	s	1 , 3 ,	implies – elimination	$1, 3 \models 4$	
5	$\neg s$	2 , 3 ,	implies – elimination	$2, 3 \models 5$	
6	F]	4 , 5 ,	not – elimination	$1, 2, 3 \models 6$	
7	$\neg p$	{ 3 , ... 6 } ,	not – introduction	$1, 2 \models (\neg 3) \equiv 7$	

3 Να αποδειχτεί τυπικά ότι $(s \wedge p) \to q\ |\!-\ s \to (p \to q)$

1	$(s \wedge p) \to q$		υπόθεση		
2	{ s		*υπόθεση*		
3	[p		*υπόθεση*		
4	$s \wedge p$	3 , 2 ,	and - introduction	$1, 2, 3 \models 4$	
5	q]	1 , 4	implies – elimination	$1, 2, 3 \models 5$	
				$1, 2 \models 5$?	**ΟΧΙ**
6	$p \to q$ }	{ 3 , 4 , 5} ,	implies – introduction	$1, 2 \models (3 \to 5) \equiv 6$	
				$1 \models 6$?	**ΟΧΙ**
7	$s \to (p \to q)$	{ 2 , ... 6 } ,	implies – introduction	$1 \models (2 \to 6) \equiv 7$	

4 Να αποδειχτεί τυπικά ότι $p \to q \ \vdash \ (\neg q) \to (\neg p)$

1	$p \to q$		υπόθεση	
2	$\{ \neg q$		*υπόθεση*	
3	**[** p		*υπόθεση*	
4	q	1 , 3	implies – elimination	1 , 3 |= 4
5	F **]**	2 , 4	not – elimination	1 , 2 , 3 |= 5
6	$\neg p$ }	{ 3 , 4 , 5} ,	implies – introduction	1 , 2 |= (¬ 3) ≡ 6
7	$(\neg q) \to (\neg p)$	{ 2 , ... 6 } ,	implies – introduction	1 |= (2 → 6) ≡ 7

Αναδρομική αναζήτηση τυπικής απόδειξης για το $p \to q \ \vdash \ (\neg q) \to (\neg p)$

1	$p \to q$		υπόθεση *0*	
	{			
2	$\neg q$		*υπόθεση 1*	
	[			
3	p		*υπόθεση 2*	

κανόνες elimination στους τύπους 1 , 2 , 3 :

4	q	1 , 3	implies – elimination
5	F	2 , 4	not – elimination

6	**F**		ΣΤΟΧΟΣ 2	copy 5
	]			
7	$\neg$**p**	ΣΤΟΧΟΣ 1	{ 3 , ... 15 } ,	not – introduction
	}			
8	**$(\neg q) \to (\neg p)$**	ΣΤΟΧΟΣ 0	{ 2 , ... 16 } ,	implies – introduction

Αναζήτηση τυπικής απόδειξης (proof search)

Input specification sequent $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \vdash \psi$

όπου εμφανίζονται προτασιακά γράμματα, τα $\wedge , \to , \neg$, και το F

Output specification

Άν αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \psi$:

Επιστρέφεται μια τυπική απόδειξη του $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \vdash \psi$,

με τους κανόνες για τα $\wedge , \to , \neg$, και το F

Άν δεν αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \psi$:

Επιστρέφεται 'ERROR'

Ιδιότητες της συνεπαγωγής τύπων με $\wedge , \to , \neg$, και το F

1α Η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \psi1 \wedge \psi2$ αληθεύει *άν και μόνο άν*

αληθεύουν οι συνεπαγωγές $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \psi1$

$\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \psi2$

1β Η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \psi1 \to \psi2$ αληθεύει *άν και μόνο άν*

αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n , \psi1 \models \psi2$

1γ Η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \neg\psi1$ αληθεύει *άν και μόνο άν*

αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n , \psi1 \models F$

2 Η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \gamma$, όπου γ είτε ένα προτασιακό γράμμα είτε το F , αληθεύει ***άν*** το γ προκύπτει εφαρμόζοντας επαναληπτικά τους κανόνες elimination στους τύπους $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n$.

Το αντίστροφο του 2 δεν αληθεύει πάντα

Αλγόριθμος Proof-Search($\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \vdash \psi$ **)**

i ψ είναι $\psi_1 \wedge \psi_2$:

Proof-Search($\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \vdash \psi_1$ **)** , **Proof-Search(** $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \vdash \psi_2$ **)**

If κάποιο από τα δύο έδωσε 'ERROR'

then return 'ERROR'

else εφάρμοσε and - introduction
στις τελευταίες γραμμές των δύο αποδείξεων

ii ψ είναι $\psi_1 \rightarrow \psi_2$:

Proof-Search($\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n , \psi_1 \vdash \psi_2$ **)**

If έδωσε 'ERROR'

then return 'ERROR'

else εφάρμοσε implies - introduction στην υπο-ακολουθία της απόδειξης
από τη γραμμή ψ_1 μέχρι και τη γραμμή ψ_2

iii ψ είναι $\neg\psi_1$:

Proof-Search($\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n , \psi_1 \vdash F$ **)**

If έδωσε 'ERROR'

then return 'ERROR'

else εφάρμοσε not - introduction στην υπο-ακολουθία της απόδειξης
από τη γραμμή ψ_1 μέχρι και τη γραμμή F

iv ψ είναι F , ή ψ είναι το προτασιακό γράμμα γ :

Εφάρμοσε επαναληπτικά τους κανόνες elimination
στους τύπους $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n$, έως ότου

προκύψει το F : εφάρμοσε F – elimination

προκύψει το γ : **stop** (η απόδειξη ολοκληρώθηκε)

δεν υπάρχει νέα εφαρμογή των κανόνων: **return** 'ERROR'

5 Να αποδειχτεί τυπικά ότι p |– ¬(¬p)

1	p	υπόθεση *0*	
2	[¬p	*υπόθεση 1*	
3	**F**]	ΣΤΟΧΟΣ 1	1 , 2 , not – elimination
4	**¬(¬p)**	ΣΤΟΧΟΣ 0	{ 2 ... 9 } , not – introduction

A *Ο αλγόριθμος* **Proof-Search** *δεν είναι πλήρης για τις τυπικές αποδείξεις με τους κανόνες για το ¬ :*

Ο **Proof-Search** *δεν βρίσκει* την παρακάτω τυπική απόδειξη
για το ¬(¬(¬p)) |– ¬p :

1	¬(¬(¬p))	υπόθεση *0*
2	**[** p	*υπόθεση 1*
5	**¬(¬p)**	***Στόχος 2,* για να συνδυαστεί μέσω not – elimination με τον 1** Ο Στόχος 2 μπορεί να αποδειχτεί από την γραμμή 2
6	**F]**	ΣΤΟΧΟΣ 1 *Ο Στόχος* 1 *δεν αποδεικνύεται από τους τύπους* 1 , 2 *με κανόνες* elimination *μόνο*
7	**¬p**	ΣΤΟΧΟΣ 0

B ***Οι κανόνες*** *δεν είναι πλήρεις για την συνεπαγωγή τύπων με το ¬ :*

Δεν υπάρχει τυπική απόδειξη για το ¬(¬p) |– p , με τους κανόνες για το ¬ .