

Πρακτική συνεπαγωγή

Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα σχέσεων, όπου x, y, z πραγματικοί αριθμοί

A	$x > 2$	(1)	B	$x > 2$	(1)
	$z^2 = x - 1$	(2)		$z^2 = x - 1$	(2)
				$z^2 < 1$	(3)

Από τις σχέσεις A **συνεπάγεται**

$$z^2 > 1$$

Από τις σχέσεις B **συνεπάγονται**

$$z^2 > 1 \quad \text{από (1, 2)}$$

$$x < 2 \quad \text{από (2, 3)}$$

Γενική (κλασσική) ιδέα συνεπαγωγής

Ένας συλλογισμός με Υποθέσεις $\phi_1 \phi_2 \dots \phi_n$ και Συμπέρασμα ψ θεωρείται σωστός όταν:

Σε κάθε περίπτωση όπου αληθεύουν (ταυτόχρονα) όλες οι υποθέσεις, θα αληθεύει και το συμπέρασμα του συλλογισμού.

Ένας συλλογισμός με Υποθέσεις $\phi_1 \phi_2 \dots \phi_n$ και Συμπέρασμα ψ θεωρείται λανθασμένος όταν:

Υπάρχει περίπτωση να αληθεύουν (ταυτόχρονα) όλες οι υποθέσεις, και να μην αληθεύει το συμπέρασμα του συλλογισμού.

Όταν ο συλλογισμός με Υποθέσεις $\phi_1 \phi_2 \dots \phi_n$ και Συμπέρασμα ψ είναι σωστός: λέμε ότι αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi_1, \phi_2 \dots, \phi_n \models \psi$ (ψ συνεπάγεται από τις $\phi_1, \phi_2 \dots, \phi_n$).

Ερωτήματα

Για κάθε μία από τις σχέσεις: $x \geq 4$ ($y \geq 1$ και $y < 1$) ($y \geq 1$ ή $y < 1$), βρείτε αν συνεπάγεται

1 Από τις σχέσεις A 2 Από τις σχέσεις B 3 Από τη σχέση ($w \geq 0$ ή $w < 0$)

Για προτασιακούς τύπους $\phi_1, \phi_2 \dots, \phi_n, \psi$

Η συνεπαγωγή $\phi_1, \phi_2 \dots, \phi_n \models \psi$ αληθεύει όταν:

για οποιαδήποτε απόδοση τιμών v στα προτασιακά γράμματα,
 είτε $v(\phi_1 \text{ and } \phi_2 \dots \text{ and } \phi_n) = \text{false}$, είτε $v(\psi) = \text{true}$

Η συνεπαγωγή $\phi_1, \phi_2 \dots, \phi_n \models \psi$ δεν αληθεύει όταν:

υπάρχει μία (τουλάχιστον) απόδοση τιμών v στα προτασιακά γράμματα, ώστε
 $v(\phi_1 \text{ and } \phi_2 \dots \text{ and } \phi_n) = \text{true}$, και $v(\psi) = \text{false}$

Παραδείγματα

Η συνεπαγωγή $p \rightarrow q, \neg q \models \neg p$ αληθεύει

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

Η συνεπαγωγή $p \rightarrow q, q \models p$ δεν αληθεύει

p	q	$p \rightarrow q$	true	false
T	T	T	T	F
T	F	F	T	F
F	T	T	T	F
F	F	T	T	F

Η συνεπαγωγή $\text{true} \models p$ $\text{false} \models p$
 $p \models \text{true}$ $p \models \text{false}$

Ερωτήματα

1 Πότε (για ποιούς τύπους) αληθεύουν οι παρακάτω συνεπαγωγές;

$\text{true} \models \psi$ Αληθεύει όταν: $v(\psi) = \text{true}$ για κάθε απόδοση τιμών v
ο τύπος ψ είναι *ταυτολογία*

$\text{false} \models \psi$ Αληθεύει για οποιοδήποτε τύπο ψ

$\phi \models \text{true}$ Αληθεύει για οποιοδήποτε τύπο ϕ

$\phi \models \text{false}$ Αληθεύει όταν: $v(\psi) = \text{false}$ για κάθε απόδοση τιμών v
ο τύπος ψ είναι *μη-ικανοποιήσιμος*

2 Αποδείξτε ότι: Η συνεπαγωγή $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \models \psi$ αληθεύει, αν και μόνο αν
ο τύπος $(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots \wedge \phi_n) \rightarrow \psi$ είναι ταυτολογία.

Παραδείγματα ταυτολογιών: $(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$ $(p \wedge q) \rightarrow q$
 $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \vee \neg p)$ $\neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)$

3 Έστω ότι για τους τύπους ϕ, ψ_1, ψ_2 , αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi \models (\psi_1 \vee \psi_2)$.
Είναι σωστό ότι θα αληθεύει μία (τουλάχιστον) από τις $\phi \models \psi_1$, $\phi \models \psi_2$;

$\text{true} \models p \vee (\neg p)$ $\text{true} \models p$ $\text{true} \models \neg p$

4 Ποιές από τις παρακάτω συνεπαγωγές αληθεύουν πάντα (για οποιουδήποτε ϕ, ψ);

$\neg\phi \vee \psi \models \phi \rightarrow \psi$ $\phi \rightarrow \psi \models \neg\phi \vee \psi$

$\phi \wedge \psi \models \phi \rightarrow \psi$ $\phi \rightarrow \psi \models \phi \wedge \psi$