Γενική ιδέα της συνεπαγωγής

Για τις υποθέσεις $\phi_1\ \phi_2\ \ldots\ \phi_n$ και το *συμπέρασμα* ψ ,

Θεωρούμε ότι *αληθεύει η συνεπαγωγή* $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \models \psi$ όταν:

Σε κάθε περίπτωση όπου αληθεύουν (ταυτόχρονα) όλες οι υποθέσεις,
θα αληθεύει και το συμπέρασμα.

Η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \models \psi$ δεν αληθεύει όταν:

Υπάρχει μία (τουλάχιστον περίπτωση) όπου αληθεύουν όλες οι υποθέσεις,
και δεν αληθεύει το συμπέρασμα.

Για προτασιακούς τύπους $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n ,\ \psi$

Η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \models \psi$ αληθεύει όταν:

για οποιαδήποτε απόδοση τιμών v στα προτασιακά γράμματα,
είτε $v(\phi_1)$ and $v(\phi_2)$ and … and $v(\phi_n)$ = false , είτε $v(\psi)$ = true

Η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \models \psi$ δεν αληθεύει όταν:

υπάρχει μία (τουλάχιστον) απόδοση τιμών v στα προτασιακά γράμματα, ώστε
$v(\phi_1)$ and $v(\phi_2)$ and … and $v(\phi_n)$ = true , και $v(\psi)$ = false

Για ένα δεδομένο μοντέλο **M** και στοιχεία **α1 , α2 ,** … του M :

δ(φ) είναι η δήλωση που αντιστοιχεί στον τύπο Α’ τάξης φ , όταν
τα σύμβολα συναρτήσεων / σχέσεων / σταθερών του φ ερμηνεύονται με βάση το M ,
και το στοιχείο α_K αντικαταστήσει τις ελεύθερες εμφανίσεις της μεταβλητής x_K

Για τύπους Α’ τάξης $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n ,\ \psi$

Η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \models \psi$ αληθεύει όταν:

για οποιοδήποτε μοντέλο M (αντίστοιχο με το λεξιλόγιο των τύπων)
και οποιαδήποτε στοιχεία α1 , α2 , … του M
είτε $\delta(\phi_1)$ and $\delta(\phi_2)$ … and $\delta(\phi_n)$ = false , είτε $\delta(\psi)$ = true

Η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \models \psi$ δεν αληθεύει όταν:

υπάρχει ένα (τουλάχιστον) μοντέλο M και στοιχεία α1 , α2 , … του M , ώστε
$\delta(\phi_1)$ and $\delta(\phi_2)$ … and $\delta(\phi_n)$ = true , και $\delta(\psi)$ = false

Παραδείγματα

1 Η συνεπαγωγή $R(x , y) \models R(y , x)$ δεν αληθεύει

Αντιπαράδειγμα ρ = η σχέση « < » για τους ακέραιους , α = 2 , β = 3

Για το παραπάνω σύνολο, $\delta(R(x , y)) = ‘ 2 < 3 ’ =$ true ,

$\delta(R(y , x)) = ‘ 3 < 2 ’ =$ false

2 Η συνεπαγωγή $(f(x) = y) , (z = f(y)) \models (f(f(x)) = z)$ αληθεύει

Έστω τυχαία F , a , b , c *ώστε* $\delta((f(x) = y)) =$ true , $\delta((z = f(y))) =$ true :

Τότε $F(a) =_U b$, και $c =_U F(b)$.

Επειδή η $=_U$ είναι *σχέση ισοδυναμίας άρα συμμετρική*, $F(b) =_U c$.

Επειδή η $=_U$ είναι *ομοιότητα ως προς την* F, $F(F(a)) =_U F(b)$.

Επειδή η $=_U$ είναι *σχέση ισοδυναμίας άρα μεταβατική*, $F(F(a)) =_U c$.
Άρα $\delta((f(f(x)) = z)) =$ true .

3 Η συνεπαγωγή $R(x , y) \vee (f(x) = y) \models (f(x) = y) \vee R(x , y))$ αληθεύει

Έστω τυχαία ρ , F , a , b , *ώστε* $\delta(R(x , y) \vee (f(x) = y)) =$ true ,

άρα $\delta(R(x , y))$ or $\delta((f(x) = y)) =$ true .

Τότε $\delta((f(x) = y) \vee R(x , y)) = \delta((f(x) = y))$ or $\delta(R(x , y))$

$= \delta(R(x , y))$ or $\delta((f(x) = y)) =$ true .

4 *Έστω τυχαία* F , a , b : $\delta((f(x) = y))$ αληθεύει *άν και μόνο άν*

$\delta((y = f(x)))$ αληθεύει .

$\delta((f(x) = y)) =$ true *άν και μόνο άν* $F(a) =_U b$

$\delta((y = f(x))) =$ true *άν και μόνο άν* $b =_U F(a)$

$F(a) =_U b$ *άν και μόνο άν* $b =_U F(a)$ (επειδή η $=_U$ είναι *συμμετρική σχέση*)

5 Η συνεπαγωγή $R(x , y) \vee (f(x) = y) \models R(x , y) \vee (y = f(x))$ αληθεύει

Έστω τυχαία ρ , F , a , b , *ώστε* $\delta(R(x , y) \vee (f(x) = y)) =$ true ,

άρα $\delta(R(x , y))$ or $\delta((f(x) = y)) =$ true .

Τότε $\delta(R(x , y) \vee (y = f(x))) = \delta(R(x , y))$ or $\delta((y = f(x))$

$= \delta(R(x , y))$ or $\delta((f(x) = y)) =$ true .

6 Η συνεπαγωγή $\exists x\,(\,R(x\,,y) \vee (\,f(x) = y\,)\,) \;\;|=\;\; \exists x\,(\,R(x\,,y) \vee (\,y = f(x)\,)\,)$ αληθεύει

Έστω τυχαία ρ , F , a , b , ώστε $\delta(\,\exists x\,(\,R(x\,,y) \vee (\,f(x) = y\,)\,)\,) = true$,

άρα $\mathrm{OR}_{h\in U}$ [$\delta'(\,R(x\,,y) \vee (\,f(x) = y\,)\,)$ όταν x παίρνει τιμή h] = true ,

$\mathrm{OR}_{h\in U}$ [$\delta'(\,R(x\,,y)\,)$ or $\delta'(\,(\,f(x) = y\,)\,)$ όταν x παίρνει τιμή h] = true .

Έχουμε $\delta'(\,R(x\,,y) \vee (\,y = f(x)\,)\,)$ όταν x παίρνει τιμή h

= $\delta'(\,R(x\,,y)\,)$ or $\delta'(\,(\,y = f(x)\,)$

= $\delta'(\,R(x\,,y)\,)$ or $\delta'(\,(\,f(x) = y\,)\,)$

= $\delta'(\,R(x\,,y) \vee (\,f(x) = y\,)\,)$ όταν x παίρνει τιμή h ,

άρα $\delta(\,\exists x\,(\,R(x\,,y) \vee (\,y = f(x)\,)\,)\,)$

= $\mathrm{OR}_{h\in U}$ [$\delta'(\,R(x\,,y) \vee (\,y = f(x)\,)\,)$ όταν x παίρνει τιμή h]

= $\mathrm{OR}_{h\in U}$ [$\delta'(\,R(x\,,y) \vee (\,f(x) = y\,)$] όταν x παίρνει τιμή h]

= $\delta(\,\exists x\,(\,R(x\,,y) \vee (\,f(x) = y\,)\,)\,) = true$.

Ερωτήματα

1 Για ποιούς τύπους Α’ τάξης αληθεύουν οι παρακάτω συνεπαγωγές;

true |= ψ   false |= ψ

φ |= true   φ |= false

2 Αποδείξτε ότι: Η συνεπαγωγή τύπων Α’ τάξης $\phi_1 , \phi_2 \;\ldots , \phi_n \;|=\; \psi$ αληθεύει, *άν και μόνο άν* ο τύπος Α’ τάξης $(\phi_1 \wedge \phi_2 \;\ldots \wedge \phi_n) \rightarrow \psi$ είναι ταυτολογία.

3 Αποδείξτε ότι αληθεύουν οι παρακάτω συνεπαγωγές:

$(\,R(x) \rightarrow \forall y\; S(y,\, x)\,)\,,\;\; (z = x) \;\;|=\;\; (x = z) \wedge (\,(\neg R(z)) \vee \forall y\; S(y,\, z)\,)$

$\neg R(x,\; y) \;\;|=\;\; \neg(\,(\exists x\; \forall y\; R(y,\; x)\,) \wedge R(x,\; y)\,)$

4 Αποδείξτε ότι αληθεύει η λογική ισοδυναμία

$(\,g(\,f(x)\,,\, g(y,\, z)\,) = h(y,\, x,\, x)\,) \;\;|=\;=|\;\; (\,h(y,\, x,\, x) = g(\,f(x)\,,\, g(y,\, z)\,)\,)$

5 Αποδείξτε ότι αληθεύει η συνεπαγωγή

$\forall x\,(\,R(x\,,y) \wedge (\,f(x) = y\,)\,) \;\;|=\;\; \forall x\,(\,y = f(x)\,)$

6 Για καθένα από τα παραδείγματα 3, 5, 6 : Αποδείξτε ότι αληθεύει και η *αντίστροφη* συνεπαγωγή.