Κλασσική έννοια αλήθειας – Προτασιακοί τύποι

Αναφορικά με μιά *τιμοδοσία* υ : *ΠροτασιακάΓράμματα* $>\!\!\to$ { T , F } , **ορίζουμε:**

(0) γ αληθής (γ προτασιακό γράμμα) *άν και μόνο άν* $\upsilon(\gamma) = T$

T αληθής F ψευδής

(1) $(\phi\wedge\psi)$ αληθής *άν και μόνο άν* φ , ψ αληθείς

$(\phi\wedge\psi)$ ψευδής σε κάθε άλλη περίπτωση

(2) $(\phi\vee\psi)$ αληθής *άν και μόνο άν* φ αληθής είτε ψ αληθής

$(\phi\vee\psi)$ ψευδής σε κάθε άλλη περίπτωση

(3) $(\neg\phi)$ αληθής *άν και μόνο άν* φ ψευδής

(4) $(\phi\to\psi)$ ψευδής *άν και μόνο άν* φ αληθής και ψ ψευδής

$(\phi\to\psi)$ αληθής σε κάθε άλλη περίπτωση

Παρατηρήσεις για την κλασσική έννοια

Αναφορικά με *μιά ορισμένη τιμοδοσία*, κάθε προτασιακός τύπος
θα είναι αληθής *ή* θα είναι ψευδής.

Άν ο τύπος φ είναι ψευδής, ο τύπος $(\neg\phi)$ θα είναι αληθής.

Άν ο τύπος $(\neg\phi)$ είναι αληθής, ο τύπος φ θα είναι ψευδής.

Ταυτολογίες για την κλασσική έννοια

Ο τύπος $(\ \phi \vee (\neg\phi)\ )$ είναι πάντα αληθής.

Ο τύπος $\neg(\ \phi \wedge (\neg\phi)\ )$ είναι πάντα αληθής.

Ο τύπος $(\ (\neg\neg\ \phi) \to \phi\ )$ είναι πάντα αληθής.

Ο τύπος $(\ \phi \to (\neg\neg\ \phi)\ )$ είναι πάντα αληθής.

Ο τύπος $(\ \neg(\phi \vee \psi) \to (\ (\neg\phi) \wedge (\neg\psi)\ )$ είναι πάντα αληθής.

Ο τύπος $(\ \neg(\phi \wedge \psi) \to (\ (\neg\phi) \vee (\neg\psi)\ )\ )$ είναι πάντα αληθής.

«Κατασκευαστική» έννοια αλήθειας – Προτασιακοί τύποι

Αναφορικά με μία <u>*μερική*</u> *συνάρτηση επαληθεύσεων - διαψεύσεων*

V : *ΠροτασιακάΓράμματα* $>\!\!\rightarrow$ Συμβολοσειρές , **ορίζουμε:**

(0) γ επαληθεύεται *άν* V(γ) = μία *επαλήθευση* του γ (γ προτασιακό γράμμα)

γ διαψεύδεται *άν* V(γ) = μία *διάψευση* του γ

T επαληθεύεται F διαψεύδεται

Παράδειγμα επαληθεύσεων - διαψεύσεων

ΠροτασιακάΓράμματα είναι τα halts-P και loops-P , όπου P οποιοδήποτε πρόγραμμα.

Επαλήθευση του halts-P : εκτέλεση του P που τερματίζει
Επαλήθευση του loops-P : υπο-ακολουθία ‘while true do’ του P

Διάψευση του halts-P : υπο-ακολουθία ‘while true do’ του P
Διάψευση του loops-P : εκτέλεση του P που τερματίζει

Έστω Λ το πρόγραμμα

```
L :  x := 0
     goto  L
```

Δεν υπάρχει επαλήθευση του τύπου loops-Λ , ούτε διάψευση του τύπου halts-Λ .

Έστω K το πρόγραμμα x := 0

Υπάρχει επαλήθευση του τύπου halts-K , και διάψευση του τύπου loops-K .

Ορίζουμε:

(1) $(\phi\wedge\psi)$ επαληθεύεται *άν* φ , ψ επαληθεύονται

$(\phi\wedge\psi)$ διαψεύδεται *άν* φ διαψεύδεται είτε ψ διαψεύδεται

(2) $(\phi\vee\psi)$ επαληθεύεται *άν* φ επαληθεύεται είτε ψ επαληθεύεται

$(\phi\vee\psi)$ διαψεύδεται *άν* φ , ψ διαψεύδονται

(3) $(\neg\phi)$ διαψεύδεται *άν* φ επαληθεύεται

$(\neg\phi)$ επαληθεύεται *άν* *υπάρχει αλγόριθμος* A ώστε
για κάθε επαλήθευση ε του φ , A(ε) = F (αντίφαση)

(4) $(\phi\rightarrow\psi)$ διαψεύδεται *άν* φ επαληθεύεται , ψ διαψεύδεται

$(\phi\rightarrow\psi)$ επαληθεύεται *άν* *υπάρχει αλγόριθμος* A ώστε:
για κάθε επαλήθευση ε του φ , A(ε) να είναι επαλήθευση του ψ

Παρατηρήσεις για την «κατασκευαστική» έννοια

Αναφορικά με *μιά ορισμένη μερική συνάρτηση επαληθεύσεων-διαψεύσεων*,
ένας τύπος δεν μπορεί να επαληθεύεται *και* να διαψεύδεται,
αλλά μπορεί να *μην* επαληθεύεται *ούτε* να διαψεύδεται.

Δεν υπάρχει επαλήθευση, ούτε διάψευση, για τους τύπους halts-Λ , loops-Λ .
Δεν υπάρχει επαλήθευση, ούτε διάψευση, για τον τύπο $(\neg$ loops-Λ$)$.

Όταν ο τύπος ϕ διαψεύδεται, ο τύπος $(\neg\phi)$ πάντα θα επαληθεύεται.

Όταν ένας τύπος $(\neg\phi)$ επαληθεύεται, ο τύπος ϕ μπορεί και να μην διαψεύδεται.

Ο τύπος $(\neg$ halts-Λ$)$ επαληθεύεται, αλλά ο τύπος halts-Λ δεν διαψεύδεται.

Ταυτολογίες για την «κατασκευαστική» έννοια

Ένας τύπος $(\, \phi \vee (\neg\phi)\,)$ δεν επαληθεύεται πάντα.

Ο τύπος (loops-Λ $\vee$ $(\neg$ loops-Λ$)$) δεν επαληθεύεται.

Ο τύπος $(\, \neg(\, \phi \wedge (\neg\phi)\,)\,)$ πάντα επαληθεύεται.

Ένας τύπος $(\, (\neg\neg\, \phi) \rightarrow \phi\,)$ δεν επαληθεύεται πάντα.

Ο τύπος ($(\neg\neg$ loops-Λ$)$ $\rightarrow$ loops-Λ) δεν επαληθεύεται.

Ο τύπος $(\, \phi \rightarrow (\neg\neg\, \phi)\,)$ πάντα επαληθεύεται.

Ο τύπος $(\, \neg(\phi \wedge \psi) \rightarrow (\, (\neg\phi) \vee (\neg\psi)\,)\,)$ δεν επαληθεύεται πάντα.

Ο τύπος ($\neg$(loops-Λ $\wedge$ $(\neg$ loops-Λ$)$) $\rightarrow$ ($(\neg$loops-Λ$)$ $\vee$ $(\neg\neg$ loops-Λ$)$)) δεν επαληθεύεται.

Ο τύπος $(\, \neg(\phi \vee \psi) \rightarrow (\, (\neg\phi) \wedge (\neg\psi)\,)\,)$ πάντα επαληθεύεται.