Inductive definition of the set WFF of well-formed propositional formulas

(0) Every propositional atom $p, q, r, \ldots$
is a well-formed formula.
The characters T, F are well-formed formulas.

(1) $\neg$: If φ is a well-formed formula, then so is $(\neg\varphi)$.

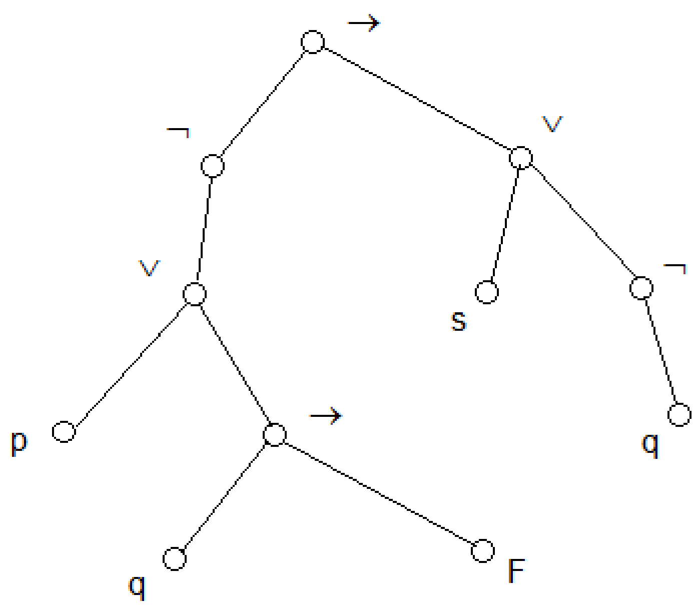
(2) $\wedge$: If φ and ψ are well-formed formulas, then so is $(\varphi \wedge \psi)$.

(3) $\vee$: If φ and ψ are well-formed formulas, then so is $(\varphi \vee \psi)$.

(4) $\rightarrow$: If φ and ψ are well-formed formulas, then so is $(\varphi \rightarrow \psi)$.

Propositional formula $((\neg(p \vee (q \rightarrow F))) \rightarrow (s \vee (\neg q)))$

Parse-tree



Recursive computation of a function on well-formed formulas

Έστω U κάποιο πεδίο τιμών (αριθμοί, σύνολα, τύποι ...)

Έστω **H** μία συνάρτηση με ορίσματα προτασιακούς τύπους (από το σύνολο WFF) ,
και τιμές στο σύνολο U .

Για να γράψουμε μία αναδρομική διαδικασία που να υπολογίζει, για οποιονδήποτε προτασιακό τύπο ϕ , την τιμή **H**(ϕ) της συνάρτησης, εργαζόμαστε ως εξής:

α) Επιλέγουμε συναρτήσεις *g0 , g1 , g2 , g3 , g4* , με ορίσματα προτασιακούς τύπους από το σύνολο WFF και τιμές στο σύνολο U .
Ελέγχουμε ότι για τις συναρτήσεις *g0 , g1 , g2 , g3 , g4*
ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

(P0) Άν ο τύπος ϕ είναι προτασιακό γράμμα ή ένα από τα T , F : $H(\phi) = g0(\phi)$

(P1) Για κάθε τύπο ϕ : $H(\neg\phi) = g1(H(\phi))$

(P2) Για οποιουσδήποτε τύπους $\phi1$, $\phi2$: $H(\phi1 \wedge \phi2) = g2(H(\phi1) , H(\phi2))$

(P3) Για οποιουσδήποτε τύπους $\phi1$, $\phi2$: $H(\phi1 \vee \phi2) = g3(H(\phi1) , H(\phi2))$

(P4) Για οποιουσδήποτε τύπους $\phi1$, $\phi2$: $H(\phi1 \rightarrow \phi2) = g4(H(\phi1) , H(\phi2))$

β) Υπολογίζουμε μια συνάρτηση ***G***(ϕ) *με αναδρομή στην δομή* του τύπου ϕ .

Ο υπολογισμός της ***G*** χρησιμοποιεί τις συναρτήσεις *g0 , g1 , g2 , g3 , g4*
που επιλέχτηκαν στο (α) .

G(ϕ) :

(0) **if** ϕ is a propositional atom γ or one of the constants T , F
then **return** $g0(\phi)$

(1) **if** ϕ is $\neg\phi1$ **then** **return** $g1(\boldsymbol{G}(\phi1))$

(2) **if** ϕ is $(\phi1 \wedge \phi2)$ **then** **return** $g2(\boldsymbol{G}(\phi1) , \boldsymbol{G}(\phi2))$

(3) **if** ϕ is $(\phi1 \vee \phi2)$ **then** **return** $g3(\boldsymbol{G}(\phi1) , \boldsymbol{G}(\phi2))$

(4) **if** ϕ is $(\phi1 \rightarrow \phi2)$ **then** **return** $g4(\boldsymbol{G}(\phi1) , \boldsymbol{G}(\phi2))$

γ) Επιβεβαιώνουμεμ με επαγωγή στην δομή του τύπου ϕ και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (P0) -- (P4) , ότι: *για κάθε τύπο* ϕ , ***G***(ϕ) = H(ϕ) .

Θεώρημα Άν ισχύουν οι ιδιότητες (P0) – (P4) , ο αναδρομικός υπολογισμός στο (β) *τερματίζει με το σωστό αποτέλεσμα*: για κάθε τύπο ϕ του συνόλου WFF , ***G***(ϕ) = **H**(ϕ) .

Παραδείγματα

Σε καθεμία περίπτωση, να ορίσετε τις συναρτήσεις *g0 – g4* και να ελέγξετε ότι ισχύουν οι ιδιότητες (P0) – (P4) .

i) H(φ) = ο αριθμος εμφανισεων του προτασιακού γράμματος p στον τυπο φ

   g0(φ) = αν φ ειναι το p τοτε 1 αλλοιως 0

   g1(m) = m

   g2(m1 , m2) = g3(m1 , m2) = g4(m1 , m2) = m1 + m2

ii) H(φ) = ο αριθμος εμφανισεων του συνδετικού $\vee$ στον τυπο φ

   g0(φ) = 0

   g1(m) = m

   g2(m1 , m2) = g4(m1 , m2) = m1 + m2

   g3(m1 , m2) = m1 + m2 + 1

iii) $H_{υ}$(φ) = η τιμή αλήθειας του τύπου φ στην (δεδομένη) τιμοδοσία υ :

   g0(γ) = υ(γ) για κάθε προτασιακό γράμμα γ
   g0(T) = true g0(F) = false

   g1(x) = not(x)

   g2(x, y) = and(x, y)

   g3(x, y) = or(x, y)

   g4(x, y) = implies(x, y)

Ερωτήματα

Σε καθεμία περίπτωση, να ορίσετε μια συνάρτηση *G*(φ) , με αναδρομή στην δομή του τύπου φ , ώστε *G*(φ) = H(φ) .

α) H(φ) = ο αριθμος εμφανισεων προτασιακών γραμμάτων εκτός του p στον τυπο φ

β) H(φ) = ο αριθμος εμφανισεων του συνδετικού $\neg$ στον τυπο φ

γ) H(φ) = μία *συζευκτική* μορφή του τύπου φ

δ) H(φ) = μία *διαζευκτική* μορφή του τύπου φ